COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 79 1999 NO. 1

REGELFLÄCHEN VOM WEINGARTEN-TYP

VON

GEORG STAMOU (THESSALONIKI)

Unter einer *Weingarten-Fläche* (kurz *W-Fläche*) im euklidischen Raum E^3 versteht man bekanntlich eine Fläche, zwischen deren Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 eine nichttriviale Beziehung $f(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ ($f \in C^r$, $r \geq 0$) besteht. Ein der interessantesten Probleme der Flächentheorie des Raumes E^3 ist die Bestimmung der W-Flächen, die in einer vorgegebenen Flächenklasse enthalten sind. Im Rahmen dieser Untersuchung wurden auch Kennzeichnungen spezieller Flächen angegeben. Ein altes Resultat z.B. in dieser Richtung besagt (vgl. [1], [3]): *Eine windschiefe Regelfläche ist genau dann eine W-Fläche, wenn sie eine Schraubregelfläche ist.* Dieses Resultat haben in letzter Zeit R. Koch [5] und W. Kühnel [6] mit anderen Methoden bewiesen. Der erstgenannte Autor hat sogar beim Beweisen die geringsten möglichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen verwendet. Analog zu den W-Regelflächen wurden in [6] windschiefe Regelflächen $\Phi \subset E^3$ derart behandelt, daß auf Φ eine lokale Relation $f(p, q) = 0$ ($f \in C^1$) mit $p \in \{K, H\}$ und $q = K_{II}$ besteht. Hierbei bezeichnet $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ die Gaußsche Krümmung, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ die mittlere Krümmung und K_{II} die innere Krümmung der zweiten Fundamentalform II von Φ. Ausgehend von dieser Idee studieren wir in der vorliegenden Arbeit Regelflächen dieser Art mit $p \in \{K, H, K_{II}\}$ und $q = H_{II}$, wobei H_{II} die *II-mittlere Krümmung* (vgl. [4]) von Φ bedeutet. Im zweiten Teil der Arbeit bestimmen wir alle windschiefen Regelflächen Φ mit der Eigenschaft, daß der Ausdruck $aK_{II} + bH + cH_{II}$ ($a, b, c =$ konst., $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) längs jeder Erzeugenden von Φ konstant ist. Das angegebene Resultat verallgemeinert Ergebnisse von F. Manhart [7] (vgl. auch [4]) und D. Blair und Th. Koufogiorgos [2].

1. Eine reguläre windschiefe Regelfläche Φ des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3 mit dem Ortsvektor $\overline{s}(u)$ ihrer Striktionslinie und dem Richtungseinheitsvektor der Erzeugenden $\overline{e}(u)$ läßt sich über einem Gebiet

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 53A25.

Key words and phrases: non-developable ruled surfaces, Gaussian curvature of the second fundamental form II, II-mean curvature.

$G := I \times \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der (u, v)-Ebene durch eine Parameterdarstellung der Form

$$(1) \qquad \overline{x}(u,v) = \overline{s}(u) + v\overline{e}(u)$$

definieren. Die Fläche Φ sei von der Klasse C^2. Für unsere folgenden Überlegungen ist es günstig, als Parameter die Bogenlänge des sphärischen Erzeugendenbildes auszuzeichnen. Es wird noch angenommen, daß keine Erzeugende von Φ torsal ist, d.h. es gilt

$$(2) \qquad (\overline{s}', \overline{e}, \overline{e}') \neq 0, \qquad \forall u \in I,$$

wobei Strich Ableitung nach u bedeutet. Mit jeder Erzeugenden $e(u) \subset \Phi$ sei im Striktionspunkt $S(u) \in e(u)$ das orthonormierte Rechtsdreibein $\{\overline{e}(u), \overline{n}(u), \overline{z}(u)\}$ verheftet, wobei $\overline{n}(u) := \overline{e}'(u)$ den Zentralnormalenvektor und $\overline{z}(u) := \overline{e}(u) \times \overline{n}(u)$ den Zentraltangentenvektor bezeichnet. Zu diesem begleitenden Dreibein gehören die Ableitungsgleichungen (vgl. z.B. [5, S. 80])

$$(3) \qquad \overline{e}' = \overline{n}, \qquad \overline{n}' = -\overline{e} + k\overline{z}, \qquad \overline{z}' = -k\overline{n},$$

wobei der Koeffizient k als konische Krümmung von Φ bezeichnet wird. Es sei δ der Drall und $\sigma := \sphericalangle(\overline{e}, \overline{s}')$ $(-\pi/2 < \sigma \leq \pi/2,\ \operatorname{sign}\delta = \operatorname{sign}\sigma)$ die Striktion von Φ. Für die Größen k und δ gelten bekanntlich die Beziehungen

$$(4) \qquad k = (\overline{e}, \overline{e}', \overline{e}''), \qquad \delta = (\overline{s}', \overline{e}, \overline{e}').$$

Der Tangentenvektor $\overline{s}'$ der Striktionslinie hat mit $\lambda := \cot\sigma$ die Darstellung

$$(5) \qquad \overline{s}' = \delta(\lambda\overline{e} + \overline{z}).$$

Man kann leicht zeigen, daß durch Vorgabe der Invarianten $\delta(u)$, $k(u)$ und $\lambda(u)$ die Regelfläche Φ bis auf (eigentliche) Bewegungen $E^3 \to E^3$ eindeutig bestimmt ist.

Schließlich berechnet man aus (1) unter Berücksichtigung von (3)–(5) die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H von Φ zu

$$(6) \qquad K = -\frac{\delta^2}{(v^2+\delta^2)^2}, \qquad 2H = -\frac{1}{(v^2+\delta^2)^{3/2}} \cdot [kv^2 + \delta' v + \delta^2(\lambda + k)].$$

2. Mit der Differentialgeometrie der zweiten Fundamentalform II einer nirgends parabolischen Fläche Φ des Raumes E^3 haben sich seit langem verschiedene Autoren beschäftigt und es liegen heutzutage zahlreiche Ergebnisse vor. Eine zentrale Rolle in dieser Theorie spielen die Begriffe der inneren Krümmung K_{II} von II und die II-mittlere Krümmung H_{II}, die wie folgt definiert werden: Betrachtet man II als eine neue Metrik auf Φ, so definiert man K_{II} formal als die Gaußsche Krümmung von II, d.h. K_{II} ist die Krümmung der Riemannschen oder Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit

(Φ, II). Zur Definition von H_{II} führt man zunächst die II-Oberfläche von Φ als das Integral

$$O_{II}(\Phi) = \iint\limits_{\Phi} \sqrt{|h|}\, du\, dv \tag{7}$$

ein, wobei h die Determinante von II ist. In Analogie zum Problem von Plateau erhält man dann die II-Minimalflächen, welche die Flächen mit verschwindender II-mittlerer Krümmung H_{II} sind. Für eine C^4-Fläche berechnet sich H_{II} zu (vgl. [4])

$$H_{II} = H + \tfrac{1}{2}\Delta_{II} \ln \sqrt{|K|}, \tag{8}$$

wobei Δ_{II} der zweite Beltramische Differentialoperator bezüglich der zweiten Fundamentalform ist.

Die Fläche Φ sei nun eine von torsalen Erzeugenden freie Regelfläche. Unter Beachtung der im Abschnitt 1 angegebenen Formeln berechnen sich die Krümmungen K_{II} und H_{II} von Φ zu (vgl. [2], [7])

$$2K_{II} = -\frac{1}{(v^2+\delta^2)^{3/2}} \cdot \left[\frac{k}{\delta^2}v^4 - (\lambda - 2k)v^2 + 2\delta' v + \delta^2(\lambda + k)\right], \tag{9}$$

$$2H_{II} = -\frac{1}{(v^2+\delta^2)^{3/2}} \cdot \left[\frac{2k}{\delta^2}v^4 + (2\lambda + 5k)v^2 - 3\delta' v - \delta^2(\lambda - 3k)\right]. \tag{10}$$

Aus den Formeln (6), (9) und (10) folgt unmittelbar das bekannte Ergebnis, daß $H \equiv 0$, $K_{II} \equiv 0$ oder $H_{II} \equiv 0$ genau dann gelten, wenn $k = \lambda = \delta' = 0$, d.h., wenn Φ eine Wendelfläche ist.

Definition. Es seien p, q $(p \neq q)$ lokale Invarianten einer Fläche $\Phi \subset E^3$. Wir bezeichnen Φ als $\{p,q\}$-*W-Fläche*, wenn lokal eine nichttriviale Beziehung $f(p,q) = 0$ $(f \in C^r,\ r \geq 0)$ besteht.

In diesem Abschnitt untersuchen wir speziell windschiefe $\{p,q\}$-W-Regelflächen Φ mit $p \in \{K, H, K_{II}\}$ und $q = H_{II}$. Wir betrachten zunächst den Fall $p = K_{II}$, $q = H_{II}$ und verlangen $\Phi \in C^3$, $r = 1$. Die lokale Existenz einer Beziehung $f(K_{II}, H_{II}) = 0$ ist dann äquivalent zu

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial v} \cdot \frac{\partial H_{II}}{\partial u} - \frac{\partial K_{II}}{\partial u} \cdot \frac{\partial H_{II}}{\partial v} = 0. \tag{11}$$

Berechnet man aus (9) und (10) die partiellen Ableitungen erster Ordnung von K_{II} und H_{II} und setzt man sie in (11) ein, so erhält man eine Bedingung der Form

$$A_9(u)v^9 + \ldots + A_1(u)v + A_0(u) = 0, \tag{12}$$

wobei die Koeffizienten $A_i(u)$ $(i = 0, \ldots, 9)$ Funktionen der Invarianten $\delta(u)$, $k(u)$, $\lambda(u)$ und deren Ableitungen sind. Diese Bedingung erfüllt sich für alle Punkte einer offenen Umgebung $G_0 \subset G$ eines Punktes $(u_0, v_0) \in G$. Dies hat zur Folge $A_i(u) \equiv 0$ $(i = 0, \dots, 9)$. Das Verschwinden der Koeffizienten A_9, A_7, A_1 und A_0 liefert:

$$A_9 = 0 \Leftrightarrow 2\delta(k\lambda' + k'\lambda) + \delta kk' - \delta' k(4\lambda + k) = 0, \tag{13}$$

$$A_7 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\delta' k + \delta k') + 2\delta' k^2 - 2\delta kk' - 2\delta k\lambda' = 0, \tag{14}$$

$$A_1 = 0 \Leftrightarrow (k'\delta - k\delta')(11\lambda - k) + (\lambda + k)(\delta\lambda' - \delta'\lambda) = 0, \tag{15}$$

$$A_0 = 0 \Leftrightarrow \delta'[\delta\lambda' - \delta'\lambda + 9(\delta k' - \delta' k)] = 0. \tag{16}$$

Es gelte in (16) $\delta' = 0$. Setzen wir dies in (13) und (14) ein und addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir die Bedingung

$$(3\lambda - k)k' = 0. \tag{17}$$

Es sei zunächst $k' = 0$ (1. Fall). Dann erhält (15) die Form

$$(\lambda + k)\lambda' = 0, \tag{18}$$

woraus $\lambda' = 0$ folgt. Gilt andererseits $3\lambda - k = 0$ (2. Fall), so erhalten wir unter Beachtung von (15) $k' = 3\lambda' = 0$. In beiden Fällen haben wir also $\delta =$ konst. $\neq 0$, $k =$ konst., $\lambda =$ konst., d.h. Φ ist eine Schraubregelfläche. Für eine solche Regelfläche sind aber die Krümmungen K_{II}, H_{II} Funktionen nur der Variablen v und somit ist die Bedingung (11) erfüllt.

Es sei nun $\delta' \neq 0$. Dann ist (16) gleichwertig mit

$$\left(\frac{9k}{\delta} + \frac{\lambda}{\delta}\right)' = 0. \tag{19}$$

Die Bedingung (13) läßt sich umformen zu

$$\left(\frac{4k}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\delta} + \frac{k^2}{\delta^2}\right)' = 0. \tag{20}$$

Aus den beiden obigen Bedingungen folgern wir

$$\alpha := \frac{k}{\delta} = \text{konst.}, \quad \beta := \frac{\lambda}{\delta} = \text{konst.} \tag{21}$$

Die Ausgangsbedingung (11) erhält dann die Gestalt

$$(\delta\delta'' - 2\delta'^2)[7\alpha v^6 + \delta^2(19\alpha - \beta)v^4 + \delta^4(17\alpha - 2\beta)v^2 + \delta^6(5\alpha - \beta)] = 0. \tag{22}$$

Für $\alpha = \beta = 0$ (d.h. für $k = \lambda = 0$) ist (22) identisch erfüllt. Es handelt sich in diesem Fall um ein gerades Konoid. Im Fall $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ liefert das Verschwinden der Koeffizienten von (22) die Bedingung

$$\delta\delta'' - 2\delta'^2 = 0. \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\delta = \frac{c_1}{u + c_0}, \quad c_0, c_1 = \text{konst.}, \tag{24}$$

wobei wir ohne Einschränkung $c_0 = 0$ annehmen können. Dann erhalten wir aus (21)

$$k = \frac{c_2}{u}, \quad \lambda = \frac{c_3}{u}, \quad c_2, c_3 = \text{konst.} \tag{25}$$

Aus Obigem folgt also, daß es drei Arten von Regelflächen gibt, die $\{K_{II}, H_{II}\}$-W-Regelflächen sind.

Die Fälle $p = H$, $q = H_{II}$ und $p = K$, $q = H_{II}$ behandelt man analog. Im ersten Fall findet man wieder die oben angegebenen drei Arten von Regelflächen und im zweiten Fall erhält man die Schraubregelflächen. Wir fassen zusammen:

Satz 1. (a) *Die einzigen windschiefen* $\{p,q\}$-W*-Regelflächen* $\Phi \subset E^3$ *der Klasse* C^3 *mit* $p \in \{H, K_{II}\}$, $q = H_{II}$ *sind die Schraubregelflächen, die geraden Konoide und die Regelflächen mit den Invarianten*

$$\delta = \frac{c_1}{u}, \quad k = \frac{c_2}{u}, \quad \lambda = \frac{c_3}{u},$$

wobei $c_i = \text{konst.}$ $(c_1 \neq 0,\ c_1 c_3 \geq 0,\ c_2^2 + c_3^2 \neq 0)$ *und* u *die Bogenlänge des sphärischen Erzeugendenbildes von* Φ *ist.*

(b) *Die einzigen windschiefen* $\{K, H_{II}\}$-W*-Regelflächen* $\Phi \subset E^3$ *der Klasse* C^3 *sind die Schraubregelflächen.*

Bemerkungen. 1. Die zwischen K und H_{II} bestehende Relation einer $\{K, H_{II}\}$-W-Regelfläche Φ kann man leicht finden: Da Φ nach Satz 1(b) eine Schraubregelfläche sein muß, erhält man aus $(6)_1$ und (10) durch Elimination von v die gewünschte Beziehung

$$2H_{II} = A(-K)^{-1/4} + B(-K)^{1/4} + \Gamma(-K)^{3/4}, \tag{26}$$

wobei

$$\begin{gathered} A = -2k|\delta|^{-3/2} = \text{konst.}, \quad B = -(2\lambda + k)|\delta|^{-1/2} = \text{konst.}, \\ \Gamma = 3\lambda|\delta|^{1/2} = \text{konst.} \end{gathered} \tag{27}$$

Es ist zu beachten, daß (wegen (27)) die Konstanten A, B, Γ nicht beliebig sein können. Es gibt z.B. keine Schraubregelfläche mit Konstanten $A = B = 0$ und $\Gamma \neq 0$.

2. Die von W. Kühnel [6] betrachteten $\{p,q\}$-W-Regelflächen führen auch auf die in Satz 1 erwähnten Regelflächen, d.h. der Fall $p = H$, $q = K_{II}$ liefert die in (a) angegebenen Regelflächen und der Fall $p = K$, $q = K_{II}$ ergibt die Schraubregelflächen.

3. Es seien a, b, c reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, so daß der Ausdruck $aK_{II} + bH + cH_{II}$ längs jeder Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche

$\Phi \subset E^3$ konstant ist. Daher gilt

$$a\frac{\partial K_{II}}{\partial v}+b\frac{\partial H}{\partial v}+c\frac{\partial H_{II}}{\partial v}=0,\qquad \forall(u,v)\in G. \tag{28}$$

Unter Berücksichtigung von $(6)_2$, (9) und (10) erhält obige Bedingung die Form

$$\begin{aligned}\frac{k}{\delta^2}(a+2c)v^5&+[a(\lambda+2k)-bk-c(2\lambda-3k)]v^3\\&-2\delta'(2a+b-3c)v^2-\delta^2[a(5\lambda-k)+b(3\lambda+k)-c(7\lambda+k)]v\\&+\delta^2\delta'(2a+b-3c)=0,\qquad\forall(u,v)\in G.\end{aligned} \tag{29}$$

Daraus folgt

$$(a+2c)k=0, \tag{30}$$

$$a(\lambda+2k)-bk-c(2\lambda-3k)=0, \tag{31}$$

$$(2a+b-3c)\delta'=0, \tag{32}$$

$$a(5\lambda-k)+b(3\lambda+k)-c(7\lambda+k)=0. \tag{33}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a) $2a+b-3c\neq 0$. Die Bedingung (32) liefert dann $\delta'=0$.

Es sei in (30) $k=0$. Die Gleichungen (31) und (33) reduzieren sich auf $(2c-a)\lambda=0$ und $(5a+3b-7c)\lambda=0$. Gilt nun $\lambda=0$, so ist Φ eine Wendelfläche. Gilt hingegen $\lambda\neq 0$, so folgt notwendigerweise $2c-a=0$ und $5a+3b-7c=0$. Dann haben wir aber $2a+b-3c=0$, also einen Widerspruch.

Es sei in (30) $k\neq 0$. Dann gilt $a+2c=0$ und die Gleichungen (31) und (33) erhalten die Gestalt

$$bk+c(4\lambda+k)=0, \tag{34}$$

$$b(3\lambda+k)-c(17\lambda-k)=0. \tag{35}$$

Da (wegen $a+2c=0$) $b^2+c^2\neq 0$ ist, muß die Determinante des Systems mit den Unbekannten b und c verschwinden, d.h. es gilt

$$(\lambda+2k)\lambda=0. \tag{36}$$

Ist $\lambda=0$, so erfüllt sich das System genau für $b=-c$ $(\neq 0)$. Es handelt sich in diesem Fall um eine konstant gedrallte, orthoide, nichtkonoidale Regelfläche. Im Fall $\lambda\neq 0$ erhalten wir aus (36) $\lambda+2k=0$ und jede Gleichung von (34), (35) nimmt die Form $(b-7c)k=0$ an, woraus $b-7c=0$ folgt. Dann gilt aber $2a+b-3c=0$ und ist somit ein Widerspruch.

(b) $2a+b-3c=0$. Das System (30)–(33) reduziert sich in diesem Fall auf

$$(a+2c)k=0, \tag{37}$$

$$a(\lambda + 4k) - 2c\lambda = 0, \tag{38}$$

$$a(\lambda + 3k) - 2c(\lambda + k) = 0. \tag{39}$$

Es gelte in (37) $k = 0$. Jede Gleichung von (38), (39) erhält dann die Gestalt $(a - 2c)\lambda = 0$, woraus $a = 2c$ ($\neq 0$) oder $\lambda = 0$ folgt. Es handelt sich im ersten Fall um eine konoidale Regelfläche und im zweiten Fall um ein gerades Konoid (orthoide, konoidale Regelfläche). Es gelte schließlich in (37) $a + 2c = 0$. Dann reduzieren sich (38) und (39) auf die Bedingung $\lambda + 2k = 0$.

Zum Schluß kann man unschwer feststellen, daß in allen Fällen $aK_{II} + bH + cH_{II} = 0$, $\forall(u, v) \in G$ gilt. Wir haben also den

Satz 2. *Es seien a, b, c reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ und der Ausdruck $aK_{II} + bH + cH_{II}$ sei längs jeder Erzeugenden einer windschiefen C^3-Regelfläche $\Phi \subset E^3$ konstant. Dann ist $aK_{II} + bH + cH_{II} \equiv 0$ und weiter gilt*:

(a) *Für $2a + b - 3c \neq 0$ ist Φ eine konstant gedrallte, orthoide Regelfläche.*

(b) *Für $2a + b - 3c = 0$ ist Φ eine konoidale Regelfläche oder es gilt die Beziehung $\lambda + 2k = 0$.*

Folgende Tabelle gibt die zugehörigen Beziehungen zwischen K_{II}, H und H_{II} der in Satz 2 erwähnten Regelflächen an:

$aK_{II} + bH + cH_{II} = 0$	Bedingungen für die Invarianten δ, k, λ	Beziehungen zwischen K_{II}, H, H_{II}
$2a + b - 3c \neq 0$	$\delta' = \lambda = 0$	$2K_{II} + H - H_{II} = 0$ Insbesondere: $K_{II} = H = H_{II} = 0$, falls $k = 0$
$2a + b - 3c = 0$	$k = 0$	$2K_{II} - H + H_{II} = 0$ Insbesondere: $3K_{II} = 6H = -2H_{II}$, falls $\lambda = 0$
	$\lambda + 2k = 0$	$2K_{II} - 7H - H_{II} = 0$

Im obigen Ergebnis sind bekannte Sonderfälle enthalten: $a = b = 0$ ergibt ein Resultat von F. Manhart [7] (vgl. auch [4]); $c = 0$ liefert ein Resultat von D. Blair und Th. Koufogiorgos [2].

Danksagung. Ich möchte dem Gutachter für einige Hinweise herzlich danken.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Beltrami, *Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe*, Ann. Mat. Pura Appl. (1) 7 (1865), 139–150.

[2] D. E. Blair and Th. Koufogiorgos, *Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature*, Monatsh. Math. 133 (1992), 177–181.
[3] U. Dini, *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principali é una funzione dell'altro*, Ann. Mat. Pura Appl. (1) 7 (1865/1866), 205–210.
[4] E. Glässner, *Über die Minimalflächen der zweiten Fundamentalform*, Monatsh. Math. 78 (1974), 193–214.
[5] R. Koch, *Die Weingarten-Regelflächen*, J. Geometry 47 (1993), 77–85.
[6] W. Kühnel, *Ruled W-surfaces*, Arch. Math. (Basel) 62 (1994), 475–480.
[7] F. Manhart, *Die II-Minimalregelflächen*, Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1982 (1983), 157–160.

Mathematisches Institut
der Universität
54006 Thessaloniki, Griechenland
E-mail: Stamoug@ccf.auth.gr

Received 21 January 1998;
revised 19 May 1998