COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 77 1998 NO. 2

# *INÉGALITÉS DE SOBOLEV–ORLICZ NON-UNIFORMES*

PAR

GILLES CARRON (LYON)

**0. Introduction.** L'objectif de cet article est d'étudier un certain type d'inégalités de Sobolev. Ces inégalités concernent l'espace $H_0^1$ : si $(M^n, g)$ est une variété riemannienne ouverte, on définit son espace de Sobolev $H_0^1(M)$ comme le complété de l'espace $C_0^\infty(M)$ muni de la norme $u \mapsto \|du\|_{L^2}$; a priori cet espace est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert des 1-formes différentielles de carré sommable. Suivant Ancona [A] on dit que $(M, g)$ est *non-parabolique* si cet espace est constitué de fonctions localement intégrables, c'est-à-dire si l'inclusion $C_0^\infty(M) \to L^1_{\mathrm{loc}}$ se prolonge par continuité à $H_0^1(M)$.

Le problème de trouver une inégalité (ou inclusion) de Sobolev est de trouver un "bon" espace de fonctions dans lequel $H_0^1(M)$ s'injecte continûment. Le qualificatif "bon" dépend de l'usage que l'on désire avoir des inégalités.

"Bon" peut être un espace où on peut appliquer les techniques d'itérations de Nash–Moser ou celle plus souple de Grigor'yan [G1] afin d'obtenir des estimations sur le noyau de la chaleur, sur les fonctions de Green, sur les valeurs propres pour le problème de Dirichlet des domaines de $M$ etc.

Signalons cependant qu'il n'est pas facile de montrer une inégalité de Sobolev sur une variété riemannienne; si on connaît des propriétés équivalentes comme les inégalités de Faber–Krahn, les inégalités sur le noyau de la chaleur, sur les capacités, ces inégalités ne sont pas plus simples à obtenir ([V], [G1], [C1]).

Ce travail est aussi motivé par nos travaux sur la $L^2$-cohomologie. Selon J. Lott [L], le fait que les espaces de formes différentielles harmoniques $L^2$ (i.e. les espaces de $L^2$-cohomologie réduite) soient de dimension finie ne dépend que de la géométrie des voisinages de l'infini; ainsi la classe des variétés dont l'espace des formes harmoniques $L^2$ est de dimension finie, est stable par somme connexe. Or dans [C4], nous avons montré que certaines inégalités de Sobolev permettaient d'établir un résultat de finitude pour la

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46E30, 46E35, 58G11.
*Key words and phrases*: Sobolev inequalities, Orlicz spaces, heat kernel.

dimension de ces espaces. La question qui motive en partie cet article est la suivante : si $(M, g)$ est la somme connexe de deux variétés riemanniennes qui vérifient chacune une inégalité de Sobolev, alors quelle est l'inégalité de Sobolev vérifiée par $(M, g)$?

Les espaces de fonctions que nous considérons sont les espaces de Orlicz non-uniformes ("modular spaces" en anglais); un tel espace est défini à partir d'une $N$-fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire une fonction croissante convexe par rapport à la variable réelle. Avec une telle fonction, on définit l'espace $L(M, \phi)$ des fonctions mesurables $u$ tel qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\int_M \phi(|u(m)|/\lambda, m)\, d\mu(m) < \infty.$$

Cet espace est normé par

$$N_\phi(u) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_M \phi(|u(m)|/\lambda, m)\, d\mu(m) \le 1\Big\};$$

ainsi $L(M, \phi)$ est un espace de Banach constitué de fonctions localement intégrables. Cette classe d'espaces contient les espaces $L^p$ où $\phi(t, x) = t^p$, les espaces $L^p$ à poids où $\phi(t, x) = t^p \varrho$ et les espaces de Orlicz (uniformes) où la fonction $\phi$ ne dépend pas de la variable $x \in M$. Si $M$ est l'union disjointe de $\Omega_1$ et $\Omega_2$ alors l'espace $L^{p_1}(\Omega_1) \oplus L^{p_2}(\Omega_2)$ est un espace de Orlicz non-uniforme; ainsi ces espaces de Orlicz non-uniformes permettent de recoller et de découper des espaces de fonctions. On a aussi le théorème suivant :

0.1. Théorème. *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète non-parabolique tel que pour un compact $K \subset M$, chacune des composantes connexes de $M - K = \coprod E_i$ vérifie une inégalité de Sobolev–Orlicz non-uniforme :*

$$N_{\phi_i}(u) \le \|du\|_{L^2(E_i)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(E_i),$$

*où les $\phi_i$ sont des $N$-fonctions. Alors pour tout compact régulier $\widetilde{K}$ contenant $K$ dans son intérieur, on a l'inclusion de Sobolev suivante :*

$$H_0^1(M) \to \bigoplus_i L(E_i - \widetilde{K}, \phi_i) \oplus L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K}).$$

Ce théorème sera prouvé dans la troisième partie de cet article. On peut se demander comment obtenir une inégalité de Sobolev–Orlicz non-uniforme. Lorsqu'on s'intéresse aux espaces $L^2$ à poids, i.e. on cherche à généraliser les inégalités de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ :

$$\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x)\, \frac{dx}{\|x\|^2} \le \int_{\mathbb{R}^n} |du|^2(x)\, dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

nous avons vu dans [C5] des critères assez simples pour obtenir des inégalités de ce type. Ici nous montrons une inégalité de Sobolev–Orlicz assez générale :

0.2. THÉORÈME. *Soit* $(M^n, g)$ *une variété riemannienne complète. Supposons que pour un* $x \in M$, *le noyau de la chaleur* $P$ *de* $(M, g)$ *vérifie*

$$\int_1^\infty (P(t,x,x)/t)^{1/2}\,dt < \infty.$$

*Si* $\phi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ *est la fonction définie par*

$$\phi^2(\lambda, x) = P\left(\frac{1}{2\phi'^2(\lambda, x)}, x, x\right), \qquad \phi(0, x) = 0,$$

*alors* $\phi$ *est une* $N$*-fonction et on a l'inégalité de Sobolev–Orlicz*

$$N_{\phi^2}(u) \le C\sqrt{\int_M |du|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante* $C$ *universelle.*

Remarquons que l'hypothèse faite ici sur la décroissance du noyau de la chaleur est légèrement plus forte que celle qui assure la non-parabolicité, c'est-à-dire que $\int_1^\infty P(t,x,x)\,dt < \infty$; en particulier, de telles variétés sont non-paraboliques. En appliquant ce théorème aux variétés à courbure de Ricci positive ou nulle, nous obtenons :

0.3. COROLLAIRE. *Soit* $(M^n, g)$ *une variété riemannienne complète dont la courbure de Ricci est positive ou nulle. Si pour un* (*et donc pour tout*) $x \in M$ *on a*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{V(x,t)}} < \infty,$$

*où* $V(x,t)$ *est le volume de la boule géodésique de rayon* $t$ *et de centre* $x$, *alors on peut définir la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ *par*

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda \int_{1/(2\lambda)}^\infty \frac{dt}{\sqrt{V(t,x)}},$$

*et on a, pour* $\phi$ *la fonction conjuguée à* $\varphi$, *l'inégalité de Sobolev–Orlicz suivante* :

$$N_{\phi^2}(u) \le C_n\sqrt{\int_M |du|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante* $C_n$ *qui ne dépend que de la dimension* $n$ *de* $M$.

Ces résultats sont démontrés dans la seconde partie; on y verra aussi d'autres inégalités de Sobolev à propos des normes $u \mapsto \|\Delta^s u\|_{L^p}$ où $p > 1$ et $s > 0$.

Nous finissons cette introduction par des questions qui nous ont été posé par A. Grigor'yan au vu de l'article de E. B. Davies [D]. En général, une inégalité de Sobolev (uniforme) permet d'obtenir des estimées sur le noyau de la chaleur. La question est donc maintenant de savoir comment ces inégalités de Sobolev–Orlicz non-uniformes permettent d'obtenir une majoration du noyau de la chaleur. Une façon de procéder serait d'obtenir à partir d'une telle inégalité une inégalité de Faber–Krahn du type

$$\lambda_1^{\mathrm{D}}(\Omega) \geq \Lambda_{x,R}(\operatorname{vol}\Omega), \quad \forall \Omega \subset B_x(R),$$

où $\lambda_1^{\mathrm{D}}(\Omega)$ est la première valeur propre pour le Laplacien avec condition de Dirichlet sur $\Omega$, $B_x(R)$ est la boule géodésique centré en $x$ et de rayon $R$, et $\Lambda_{x,R}$ est une fonction décroissante. Ensuite en utilisant les résultats de Grigor'yan [G1], on obtient des estimées de $(P(t,x,x))_{t\leq R^2}$. Il semble cependant qu'il faille aussi utiliser d'autres outils comme la propagation à vitesse fini [C-G-T]. Un résultat du type "inégalité de Sobolev–Orlicz implique majoration du noyau de la chaleur" serait bon dans la mesure où il permettrait de comprendre le comportement du noyau de la chaleur sur la somme connexe de deux variétés riemanniennes complètes.

**Remerciements.** Je tiens à remercier A. Grigor'yan pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

**1. Espaces de Orlicz non-uniformes.** Le but de ce paragraphe est de présenter les espaces de Orlicz non-uniformes; nous renvoyons le lecteur à [Mu] pour plus de détails.

Dans toute cette partie, $(M,\Sigma,\mu)$ désigne un espace de Borel mesuré $\sigma$-fini.

**1.a.** *Définitions.* Une fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ est une *$N$-fonction* si elle est localement essentiellement bornée et si pour tout $m \in M$ la fonction $t \mapsto \phi(t,m)$ est une fonction convexe réalisant une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et si la fonction $t \mapsto \phi(t,m)/t$ est croissante et réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

On dit "$N$-fonction" pour "nice Young function", c'est-à-dire une fonction convexe dont la fonction conjuguée est définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction conjuguée d'une $N$-fonction $\phi$ est définie par

$$\varphi(t,m) = \sup_{x\geq 0}(xt - \phi(x,m)).$$

C'est aussi une $N$-fonction et si on note $\phi'$ la fonction dérivée à gauche de la fonction $t \mapsto \phi(t,m)$ alors la fonction dérivée à gauche de $\varphi$ est définie par

$$\varphi'(t,m) = \inf\{y \in \mathbb{R}_+ : \phi'(y,m) > t\},$$

et on a

$$\varphi(t,m)=\int_0^t \varphi'(s,m)\,ds.$$

En particulier pour tous $m\in M$, $x,y\in\mathbb{R}_+$, on a les inégalités suivantes :

(i) $xy\le\phi(x,m)+\varphi(y,m)$,
(ii) $x\le\phi^{-1}(x,m)\varphi^{-1}(x,m)\le 2x$.

On peut alors définir l'espace de Orlicz (non-uniforme) $L(\phi,\mu)$ comme l'espace vectoriel suivant :

$$L(\phi,\mu)=\Big\{u:M\to\mathbb{C}\text{ mesurable tel qu'il existe }\lambda>0\text{ avec}\\ \int_M \phi(|u(m)|/\lambda,m)\,d\mu(m)<\infty\Big\}/\!\sim,$$

où $\sim$ est la relation d'égalité presque partout. On norme cet espace avec l'une des deux normes suivantes :

$$N_\phi(u)=\inf\Big\{\lambda>0:\int_M \phi(|u(m)|/\lambda,m)\,d\mu(m)\le 1\Big\},$$
$$\|u\|_\phi=\sup\Big\{\int_M uv:\int_M \varphi(|v(m)|,m)\,d\mu(m)\le 1\Big\}.$$

Ces deux normes sont équivalentes, en fait on a les inégalités

$$\|u\|_\phi\ge N_\phi(u)\ge\|u\|_\phi/2;$$

de plus, elles font de $L(\phi,\mu)$ un espace de Banach et on a

1.1. Proposition. *$L(\phi,\mu)$ est constitué de fonctions localement intégrables.*

Preuve. Si $u\in L(\phi,\mu)$ et $K$ est un compact de $M$, on a

$$\begin{aligned}\|u\|_\phi&\ge\sup\Big\{\int_M uv:\operatorname{supp}v\subset K,\ \int_M\varphi(|v(m)|,m)\,d\mu(m)\le 1\Big\}\\&\ge\sup\Big\{\int_M uv:\operatorname{supp}v\subset K,\ \|v\|_{L^\infty}\le\varepsilon\Big\}\ge\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L^1(K)},\end{aligned}$$

où $\varepsilon$ est telle que $\int_K\varphi(\varepsilon,x)\,dx\le 1$. Ceci montre que $L(\phi,\mu)$ s'injecte dans $L^1_{\mathrm{loc}}$. ∎

**1.b.** *Exemples*

1.b.1. Bien sûr, les espaces $L^p$ sont des exemples simples d'espaces de Orlicz, plus généralement; si la fonction $\phi$ ne dépend pas de $m\in M$, on obtient un espace de Orlicz uniforme.

1.b.2. Si $f$ est une fonction mesurable positive localement essentiellement bornée sur $M$ alors l'espace $L(t^p f(m), \mu)$ est isométrique à l'espace $L^p(M, f\mu)$.

1.b.3. Un autre exemple, qui montre pourquoi on s'intéresse à ces espaces, est le suivant : si $M$ est l'union disjointe des boreliens $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ ($I$ fini), alors la fonction définie par

$$\phi(t,m) = t^{p_i} \quad \text{si } m \in \Omega_i$$

est une $N$-fonction pourvu que $p_i > 1$ pour tout $i$; et l'espace de Orlicz obtenu est isomorphe à l'espace $\bigoplus_{i\in I} L^{p_i}(\Omega_i, \mu)$.

Ainsi les espaces de Orlicz non-uniformes permettent de découper et recoller des espaces de fonctions; concernant les variétés riemanniennes non-compactes, ils seront le cadre naturel pour recoller différentes inégalités de Sobolev sur un voisinage de l'infini et aussi pour en obtenir une assez générale en recollant un certain aspect de la géométrie locale de la variété riemannienne.

**1.c.** *Remarque.* Nous finissons cette partie sur la remarque suivante : à partir d'une estimation de la forme

$$\int_M \phi(|u(m)|/\lambda, m)\, d\mu(m) \leq C,$$

on peut déduire une majoration de la norme de $u$. En effet, la fonction $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, définie par

$$F(\lambda) = \int_M \phi(\lambda|u(m)|, m)\, d\mu$$

est une fonction croissante convexe valant 0 en 0 et $\infty$ en $\infty$, tandis que la fonction $\lambda(\alpha)$ définie par

$$\lambda(\alpha) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_M \phi(|u(m)|/\lambda, m)\, d\mu(m) \leq \alpha\Big\}$$

est décroissante; de plus $F$ est convexe, on a donc pour $\lambda < \kappa$, $F(\kappa) - F(\lambda) \geq (\kappa - \lambda)F(\lambda)/\lambda$, inégalité de laquelle on tire pour $\alpha \leq \beta$ l'encadrement

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\beta)} \leq 1.$$

Nous en déduisons

1.2. Proposition. *Si $N_\phi(u,\alpha)$ est défini pour $u \in L(\phi,\mu)$ par*

$$N_\phi(u,\alpha) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_M \phi(|u(m)|/\lambda, m)\, d\mu(m) \leq \alpha\Big\},$$

*alors toutes ces normes sont équivalentes et on a pour $\alpha \leq \beta$,*

$$\frac{\alpha}{\beta} N_\phi(u,\alpha) \leq N_\phi(u,\beta) \leq N_\phi(u,\alpha).$$

**2. Inégalites de Sobolev–Orlicz.** Le but de ce paragraphe est d'établir une inégalité de Sobolev–Orlicz la plus générale possible; on va montrer que la donnée du noyau de la chaleur sur la diagonale suffit pour obtenir une inégalité de Sobolev.

2.1. Théorème. *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète. Supposons que pour un $x \in M$ le noyau de la chaleur $P$ de $(M,g)$ vérifie*

$$\int_1^\infty (P(t,x,x)/t)^{1/2}\, dt < \infty.$$

*Si $\phi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ est la fonction définie par*

$$\phi^2(\lambda,x) = P\left(\frac{1}{2\phi'^2(\lambda,x)}, x, x\right), \qquad \phi(0,x) = 0,$$

*alors $\phi$ est une $N$-fonction et on a l'inégalité de Sobolev–Orlicz*

$$N_{\phi^2}(u) \leq C \sqrt{\int_M |du|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante $C$ universelle.*

Remarque. Remarquons que si $\phi$ est une $N$-fonction alors $\phi^2$ aussi.

La preuve que nous exposons reprend l'idée de Varopoulos [V], qui a montré qu'une majoration uniforme du noyau de la chaleur du type $P(t,x,x) \leq C/t^{p/2}$ pour tous $t > 0$ et $x \in M$ est équivalente à l'inégalité de Sobolev classique, c'est-à-dire à l'injection continue de $H_0^1(M)$ dans $L^{2p/(p-2)}$; en fait, on peut généraliser cette équivalence à d'autres majorations [C2].

Avant de commencer la preuve de ce théorème, nous rappelons quelques faits sur le noyau de la chaleur :

L'opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta^g} : L^2(M, dv_g) \to L^2(M, dv_g)$, qui est défini grâce au théorème spectral appliqué à l'opérateur essentiellement auto-adjoint $\Delta^g$, est un opérateur à noyau et :

(i) Ce noyau $P(t,x,y)$ est symétrique; c'est la solution minimale de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,x,y) + \Delta_y^g P(t,x,y) = 0, & (x,y) \in M,\ t > 0, \\ P(0,x,y) = \delta_x(y). \end{cases}$$

(ii) Ce noyau est strictement positif, la fonction $t \mapsto P(t,x,x)$ est décroissante et pour tout $u \in L^2(M)$, on a la majoration

$$|e^{-t\Delta^g} u(x)| \le \sqrt{P(2t,x,x)}\|u\|_{L^2}.$$

(iii) De plus, grâce aux inégalités de Harnack, les comportements du noyau de la chaleur en différents points de la diagonale de $M \times M$ sont comparables, i.e. pour tous $x,y \in M$, il existe une constante fini positive $c_{x,y}$ telle que

$$c_{x,y}^{-1} P(t,y,y) \le P(t,x,x) \le c_{x,y} P(t,y,y), \quad \forall t \ge 1.$$

Ainsi l'hypothèse que nous faisons sur le noyau de la chaleur dans le théorème 2.1 implique que pour tout point $y \in M$ on a $\int_1^\infty (P(t,y,y)/t)^{1/2} dt < \infty$.

Preuve (du théorème 2.1). Selon la proposition 1.2 il suffit de montrer qu'il existe des constantes universelles $A$, $B$ telles que si $u$ est une fonction positive et de norme $L^2$ égale à 1 alors

$$\int_M \phi^2(|\Delta^{-1/2} u(m)|/A, m)\, d\mu(m) \le B.$$

Soit donc $u$ une telle fonction; pour $x \in M$ on a

$$(\Delta^{-1/2} u)(x) = \int_0^\infty (e^{-t\Delta} u)(x) \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}.$$

Notons $u^*$ la fonction maximale associée à $u$, i.e.

$$u^*(x) = \sup_{t \ge 0} (e^{-t\Delta} u)(x).$$

Alors, pour tout $T > 0$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\,(\Delta^{-1/2} u)(x) &\le 2\sqrt{T}\, u^*(x) + \int_T^\infty (e^{-t\Delta} u)(x) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &\le 2\sqrt{T}\, u^*(x) + \int_T^\infty \sqrt{P(2t,x,x)} \frac{dt}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

On choisit alors $T$ afin d'optimiser cette majoration; le choix de $T$ est le suivant :

$$u^*(x) = \sqrt{P(2T,x,x)}.$$

Définissons une fonction $T : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ par l'équation $u = \sqrt{P(2T,x,x)}$. Remarquons que cette fonction est lisse par rapport à la variable $u \in \mathbb{R}_+$. Alors si $F : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ est la fonction définie par

$$F(u,x) = 2\sqrt{T}\, u + \int_T^\infty \sqrt{P(2t,x,x)} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

nous avons la majoration suivante :

$$\sqrt{\pi}\,(\Delta^{-1/2}u)(x) \leq F(u^*(x),x).$$

Mais nous avons le lemme suivant :

Lemme. *A $x \in M$ fixé, la fonction $F(\cdot,x)$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction réciproque $\phi$ est la $N$-fonction voulue.*

Grâce à ce résultat, nous achevons la preuve du théorème 2.1; en effet, on a

$$\phi^2(\sqrt{\pi}\,(\Delta^{-1/2}u)(x),x) \leq (u^*)^2(x),$$

ce qui donne en intégrant

$$\int_M \phi^2(\sqrt{\pi}\,(\Delta^{-1/2}u)(x),x)\,dx \leq \|u^*\|_{L^2}^2.$$

Or selon le théorème maximal [S], il existe une constante universelle $C$ tel que pour toute fonction $u \in L^2$ positive on ait

$$\|u^*\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2},$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Montrons maintenant le lemme : la fonction dérivée de $F$ est

$$\frac{\partial}{\partial u}F = \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial u} = \left[\frac{u}{\sqrt{T}} + 2\sqrt{T}\,\frac{\partial u}{\partial T} - \sqrt{\frac{P(2T,x,x)}{T}}\right]\frac{\partial T}{\partial u} = 2\sqrt{T},$$

ainsi $F$ est bien une fonction croissante. Maintenant comme on a

$$P(t,x,x) \simeq_{t\to 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}},$$

on voit que $F(\infty,x)=\infty$; puis l'hypothèse $\int_1^\infty (P(t,x,x)/t)^{1/2}\,dt < \infty$ assure que $P(2T,x,x)$ tend vers zero lorsque $T$ tend vers l'infini, et donc $T$ tend vers l'infini lorsque $u$ tend vers zéro et on a $F(0,x)=0$. Ensuite l'équation pour $\partial F/\partial u$ ci-dessus montre que

$$2T = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2,$$

soit

$$P(2T,x,x) = P\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2, x, x\right) = u^2,$$

expression de laquelle on tire l'équation vérifiée par $\phi$, la fonction réciproque de $F$ :

$$P\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \phi}\right)^2, x, x\right) = \phi^2(\lambda,x).$$

Comme $\phi$ est croissante et que $P(\cdot,x,x)$ est décroissante, la fonction dérivée de $\phi$ est croissante et donc $\phi$ est convexe; puis cette équation montre que la dérivée de $\phi$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\phi$ est une $N$-fonction, ce qui achève de montrer le lemme et donc le théorème. ∎

En fait, on peut donner une expression explicite à la fonction conjuguée de $\phi$, ceci grâce à l'expression suivante de la dérivée de $\phi$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{T \circ \phi}}.$$

Comme la dérivée de $\varphi$ est la fonction réciproque de la dérivée de $\phi$, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = F \circ T^{-1}\left(\frac{1}{(2\lambda)^2}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -2 \int_{1/(2\lambda)^2}^{\infty} \sqrt{t}\, \frac{d}{dt}\sqrt{P(2t,x,x)}\, dt.$$

En intégrant par partie et après calcul on obtient

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda \int_{1/(2\lambda)^2}^{\infty} \sqrt{P(2t,x,x)/t}\, dt.$$

Remarquons maintenant que l'on peut à partir d'une majoration du noyau de la chaleur reprendre la preuve du théorème et obtenir une inégalité de Sobolev–Orlicz :

2.1 BIS. THÉORÈME. *Soit $(M,g)$ une variété riemannienne et soit $B(t,x)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in M$, une fonction positive décroissante par rapport à la variable $t$ telle que l'on ait :*

(i) *la majoration suivante du noyau de la chaleur :*

$$P(t,x,x) \le B(t,x), \quad t > 0, \; x \in M,$$

(ii) $\int_1^\infty \sqrt{B(t,x)/t}\, dt < \infty$, $\forall x \in M$.

*Si $\varphi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ est la fonction définie par*

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda \int_{1/(2\lambda)^2}^{\infty} \sqrt{B(t,x)/t}\, dt,$$

*on a, pour $\phi$ la fonction conjuguée à $\varphi$, l'inégalité de Sobolev–Orlicz suivante :*

$$N_{\phi^2}(u) \le C \sqrt{\int_M |du|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante $C$ universelle.*

On peut appliquer ce théorème au cas des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle et obtenir

2.2. THÉORÈME. *Soit* $(M^n, g)$ *une variété riemannienne complète dont la courbure de Ricci est positive ou nulle. Si pour un* (*et donc pour tout*) $x \in M$ *on a*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{V(x,t)}} < \infty,$$

*où* $V(x,t)$ *est le volume de la boule géodésique de rayon* $t$ *et de centre* $x$, *alors on peut définir la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ *par*

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda \int_{1/(2\lambda)}^\infty \frac{dt}{\sqrt{V(t,x)}},$$

*et on a, pour* $\phi$ *la fonction conjuguée à* $\varphi$, *l'inégalité de Sobolev–Orlicz suivante* :

$$N_{\phi^2}(u) \le C_n \sqrt{\int_M |du|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante* $C_n$ *qui ne dépend que de la dimension* $n$ *de* $M$.

Preuve. En effet, ceci est une conséquence du résultat de P. Li et S. T. Yau [L-Y] qui obtiennent la majoration suivante du noyau de la chaleur d'une variété riemannienne complète $(M^n, g)$ dont la courbure de Ricci est positive ou nulle :

$$P(t,x,x) \le C_n / V(\sqrt{t}, x), \quad t > 0,\ x \in M.$$

On applique alors le théorème précédant et en effectuant un changement de variable dans la formule exprimant $\varphi$, on aboutit au résultat. ∎

*D'autres inégalités de Sobolev–Orlicz non-uniformes.* En se servant de la formule

$$\Gamma(s)\Delta^{-s}u = \int_0^\infty (e^{-t\Delta}u)(x)t^{s-1}\, dt,$$

où $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^{s-1}dt$ est la fonction d'Euler, la même preuve nous montre la proposition suivante :

2.3. PROPOSITION. *Soit* $(M^n, g)$ *une variété riemannienne complète. Supposons que pour un* $s > 0$ *et un* $x \in M$ *le noyau de la chaleur de* $(M, g)$ *vérifie*

$$\int_1^\infty \sqrt{P(t,x,x)}\, t^{s-1}\, dt < \infty.$$

*Si* $\varphi_s : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ *est la fonction définie par*

$$\varphi_s(\lambda, x) = \lambda \int\limits_{(s/\lambda)^{1/s}}^{\infty} \sqrt{P(t,x,x)}\, t^{s-1}\, dt$$

*alors* $\varphi_s$ *est une N-fonction et si* $\phi_s$ *est la fonction conjuguée à* $\varphi_s$ *on a l'inégalité de Sobolev–Orlicz*

$$N_{\phi_s^2}(u) \le C_s \sqrt{\int\limits_M |\Delta^s u|^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante* $C_s$ *universelle.*

On peut alors définir un $s^*$ qui est la borne supérieure des réels $s$ tels que pour un $x \in M$, $\int_1^\infty \sqrt{P(t,x,x)}\, t^{s-1} dt < \infty$, et on peut se poser la question suivante : Si $S > \max\{s^*, n/2\}$, alors le complété de l'espace $C_0^\infty(M)$ munit de la norme

$$u \mapsto \sqrt{\|\Delta^S u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}}$$

est-il constitué de fonctions continues bornées?

De même on peut s'intéresser aux applications $\Delta^{-s}$ agissant sur les espaces $L^p$ et la même preuve fournit

2.4. Théorème. *Soit* $(M^n, g)$ *une variété riemannienne complète. Supposons que pour un* $s > 0$ *et un* $p > 1$ *le noyau de la chaleur de* $(M, g)$ *vérifie*

$$\int\limits_1^\infty M_p(t,x) t^{s-1}\, dt < \infty$$

*avec*

$$M_p(t,x) = \Big( \int\limits_M P(t,x,y)^{p/(p-1)}\, dy \Big)^{1-1/p}.$$

*Si* $\varphi_{(p,s)} : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ *est la fonction définie par*

$$\varphi_{(p,s)}(\lambda, x) = \lambda \int\limits_{(s/\lambda)^{1/s}}^{\infty} M_p(t,x) t^{s-1}\, dt$$

*alors* $\varphi_{(p,s)}$ *est une N-fonction et si* $\phi_{(p,s)}$ *est la fonction conjuguée à* $\varphi_{(p,s)}$ *on a l'inégalité de Sobolev–Orlicz*

$$N_{\phi^p_{(p,s)}}(u) \le C_{(p,s)} \|\Delta^s u\|_{L^p}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M),$$

*ceci pour une constante* $C_{(p,s)}$ *universelle.*

On peut aussi se poser les mêmes questions que précedemment à propos de $s_p^*(x)$ qui est la borne supérieure des réels $s$ qui vérifient $\int_1^\infty M_p(t,x) t^{s-1}\, dt < \infty$, c'est-à-dire

(i) La fonction $s_p^*$ est-elle constante (si $M$ est connexe)?

(ii) Si $S > \sup_{x\in M} s_p^*(x)$ et si $S > n/p$ alors le complété de l'espace $C_0^\infty(M)$ muni de la norme

$$u \mapsto \sqrt{\|\Delta^S u\|_{L^p} + \|u\|_{L^p}}$$

est-il constitué de fonctions continues bornées?

**3. Recoller des inégalités de Sobolev.** Le but de ce paragraphe est de systématiser ce que nous avons fait dans [C3], prop. 2.7, où on a montré que si une variété riemannienne connexe $(M^n, g)$ satisfait à l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M-K)\Big(\int_M |u|^{2p/(p-2)}(x)\,dx\Big)^{1-2/p} \le \int_{M-K} |du|^2(x)\,dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(M-K),$$

pour un compact $K \subset M$ et un $p \ge n$ alors elle vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p(M)\Big(\int_M |u|^{2p/(p-2)}(x)dx\Big)^{1-2/p} \le \int_M |du|^2(x)\,dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Ici, on va montrer que les espaces de Orlicz non-uniformes permettent de recoller des inégalités de Sobolev.

3.1. Théorème. *Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne complète non-parabolique tel que pour un compact $K \subset M$, chacune des composantes connexes de $M - K = \coprod E_i$ vérifie une inégalité de Sobolev–Orlicz non-uniforme :*

$$\|u\|_{\phi_i} \le \|du\|_{L^2(E_i)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(E_i),$$

*où les $\phi_i$ sont des $N$-fonctions. Alors pour tout compact régulier $\widetilde{K}$ contenant $K$ dans son intérieur, il existe une constante $C = C(\widetilde{K})$ tel que si $\phi : \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}_+$ est la $N$-fonction définie par*

$$\phi(t,x) = \begin{cases} Ct^{2n/(n-2)} & si\ x \in \widetilde{K}, \\ \phi_i(t,x) & si\ x \in E_i - \widetilde{K}, \end{cases}$$

*alors $(M^n, g)$ vérifie l'inégalité de Sobolev–Orlicz non-uniforme*

$$\|u\|_\phi \le C\|du\|_{L^2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

P r e u v e. C'est la même preuve que celle de la proposition 2.7 de [C3] qui elle-même s'inspire des techniques utilisées par T. Coulhon et L. Saloff-Coste dans [C-S.C]. Soit $\theta$ une fonction lisse à support dans $\widetilde{K}$ et valant 1 sur $K$ et telle que $0 \le \theta \le 1$. Soit $u \in C_0^\infty(M)$. On a

$$\begin{aligned}\|u\|_\phi &\le \|u\|_{L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K})} + \|u\|_{L(\phi,M-\widetilde{K})}\\ &\le \|u\|_{L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K})} + \sum_i \|(1-\theta)u\|_{L(\phi_i,E_i-K)}.\end{aligned}$$

Or comme $\widetilde{K}$ est à bord régulier, nous avons l'inégalité de Sobolev

$$\Big\|v - \frac{\int_{\widetilde{K}} v}{\operatorname{vol}\widetilde{K}}\Big\|_{L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K})} \le S_{\widetilde{K}}\|dv\|_{L^2}, \quad \forall v \in C^\infty(\widetilde{K}),$$

donc

$$\begin{aligned}(3.2)\quad \|u\|_{L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K})} &\le \Big\|u - \frac{\int_{\widetilde{K}} u}{\operatorname{vol}\widetilde{K}}\Big\|_{L^{2n/(n-2)}(\widetilde{K})} + \Big|\frac{\int_{\widetilde{K}} u}{(\operatorname{vol}\widetilde{K})^{1/2+1/n}}\Big|\\ &\le S_{\widetilde{K}}\|du\|_{L^2(\widetilde{K})} + \Big|\frac{\int_{\widetilde{K}} u}{(\operatorname{vol}\widetilde{K})^{1/2+1/n}}\Big|.\end{aligned}$$

Or nous pouvons appliquer l'inégalité de Sobolev à $(1-\theta)u$ pour obtenir

$$\|(1-\theta)u\|_{L(\phi_i,E_i)} \le \|du\|_{L^2(E_i)} + \|d\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2(\widetilde{K})}.$$

L'inégalité de Poincaré nous donne ensuite la majoration

$$\|u\|_{L^2(\widetilde{K})} \le \lambda_1^{\mathrm{N}}(\widetilde{K})^{-1/2}\|du\|_{L^2(\widetilde{K})} + \frac{1}{(\operatorname{vol}\widetilde{K})^{1/2}}\Big|\int_{\widetilde{K}} u\Big|,$$

où $\lambda_1^{\mathrm{N}}(\widetilde{K})$ est la première valeur propre non-nulle du Laplacien sur $\widetilde{K}$ pour le problème de Neumann. Ainsi on obtient

$$(3.3)\qquad \|(1-\theta)u\|_{L(\phi_i,E_i)} \le C'\Big(\|du\|_{L^2(M)} + \Big|\int_{\widetilde{K}} u\Big|\Big).$$

Alors compte tenu de (3.2) et (3.3), on obtient

$$(3.4)\qquad \|u\|_\phi \le C'\Big(\|du\|_{L^2(M)} + \Big|\int_{\widetilde{K}} u\Big|\Big).$$

Or $(M,g)$ est non-parabolique, et donc selon le critère établi par Ancona [A], pour tout ouvert borné $U$ de $X$ il existe une constante $C$ telle que

$$\Big|\int_U v\Big| \le C\|dv\|_{L^2(M)}, \quad \forall v \in C_0^\infty(M),$$

ce qui nous permet de conclure. ∎

**3.5.** *Remarque sur la non-parabolicité.* Si on ne suppose pas que la variété est non-parabolique, alors l'inégalité (3.4) est toujours valide. Et en fait, dans certains cas une inégalité de Sobolev sur un des bouts permet d'assurer la non-parabolicité :

En effet, selon A. Grigor'yan [G2], pour que $(M,g)$ soit non-parabolique il suffit de trouver un domaine borné $\Omega$ de $M$ telle que sa capacité soit non-nulle. Rappelons que

$$\mathrm{cap}(\Omega) = \inf\{\|du\|_{L^2}^2 : u \in C_0^\infty(M),\ u = 1 \text{ sur } \Omega\};$$

choisissons $\Omega$ telle que $\widetilde{K} \subset \Omega$; alors en appliquant l'inégalité (3.4) on obtient pour une fonction $u \in C_0^\infty(M)$ qui vaut 1 sur $\Omega$,

$$\|u\|_\phi \le C'(\|du\|_{L^2} + \mathrm{vol}\,\widetilde{K}).$$

On minore alors $\|u\|_\phi$ par $\|\mathbf{1}_{\Omega\cap E_i}\|_{\phi_i}$, où on note $\mathbf{1}_F$ la fonction indicatrice de l'ensemble $F$. Notons $B_R$ la boule géodésique de rayon $R$ et de centre un point $x_0$ de $M$ fixé. On déduit que dans le cadre du théorème 3.1, si on ne suppose pas $(M,g)$ non-parabolique et si pour un $i$ on a

$$\lim_{R\to\infty} \|\mathbf{1}_{B_R\cap E_i}\|_{\phi_i} = \infty$$

alors $(M,g)$ est non-parabolique est la conclusion du théorème 3.1 reste valide.

## *BIBLIOGRAPHIE*


[A] A. Ancona, *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lecture Notes in Math. 1427, Springer, 1990.

[C1] G. Carron, *Inégalités isopérimétriques de Faber–Krahn et conséquences*, dans : Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle en l'Honneur de M. Berger (Luminy, 1992), Sémin. Congr. 1, Soc. Math. France, 1996, 205–232.

[C2] —, *Inégalités de Faber–Krahn et inclusion de Sobolev–Orlicz*, Potential Anal. 7 (1997), 555–575.

[C3] —, *Une suite exacte en $L^2$-cohomologie*, Duke Math. J., à paraître.

[C4] —, *$L^2$-cohomologie et inégalités de Sobolev*, prépublication n°306 de l'Institut J. Fourier, 1994.

[C5] —, *Inégalité de Hardy sur les variétés riemanniennes*, J. Math. Pures Appl. 76 (1997), 883–891.

[C-G-T] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982), 15–53.

[C-S.C] T. Coulhon et L. Saloff-Coste, *Variétés riemanniennes isométriques à l'infini*, Rev. Mat. Iberoamericana 11 (1995), 687–726.

[D] E. B. Davies, *Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour*, J. London Math. Soc. 55 (1997), 105–125.

[G1] A. A. Grigor'yan, *Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold*, Rev. Mat. Iberoamericana 10 (1994), 395–452.

[G2] —, *On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian manifolds*, Math. USSR-Sb. 56 (1987), 349–357.

[L-Y] P. Li and S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. 156 (1986), 153–201.

[L] J. Lott, $L^2$-*cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal. 7 (1997), 81–119.

[Mu] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. 1034, Springer, 1983.

[S] E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to Littlewood–Paley Theory*, Ann. of Math. Stud. 63, Princeton Univ. Press, 1970.

[V] N. Varopoulos, *Hardy–Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal. 63 (1985), 240–260.

UMPA, CNRS U.M.R. 128
ENS Lyon
46 Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07, France
E-mail : gcarron@umpa.ens-lyon.fr

*Received 4 March 1997;*
*revised 21 April 1997*