COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 77 1998 NO. 1

UN EXEMPLE DE SOUS-GROUPE ADDITIF DE L'ESPACE DE HILBERT

PAR

ROBERT CAUTY (PARIS)

1. Introduction. Le but de cet article est de construire l'exemple suivant, qui résout un problème de T. Dobrowolski ([2], où une erreur typographique a remplacé $0 \le m < n \le \infty$ par $1 \le m \le n \le \infty$; voir aussi [1], question 5.9 et [7], question L.S.18).

THÉORÈME. *Il existe un sous-groupe σ-compact G de l'espace de Hilbert qui est* LC^0 *mais pas* LC^1. *Le complété $\widehat{G}$ de G est aussi* LC^0 *mais pas* LC^1.

Pour un compact pointé $(X, *)$, soit $A(X)$ le groupe topologique abélien libre sur $(X, *)$. Prenant pour X un bouquet dénombrable de 1-sphères, nous obtiendrons G comme l'image de $A(X)$ par un homomorphisme judicieusement choisi. Dans ce but, nous construirons d'abord un homomorphisme $\overline{\psi}$ de $A(S^1)$ dans ℓ^2 induisant des équivalences homotopiques faibles de $A(S^1)$ dans $H = \overline{\psi}(A(S^1))$ et dans le complété de H.

2. Préliminaires. Nous notons I le segment $[0,1]$. Pour tout entier $n \ge 0$, nous notons respectivement S^n et B^{n+1} la sphère unité et la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Rappelons qu'un espace topologique X est dit LC^n si, pour tout point x de X et tout voisinage U de x, il existe un voisinage V de x contenu dans U tel que, pour $0 \le k \le n$, toute fonction continue de S^k dans V se prolonge en une fonction continue de B^{k+1} dans U. X est dit C^n si, pour $0 \le k \le n$, toute fonction continue de S^k dans X est inessentielle. X est dit LC^∞ (resp. C^∞) s'il est LC^n (resp. C^n) pour tout entier n. Un sous-ensemble A de X est dit *localement n-négligeable* si, pour tout ouvert U de X et tout entier $k \le n$, le groupe d'homotopie relative $\pi_k(U, U \setminus A)$ est trivial.

LEMME 1. *Soient G un groupe abélien métrisable et $\widehat{G}$ son complété. Si G est* LC^n, *alors $\widehat{G}$ est aussi* LC^n *et $\widehat{G} \setminus G$ est localement n-négligeable dans $\widehat{G}$.*

1991 *Mathematics Subject Classification*: 22A05, 54C55.

D é m o n s t r a t i o n. Soit d une distance invariante sur $\widehat{G}$. Il est facile de voir que G est ULC^n (au sens de [4]), donc $\widehat{G}$ est LC^n d'après le théorème 4 de [4]. La n-négligeabilité locale de $\widehat{G}\setminus G$ résulte du théorème 1 de [4] et du théorème 2.3 de [6].

Si X est un espace métrique et x un point de X, nous notons $B(x,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε. Pour n entier ≥ 0, nous dirons qu'une fonction $f : Y \to X$ est *n-inessentielle* si, pour tout $k \leq n$ et toute fonction $g : S^k \to Y$, la fonction $f \circ g$ est inessentielle.

LEMME 2. *Supposons que l'espace métrique X soit réunion d'une suite croissante de fermés $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ vérifiant*

(H$_n$) *Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \varepsilon$ tel que, pour tout k, il existe un entier $q = q(k,\varepsilon) \geq k$ tel que l'inclusion de $B(x,\delta)\cap X_k$ dans $B(x,\varepsilon)\cap X_q$ soit n-inessentielle.*

Alors X est LC^n *et, pour tout $x \in X$ et tout $j < n$, $\pi_j(X,x) = \varinjlim \pi_j(X_k,x)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Pour montrer que X est LC^n, il suffit de prouver que si A est un fermé d'un espace métrique séparable Y tel que $Y\setminus A$ soit un polyèdre localement fini de dimension $\leq n+1$ et si f est une fonction continue de A dans X, alors f peut se prolonger à un voisinage de A dans Y (cela se prouve comme le théorème V.2.1 de [5]). Nous pouvons supposer $Y\setminus A$ triangulé de façon que $\operatorname{diam}(\sigma) < d(\sigma,A)$ pour tout simplexe σ. Notant N^m le m-squelette de $Y\setminus A$, il suffit de construire par récurrence, pour $0 \leq m \leq n+1$, un voisinage V_m de A dans $A\cup N^m$ et une fonction continue $f_m : V_m \to X$ prolongeant f. En outre, nous imposerons à f_m la condition que, pour tout simplexe σ de N^m contenu dans V_m, il existe un entier $k(\sigma)$ tel que $f_m(\sigma)\subset X_{k(\sigma)}$.

Posons $V_0 = A\cup N^0$. Pour obtenir f_0, il suffit de prendre, pour tout $v \in N^0$, un point $a_v \in A$ tel que $d(v,a_v) < 2d(v,A)$, et de poser $f_0(v) = f(a_v)$. Soit $1 \leq m \leq n+1$ et supposons V_{m-1} et f_{m-1} construits. Notant $\dot\sigma$ le bord d'un simplexe σ, il résulte de notre condition sur f_{m-1} que, si σ est un m-simplexe de $Y\setminus A$ tel que $\dot\sigma\subset V_{m-1}$, alors il existe un entier $k(\sigma)$ tel que $f_{m-1}(\dot\sigma)\subset X_{k(\sigma)}$. Pour un tel simplexe σ, soit P_σ l'ensemble des fonctions continues g de σ dans X prolongeant $f_{m-1}|\dot\sigma$ et telles qu'il existe un entier l (dépendant de g) tel que $g(\sigma)\subset X_l$, et posons

$$\delta(\sigma) = \begin{cases} \inf\{\operatorname{diam} g(\sigma) \mid g \in P_\sigma\} & \text{si } P_\sigma \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } P_\sigma = \emptyset. \end{cases}$$

Soit S_m l'ensemble des m-simplexes σ de $Y\setminus A$ tels que $\dot\sigma \subset V_{m-1}$ et que $\delta(\sigma) < \infty$. Soit $V_m = V_{m-1}\cup\bigcup\{\sigma \mid \sigma\in S_m\}$. Pour $\sigma \in S_m$, prenons $g_\sigma \in P_\sigma$ telle que $\operatorname{diam} g_\sigma(\sigma) < 2\delta(\sigma)$, et définissons $f_m : V_m \to X$ par

$$f_m|V_{m-1} = f_{m-1}, \qquad f_m|\sigma = g_\sigma \quad \forall \sigma\in S_m.$$

Il résulte de la condition (H_n) que V_m est un voisinage de A dans $A \cup N^m$ et que f_m est continue. Par construction, f_m vérifie la condition supplémentaire souhaitée.

Puisque X est LC^n, deux fonctions suffisamment proches d'un complexe simplicial de dimension $\leq n$ dans X sont homotopes par une homotopie qui est stationnaire sur l'ensemble des points où elles coïncident. Pour prouver la deuxième affirmation du lemme, il suffit donc de vérifier le fait suivant :

AFFIRMATION. *Soient K un complexe simplicial fini de dimension $\leq n$, L un sous-complexe de K, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X, k un entier ≥ 1 et f une fonction continue de K dans X telle que $f(L) \subset X_k$. Il existe une fonction continue g de K dans X et un entier k' vérifiant*

(i) $g|L = f|L$,
(ii) $g(K) \subset X_{k'}$,
(iii) *pour tout $x \in K$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant $\{f(x), g(x)\}$.*

Nous prouverons cela par récurrence sur la dimension m de $K \setminus L$, le résultat étant trivial pour $m = 0$. Soit $1 \leq m \leq n$, et supposons l'affirmation vraie quand la dimension de $K \setminus L$ est $\leq m - 1$. L'hypothèse (H_n) nous permet de trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X tel que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant V et tel que, pour tout entier k, il existe $q \geq k$ tel que l'inclusion de $V \cap X_k$ dans $U \cap X_q$ soit n-inessentielle.

Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de X tel que, pour tout $W \in \mathcal{W}$, $\mathrm{St}(W, \mathcal{W}) = \bigcup\{W' \in \mathcal{W} \mid W \cap W' \neq \emptyset\}$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{V}$. Triangulons K de façon que, pour tout simplexe σ de K, $f(\sigma)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{W}$. Notant K^{m-1} le $(m-1)$-squelette de K, l'hypothèse de récurrence nous permet de trouver un entier k_0 et une fonction $g' : K^{m-1} \cup L \to X$ tels que $g'|L = f|L$, $g'(K^{m-1} \cup L) \subset X_{k_0}$ et que, pour tout $x \in K^{m-1} \cup L$, il existe $W \in \mathcal{W}$ contenant $\{f(x), g'(x)\}$. Notons que, si σ est un m-simplexe de $K \setminus L$ de bord $\dot{\sigma}$ et si W_σ est un élément de $\mathcal{W}$ contenant $f(\sigma)$, alors $f(\sigma) \cup g'(\dot{\sigma})$ est contenu dans $\mathrm{St}(W_\sigma, \mathcal{W})$. Soit V_σ un élément de $\mathcal{V}$ contenant $\mathrm{St}(W_\sigma, \mathcal{W})$. Nous pouvons trouver $U_\sigma \in \mathcal{U}$ contenant V_σ et un entier $k_\sigma \geq k_0$ tels que $V_\sigma \cap X_{k_0} \hookrightarrow U_\sigma \cap X_{k_\sigma}$ soit inessentielle. Il existe donc une fonction $g_\sigma : \sigma \to X_{k_\sigma}$ prolongeant $g'|\dot{\sigma}$. Posant $k' = \sup_\sigma k_\sigma$ et définissant g par $g|K^{m-1} \cup L = g'$ et $g|\sigma = g_\sigma$ pour tout m-simplexe de $K \setminus L$, nous constatons que les conditions (i)–(iii) sont vérifiées.

3. Description de l'exemple. Fixons un point de base dans la 1-sphère S^1 et notons $A(S^1)$ le groupe topologique abélien libre sur l'espace pointé $(S^1, *)$. Algébriquement, c'est le groupe abélien libre de base $S^1 \setminus \{*\}$. Pour $k \geq 0$, notons A_k le sous-ensemble de $A(S^1)$ formé des points de la forme $\sum_x n_x x$ où x parcourt $S^1 \setminus \{*\}$ et où les entiers n_x sont presque tous nuls et vérifient $\sum_x |n_x| \le k$. L'espace $A(S^1)$ est un CW-complexe qui est réunion de la suite croissante de sous-complexes finis A_k (voir [3] pour plus de détails). S^1 s'identifie naturellement à un sous-espace de A_1. Le résultat suivant est un cas particulier de l'affirmation II du théorème 6.10 de [3].

LEMME 3. *L'inclusion de S^1 dans $A(S^1)$ est essentielle.*

Soit ψ un plongement de S^1 dans ℓ^2 tel que $\psi(*) = 0$ et que $\psi(S^1 \setminus \{*\})$ soit linéairement indépendant. La fonction ψ se prolonge en un homomorphisme continu et bijectif $\overline{\psi}$ de $A(S^1)$ sur le sous-groupe H de ℓ^2 engendré par $\psi(S^1)$. Pour $k \ge 0$, soit $A'_k = \overline{\psi}(A_k)$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $B(\varepsilon) = \{x \in H \mid \|x\| < \varepsilon\}$. La proposition suivante sera prouvée au paragraphe 4.

PROPOSITION. *Il est possible de choisir ψ de façon que H ait les propriétés suivantes :*

(A) *Pour $0 < \delta < 1/2$ et pour tout $k \ge 0$, $B(\delta) \cap A'_k$ est C^∞.*
(B) *Pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon)$ est connexe par arcs.*

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que ψ et H vérifient (A) et (B).

LEMME 4. *H est LC^∞.*

Démonstration. Soit $x \in H$, et soit m tel que A'_m contienne x. Soient $0 < \delta < 1/2$ et $k \ge 1$. Soit $f : S^n \to B(x,\delta) \cap A'_k$ une fonction continue. La fonction $g(y) = f(y) - x$ envoie S^n dans $B(\delta) \cap A'_{k+m}$; d'après (A), elle a un prolongement $\overline{g} : B^{n+1} \to B(\delta) \cap A'_{k+m}$. Alors la fonction $\overline{f}(y) = \overline{g}(y) + x$ est un prolongement continue de f à valeurs dans $B(x,\delta) \cap A'_{k+2m}$. Cela montre que H et les A'_k vérifient la condition (H_n) du lemme 2 pour tout $n \ge 0$, d'où le résultat.

Soit $\widehat{H}$ le complété de H, et soient ψ' et ψ'' les fonctions de S^1 dans H et $\widehat{H}$ induites par ψ.

LEMME 5. *ψ' et ψ'' sont essentielles.*

Démonstration. D'après les lemmes 1 et 4, l'inclusion de H dans $\widehat{H}$ est une équivalence homotopique faible, donc il suffit de considérer le cas de ψ'. Comme ψ' est la composée de $\overline{\psi}$ et de l'inclusion de S^1 dans $A(S^1)$, il suffit, d'après le lemme 3, de montrer que $\overline{\psi}$ est une équivalence homotopique faible. Mais $A(S^1)$ est la réunion des complexes connexes A_k, donc $\pi_i(A(S^1)) = \varinjlim \pi_i(A_k)$ pour tout $i \ge 0$ et, comme $\overline{\psi}$ envoie homéomorphiquement A_k sur A'_k, il suffit de vérifier que $\pi_i(H) = \varinjlim \pi_i(A_k)$, ce qui résulte du lemme 2 et de la démonstration du lemme 4.

Pour $i \ge 1$, soit L_i une copie de l'espace de Hilbert, et soit $L = \bigoplus_{\ell^2} L_i$ la somme hilbertienne des L_i. Nous notons r_i la projection orthogonale de L

sur L_i. Soit $X = \bigvee_{i=1}^{\infty}(S_i, *)$ un compact métrisable qui est un bouquet de 1-sphères, i.e. chaque $(S_i, *)$ est une copie de $(S^1, *)$, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $S_i \cap S_j = \{*\}$ si $i \neq j$ et le diamètre de S_i tend vers zéro quand i tend vers l'infini. Pour tout i, soit $\psi_i : S_i \to L_i$ une copie de ψ, i.e. $\psi_i = \psi \circ j_i$ où j_i est un homéomorphisme de $(S_i, *)$ sur $(S^1, *)$. Prolongeons ψ_i à X en posant $\psi_i(x) = 0$ si $x \notin S_i$. Définissons une fonction continue $\varphi : X \to L$ par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \psi_i(x).$$

Alors, φ est un plongement de X dans L tel que $\varphi(*) = 0$ et que $\varphi(X \setminus \{*\})$ soit linéairement indépendant. Soit G le sous-groupe de L engendré par $\varphi(X)$. Evidemment, G est σ-compact.

Soit K_i le sous-groupe de L engendré par $\varphi(S_i)$, et soit $\widehat{K}_i$ son complété. K_i est une copie de H multipliée par $1/i$, donc le lemme 5 entraîne que l'inclusion de $\varphi(S_i)$ dans K_i ou $\widehat{K}_i$ est essentielle. Remarquons que la restriction de r_i à G rétracte G sur K_i; r_i rétracte donc aussi $\widehat{G}$ sur $\widehat{K}_i$. Par conséquent, l'inclusion de $\varphi(S_i)$ dans G ou $\widehat{G}$ est essentielle. Comme tout voisinage de 0 dans G contient $\varphi(S_i)$ pour i assez grand, cela montre que G et $\widehat{G}$ ne sont pas LC^1.

Utilisant le lemme 1, il suffit, pour prouver que G et $\widehat{G}$ sont localement connexes par arcs, de vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B_G(\varepsilon) = \{x \in G \mid \|x\| < \varepsilon\}$ est connexe par arcs. Pour $\varepsilon > 0$ et $i \geq 1$, soit $B_i(\varepsilon) = \{x \in K_i \mid \|x\| < \varepsilon\}$. Remarquons que tout élément x de G s'écrit $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ où $x_i \in K_i$, $x_i = 0$ pour presque tout i, et que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^2$. Si $\|x\| < \varepsilon$, nous pouvons trouver des nombres $\varepsilon_i > 0$ tel que $\|x_i\| < \varepsilon_i$ et que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^2 < \varepsilon^2$. La condition (B) nous permet de trouver un chemin $\omega_i : I \to B_i(\varepsilon_i)$ tel que $\omega_i(0) = x_i$ et $\omega_i(1) = 0$. Si $x_i = 0$, nous supposons $\omega_i(t) = 0$ pour tout t. Alors le chemin $\omega : I \to G$ défini par $\omega(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(t)$ relie x à 0 et, pour tout $t \in I$,

$$\|\omega(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\omega_i(t)\|^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^2 < \varepsilon^2.$$

4. Démonstration de la proposition. Soit E le bord du carré I^2, et soit D le sous-ensemble de E formé des points ayant au moins une coordonnée nulle. Nous identifions S^1 au quotient E/D, avec le point base $\{0\}$, et, le carré I^2 étant muni de la mesure de Lebesgue, nous construirons ψ comme une fonction de E dans $\mathcal{L}^2(I^2)$ nulle sur D.

Pour $x = (x^1, x^2) \in E$, soit $R(x) = \{(y^1, y^2) \in I^2 \mid 0 \leq y^i \leq x^i$ pour $i = 1, 2\}$, et soit $\psi(x)$ la fonction caractéristique du rectangle $R(x)$. Il est évident que ψ est une fonction continue de E dans $\mathcal{L}^2(I^2)$, que $\psi^{-1}(0) = D$ et que $\psi(E \setminus D)$ est linéairement indépendant.

Pour simplifier les notations, nous représenterons les points de H sous la forme $z = \sum_{q=1}^{m} n_q x_q$ au lieu de $z = \sum_{q=1}^{m} n_q \psi(x_q)$ (n_q entiers, $x_q \in E$). Si $z \neq 0$, il a, à l'ordre près, une unique représentation de cette forme où les x_q sont des points distincts de $E \setminus D$, et nous identifierons z, élément de $\mathcal{L}^2(I^2)$, à la combinaison linéaire correspondante de fonctions caractéristiques $z = \sum_{q=1}^{m} n_q \psi(x_q)$ qui le représente.

LEMME 6. *Pour $k \geq 1$ et $0 < \varepsilon < 1/2$, il existe une homotopie $h_k^\varepsilon : A'_k \times I \to A'_k$ vérifiant*

(i) $h_k^\varepsilon(z,t) = z$ *si* $t = 0$ *ou si* $z \in A'_{k-1}$,
(ii) $\|h_k^\varepsilon(z,t)\| \leq \|z\| + \varepsilon$ *pour tout* $(z,t) \in A'_k \times I$,
(iii) $h_k^\varepsilon((B(1/2-\varepsilon) \cap A'_k) \times \{1\}) \subset A'_{k-1}$.

Démonstration. Fixons $k \geq 1$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des couples d'entiers > 0. Pour $\pi = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}$, posons $\omega(\pi) = p_1 + p_2$. Nous associons à chaque élément z de $A'_k \setminus A'_{k-1}$ un couple $\pi(z) = (p_1(z), p_2(z)) \in \mathcal{P}$ comme suit : z s'écrit, de façon unique à l'ordre près, $z = \sum_{q=1}^{m} n_q x_q$ où les $x_q = (x_q^1, x_q^2)$ sont des points distincts de $E \setminus D$ et les n_q des entiers non nuls vérifiant $\sum_{q=1}^{m} |n_q| = k$. Pour $i = 1, 2$ soit $p_i(z)$ le cardinal de l'ensemble $\{x_1^i, \ldots, x_m^i\}$. Puisque, pour tout q, l'un au moins des nombres x_q^1, x_q^2 est égal à un, nous avons $2 \leq \omega(\pi(z)) \leq m+2 \leq k+2$. Pour $\pi \in \mathcal{P}$ et $r \leq k+2$, posons

$$M_\pi = \{z \in A'_k \setminus A'_{k-1} \mid \pi(z) = \pi\}, \qquad N_r = A'_{k-1} \cup \bigcup \{M_\pi \mid \omega(\pi) \leq r\}.$$

Il est facile de voir que N_r est fermé dans A'_k. En outre, $N_1 = A'_{k-1}$. Posant $\overline{B}(1/2) = \{z \in H \mid \|z\| \leq 1/2\}$, nous allons construire, pour $0 < \varepsilon < 1/2$ et $2 \leq r \leq k+2$, une homotopie $h_{k,r}^\varepsilon : A'_k \times I \to A'_k$ vérifiant

(i′) $h_{k,r}^\varepsilon(z,t) = z$ si $t = 0$ ou si $z \in N_{r-1}$,
(ii′) $\|h_{k,r}^\varepsilon(z,t)\| \leq \|z\| + \varepsilon$ pour tout $(z,t) \in A'_k \times I$,
(iii′) $h_{k,r}^\varepsilon((\overline{B}(1/2) \cap N_r) \times \{1\}) \subset N_{r-1}$.

Supposons les $h_{k,r}^\varepsilon$ construites. Posons $\delta = \varepsilon/(k+1)$ et définissons $h_k^\varepsilon : A'_k \times I \to A'_k$ par

$$h_k^\varepsilon(z,0) = z,$$
$$h_k^\varepsilon(z,t) = h_{k,(k+2)-i}^\delta\left(h_k^\varepsilon\left(z, \frac{i}{k+1}\right), (k+1)t - i\right)$$
$$\text{pour } \frac{i}{k+1} \leq t \leq \frac{i+1}{k+1} \ (0 \leq i \leq k).$$

Alors (i) résulte de (i′). Par récurrence, on constate que $\|h_k^\varepsilon(z,t)\| \leq \|z\| + i\varepsilon/(k+1)$ si $0 \leq t \leq i/(k+1)$, d'où (ii). Si $\|z\| < 1/2 - \varepsilon$, alors, pour

$0 \le i \le k$,

$$\left\| h_k^\varepsilon\left(z, \frac{i}{k+1}\right)\right\| < \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{i\varepsilon}{k+1} < \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k+1},$$

donc (iii′) entraîne par récurrence que $h_k^\varepsilon(z, i/(k+1)) \in N_{(k+2)-i}$ pour $0 \le i \le k+1$. Puisque $N_1 = A'_{k-1}$, (iii) en résulte.

Fixons $r \le k+2$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. Soit $\mathcal{P}_r = \{\pi \in \mathcal{P} \mid \omega(\pi) = r\}$. Les ensembles M_π, $\pi \in \mathcal{P}_r$, sont deux à deux disjoints et, comme on le voit facilement, fermés dans $A'_k \backslash N_{r-1}$. Nous pouvons donc trouver des ensembles U_π, deux à deux disjoints et ouverts dans A'_k tel que $M_\pi \subset U_\pi \subset A'_k \setminus N_{r-1}$ pour tout $\pi \in \mathcal{P}_r$. Il nous suffira donc de construire la restriction h_π de $h_{k,r}^\varepsilon$ à chaque ensemble $\overline{U_\pi} \times I$ de façon que $h_\pi(z,t) = z$ si $z \in \overline{U_\pi} \setminus U_\pi$, et de poser $h_{k,r}^\varepsilon(z,t) = z$ si $z \notin \bigcup_\pi U_\pi$.

Pour obtenir h_π, nous construirons une fonction auxiliare $g : A'_k \times I \to A'_k$ vérifiant

(1) $g(z,t) = z$ si $t = 0$ ou si $z \in N_{r-1}$,
(2) la restriction de g à $(A'_k \setminus N_{r-1}) \times I$ est continue,
(3) la restriction de g à $(N_{r-1} \cup M_\pi) \times I$ est continue,
(4) $\|g(z,t)\| < \|z\| + \varepsilon$ pour tout $(z,t) \in M_\pi \times I$,
(5) $g((\overline{B}(1/2) \cap M_\pi) \times \{1\}) \subset N_{r-1}$.

Supposons g construite. En utilisant (2), (3) et (4), nous pouvons alors trouver des voisinages $\{W_l\}_{l=1}^\infty$ de M_π dans $A'_k \setminus N_{r-1}$ tels que $M_\pi = \bigcap_{l=1}^\infty W_l$, que $\overline{W_l} \subset W_{l-1} \subset \overline{W}_{l-1} \subset U_\pi$ pour $l > 1$ et que les conditions suivantes soient vérifiées :

(6) $\|g(z,t)\| < \|z\| + \varepsilon$ si $z \in W_l$ et $0 \le t \le 1 - 1/(l+1)$,
(7) pour tout $z \in W_l$, il existe $z' \in M_\pi$ tel que

$$\|g(z,t) - g(z',t)\| < 2d(z, N_{r-1}) \qquad \text{pour } 0 \le t \le 1 - \frac{1}{l+1}.$$

Prenons alors une fonction continue $\lambda : A'_k \backslash N_{r-1} \to I$ telle que $\lambda^{-1}(1) = M_\pi$, $\lambda^{-1}(0) \supset A'_k \setminus (N_{r-1} \cup W_1)$ et $1 - 1/l \le \lambda(z) \le 1 - 1/(l+1)$ si $z \in \overline{W_l} \setminus W_{l-1}$. Définissons enfin h_π par

$$h_\pi(z,t) = \begin{cases} g(z, t\lambda(z)) & \text{si } z \in A'_k \setminus N_{r-1}, \\ z & \text{si } z \in N_{r-1}. \end{cases}$$

Notons que $h_\pi(z,t) = z$ si $t = 0$ ou si $z \in A'_k \setminus W_1 \supset (\overline{U}_\pi \setminus U_\pi) \cup N_{r-1}$. D'après (2) et (3), pour prouver la continuité de h_π, il suffit de vérifier que si $\{(z_s, t_s)\}$ est une suite de points de $(W_1 \setminus M_\pi) \times I$ telle que $\{z_s\}$ converge vers un point z_0 de N_{r-1}, alors $\{h_\pi(z_s, t_s)\}$ tend vers z_0. Soit l_s tel que $z_s \in W_{l_s} \backslash W_{l_s+1}$. D'après (7), il existe $z'_s \in M_\pi$ tel que $\|g(z_s,t) - g(z'_s,t)\| < 2d(z, N_{r-1})$ pour $0 \le t \le 1 - 1/(l_s+1)$. En particulier, $\|z_s - z'_s\| = \|g(z_s,0) - g(z'_s,0)\| < 2d(z_s, N_{r-1})$, donc la suite $\{z'_s\}$ tend aussi vers z_0.

Puisque $g(z_0,t)=z_0$ pour tout t, il résulte de (3) que $\{g(z'_s,t_s\lambda(z_s))\}$ tend vers z_0. Mais

$$\begin{aligned}\|h_\pi(z_s,t_s)-g(z'_s,t_s\lambda(z_s))\| &= \|g(z_s,t_s\lambda(z_s))-g(z'_s,t_s\lambda(z_s))\|\\ &< 2d(z_s,N_{r-1})\end{aligned}$$

d'après (7) puisque $\lambda(z_s)\le 1-1/(l_s+1)$, ce qui entraîne que $\{h_\pi(z_s,t_s)\}$ converge aussi vers z_0.

La condition (ii′) résulte de (4) et (6) car si $h_\pi(z,t)\ne z$, alors $h_\pi(z,t)=g(z,t')$ où $t'\le\lambda(z)\le 1-1/(l-1)$ si $z\in W_l\setminus W_{l-1}$. Enfin, si $z\in M_\pi$, $h_\pi(z,t)=g(z,t)$, donc (iii′) résulte de (5).

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des sextuplets $u=(u_w)_{w=0}^5$ de réels vérifiant $0\le u_0\le u_1\le u_3\le u_5\le 1$, $u_0\le u_2\le u_4\le u_5$, $u_2=u_0$ si $u_1=u_0$, $u_2=u_4$ si $u_1=u_3$ et $u_4=u_5$ si $u_3=u_5$. Pour $u\in\mathcal{U}$, soit $\alpha(u)$ la fonction de I dans I qui est l'identité sur $[0,u_0]$ et $[u_5,1]$, envoie u_1 sur u_2, u_3 sur u_4 et est linéaire sur $[u_0,u_1]$, $[u_1,u_3]$ et $[u_3,u_5]$. Définissons des fonctions $\alpha_1(u)$, $\alpha_2(u)$ de E dans E par $\alpha_1(u)(x^1,x^2)=(\alpha(u)(x^1),x^2)$ et $\alpha_2(u)(x^1,x^2)=(x_1,\alpha(u)(x^2))$. Comme $\alpha_i(u)(D)\subset D$, $\alpha_i(u)$ se prolonge en un endomorphisme $\overline{\alpha}_i(u)$ de H si l'on pose, pour $z=\sum_{q=1}^m n_qx_q$, $\overline{\alpha}_i(u)(z)=\sum_{q=1}^m n_q\alpha_i(u)(x_q)$. Il est facile de voir que, pour tout $k\ge 1$, $\overline{\alpha}_i(u)(A'_k)\subset A'_k$ et que $\overline{\alpha}_i(u)(z)$ dépend continûment de $(u,z)\in\mathcal{U}\times A'_k$ (mais cette fonction n'est *pas* continue sur $\mathcal{U}\times H$).

Pour construire g, nous distinguerons deux cas.

Premier cas : $\pi=(1,1)$, donc $r=2$ et $N_{r-1}=A'_{k-1}$. Alors tout point de M_π est de la forme $z=\pm kx$ où $x\in E\setminus D$. Pour $0\le t\le 1$, soit $u(t)=(0,1/2,(1-t)/2,1,1,1)\in\mathcal{U}$. Définissons g par

$$g(z,t)=\begin{cases}\alpha_1(u(t))\circ\alpha_2(u(t))(z) & \text{si } z\in A'_k\setminus A'_{k-1},\\ z & \text{si } z\in A'_{k-1}.\end{cases}$$

La condition (1) est évidemment vérifiée. La continuité sur $(A'_k\setminus A'_{k-1})\times I$ résulte du fait que $\overline{\alpha}_i(u)(z)$ dépend continûment de $(u,z)\in\mathcal{U}\times A'_k$. Il est facile de vérifier que, si $z=\pm kx$, alors $\|g(z,t)\|\le\|z\|$ pour tout t, d'où (4). Pour voir (3), remarquons que si $z_s=\pm kx_s\in M_\pi$ et si la suite $\{z_s\}$ converge vers $z_0\in A'_{k-1}$, alors $\{x_s\}$ tend vers D, donc $z_0=0$, et la suite $\{g(z_s,t_s)\}$ tend vers 0 quels que soient t_s puisque $\|g(z_s,t_s)\|\le\|z_s\|$. Enfin, si $z=\pm kx$, où $x=(x^1,x^2)$, vérifie $\|z\|\le 1/2$, alors celui des nombres x^1,x^2 qui est différent de 1 est $\le 1/2$, donc $g(z,1)=0$, d'où (5).

Deuxième cas : $\pi=(p_1,p_2)\ne 1$. Supposons par exemple $p_1\ne 1$. Si $z=\sum_{q=1}^m n_qx_q$ est la représentation d'un élément $z\in M_\pi$ telle que les x_q soient des points distincts de $E\setminus D$, soient $0<\theta_1^i(z)<\ldots<\theta_{p_i}^i(z)\le 1$ les p_i points de l'ensembles $\{x_1^i,\ldots,x_q^i\}$ $(i=1,2)$. Il est facile de voir que les fonctions θ_j^i sont continues sur M_π, donc peuvent se prolonger en des fonctions continues, encore notées θ^i_j, sur $A'_k \setminus N_{r-1}$. Nous supposerons ces prolongements choisis de façon que, pour $i = 1, 2$, $0 < \theta^i_1(z) < \ldots < \theta^i_{p_i}(z) \leq 1$ pour tout $z \in A'_k \setminus N_{r-1}$, et nous poserons $\theta^i_0(z) = 0$, $\theta^i_{p_i+1}(z) = 1$ et $\xi^i_j(z) = \theta^i_{j+1}(z) - \theta^i_j(z)$ pour $0 \leq j \leq p_i$.

Pour $z \in A'_k \setminus N_{r-1}$, posons $\mu(z) = \inf\{\xi^i_j(z) \mid i = 1, 2,\ 0 \leq j \leq p_i - 1\}$. Pour $\eta > 0$, soit

$$V(\eta) = \{z \in M_\pi \mid \mu(z) < \eta\}.$$

Il est facile de voir que les ensembles $N_{r-1} \cup V(\eta)$, $\eta > 0$, forment une base de voisinages de N_{r-1} dans $N_{r-1} \cup M_\pi$.

Pour $z \in H$ et $0 < t \leq 1$, posons

$$\chi^1(z, t) = \int_0^1 (z(t, x))^2\, dx^2, \qquad \chi^2(z, t) = \int_0^1 (z(x^1, t))^2\, dx^1,$$

ce qui a un sens puisque nous identifions canoniquement z à une fonction combinaison linéaire de fonctions caractéristiques. Si $z \in M_\pi$ et $0 \leq j \leq p_1$, alors $\chi^1(z, t)$ est constante sur $]\theta^1_j(z), \theta^1_{j+1}(z)[$. Nous noterons $\chi^1_j(z)$ cette constante (en convenant que $\chi^1_{p_1+1}(z) = 0$ si $\theta^1_{p_1}(z) = \theta^1_{p_1+1}(z) = 1$). D'après le théorème de Fubini,

$$\|z\|^2 = \sum_{j=0}^{p_1} \xi^1_j(z)\chi^1_j(z).$$

Lemme 7. *Soient $z \in M_\pi$ et $0 < j < p_1$. Si $\chi^1_j(z) < 1/3$, alors $\chi^1_{j-1}(z) > 2/3$.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $z = \sum_{q=1}^m n_q x_q$ où les x_q sont des points distincts de $E \setminus D$ et les n_q des entiers non nuls, il y a un indice q_0 tel que $x_{q_0} = (\theta^1_j(z), 1)$. La fonction z est constante sur chaque domaine $]\theta^1_a(z), \theta^1_{a+1}(z)[\times]\theta^2_b(z), \theta^2_{b+1}(z)[$ $(0 \leq a \leq p_1,\ 0 \leq b \leq p_2)$; soit c_{ab} cette constante. Nous avons

$$\chi^1_j(z) = \sum_{b=0}^{p_2} \xi^2_b(z) c^2_{jb}.$$

Soit S l'ensemble des indices b tels que $c_{jb} = 0$. Puisque les c_{jb} sont des entiers, si $\chi^1_j(z) < 1/3$, alors $\sum_{b \in S} \xi^2_b(z) > 2/3$. Remarquons en outre que $c_{j-1,b} = c_{jb} + n_{q_0}$; puisque $n_{q_0} \neq 0$, les entiers c_{jb} et $c_{j-1,b}$ ne peuvent s'annuler en même temps, d'où

$$\chi^1_{j-1}(z) = \sum_{b=0}^{p_2} \xi^2_b(z) c^2_{j-1,b} \geq \sum_{b \in S} \xi^2_b(z) > 2/3.$$

Soit $L = p_1 + 1 + p_1^2 + p_2^2$. La fonction g sera construite en L étapes. Pour simplifier les notations, nous paramétrerons g par $[0, L]$ au lieu de I, et nous lui imposerons la condition suivante qui, avec (1), entraîne (4) :

(4′) Pour tout entier $a < L$,

$$\|g(z, a+s) - g(z, a)\| < \varepsilon/L \qquad \forall (z, s) \in M_\pi \times I.$$

La condition (1) définit $g(z,t)$ pour $t = 0$ ou $z \in N_{r-1}$. Nous construirons, pour tout entier $a < L$, un entier $i_a = 1$ ou 2, une fonction continue $\lambda_a : A'_k \setminus N_{r-1} \to I$ et une fonction continue $v^a : (A'_k \setminus N_{r-1}) \times I \to \mathcal{U}$, et noud définirons $u^a : (A'_k \setminus N_{r-1}) \times I \to \mathcal{U}$ par $u^a(z,s) = v^a(z, \lambda_a(z)s)$. La restriction de g à $(A'_k \setminus N_{r-1}) \times [a, a+1]$ sera alors définie par

$$g(z, a+s) = \overline{\alpha}_{i_a}(u^a(z,s))(g(z,a)), \qquad 0 \le s \le 1.$$

La condition (2) résultera de la continuité de $\overline{\alpha}_i(u)(z)$ sur $\mathcal{U} \times A'_k$. En même temps, nous définirons inductivement des fonctions continues $\widetilde{\theta}^i_j$: $(A'_k \setminus N_{r-1}) \times [0, L] \to I$ $(i = 1, 2,\ 0 \le j \le p_i + 1)$ comme suit : $\widetilde{\theta}^i_j(z, 0) = \theta^i_j(z)$ et pour a entier $< L$ et $0 \le s \le 1$,

$$\widetilde{\theta}^i_j(z, a+s) = \begin{cases} \alpha(u^a(z,s))(\widetilde{\theta}^i_j(z,a)) & \text{si } i = i_a, \\ \widetilde{\theta}^i_j(z,a) & \text{si } i \ne i_a. \end{cases}$$

Alors, pour tout point $z = \sum_{q=1}^m n_q x_q \in M_\pi$, $g(z,t)$ sera de la forme $\sum_{q=1}^m n_q x_q(t)$ (les $x_q(t)$ n'étant pas nécessairement distincts et pouvant appartenir à D) et nous aurons $\{x^i_1(t), \dots, x^i_m(t)\} = \{\widetilde{\theta}^i_1(z,t), \dots, \widetilde{\theta}^i_{p_i}(z,t)\}$. Nous poserons

$$\widetilde{\xi}^i_j(z,t) = \widetilde{\theta}^i_{j+1}(z,t) - \widetilde{\theta}^i_j(z,t),$$
$$\widetilde{\mu}(z,t) = \inf\{\widetilde{\xi}^i_j(z,t) \mid i = 1, 2,\ 0 \le j \le p_i - 1\}.$$

Soit $\delta = \varepsilon^2/(2k^2L^2)$. Pour $z \in M_\pi$, soit $J(z) = \{j \in \{0, \dots, p_1\} \mid \xi^1_j(z) \ge 2\delta\}$. Puisque $(p_1+1)\delta = (p_1+1)\varepsilon^2/(2k^2L^2) < 1/8$, $J(z) \ne \emptyset$, donc nous pouvons poser $\varrho(z) = \inf\{\chi^1_j(z) \mid j \in J(z)\}$. Pour $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$, nous avons

$$\begin{aligned} 1/4 \ge \|z\|^2 &\ge \sum_{j \in J(z)} \xi^1_j(z)\chi^1_j(z) \ge \varrho(z) \sum_{j \in J(z)} \xi^1_j(z) = \varrho(z)\Big(1 - \sum_{j \notin J(z)} \xi^1_j(z)\Big) \\ &\ge \varrho(z)(1 - (p_1+1)2\delta) > 3\varrho(z)/4, \end{aligned}$$

ce qui donne $\varrho(z) < 1/3$ pour $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$.

Pour $0 \le j \le p_1$, soit $F_j = \{z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2) \mid j \in J(z) \text{ et } \chi^1_j(z) = \varrho(z)\}$. Les ensembles F_j sont fermés dans M_π, recouvrent $M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ et, d'après le lemme 7, $F_j \cap F_{j'} = \emptyset$ si $|j - j'| = 1$. Nous pouvons donc trouver des ensembles G_j ouverts dans $A'_k \setminus N_{r-1}$ tels que $F_j \subset G_j$ pour tout j, $G_j \cap G_{j'} = \emptyset$ si $|j - j'| = 1$ et que $\xi^1_j(z) > \frac{3}{2}\delta$ pour tout $z \in G_j$.

Pour $0 \leq a \leq p_1$, nous poserons $i_a = 1$, et nous construirons g sur $(A'_k \setminus N_{r-1}) \times [0, p_1 + 1]$ de façon à vérifier les conditions suivantes :

(8) $g(M_\pi \times \{t\}) \subset M_\pi$ pour $0 \leq t \leq p_1 + 1$,

(9) $g(V(\delta) \times \{t\}) \subset V(\delta)$ pour $0 \leq t \leq p_1 + 1$,

(10) si $z \in V(\delta/2)$, alors $g(z, t) = z$ pour $0 \leq t \leq p_1 + 1$,

(11) si $z \in F_j$, $0 \leq j \leq p_1$, alors $g(z, t) \in V(\delta)$ pour $j + 1 \leq t \leq p_1 + 1$.

Pour cela, nous choisirons la fonction λ_a de façon qu'elle s'annule sur $[A'_k \setminus (N_{r-1} \cup G_a)] \cup V(\delta/2)$ et soit égale à un sur $F_a \cap (M_\pi \setminus V(\delta))$, et nous définirons inductivement $v^a(z, s) = \{v^a_w(z, s)\}_{w=0}^5$ comme suit, pour $z \in A'_k \setminus N_{r-1}$ et $0 \leq s \leq 1$:

$$
\begin{aligned}
&v^0_0(z, s) = 0, \qquad v^a_0(z, s) = \widetilde{\theta}^1_{a-1}(z, a) \quad \text{si } a \geq 1,\\
&v^0_1(z, s) = \theta^1_1(z), \quad v^a_1(z, s) = \widetilde{\theta}^1_a(z, a) \qquad \text{si } a \geq 1,\\
&v^0_2(z, s) = \max(\theta^1_1(z), (1 - s)\theta^1_1(z) + s(\theta^1_2(z) - \delta)),\\
&v^a_2(z, s) = \min(\widetilde{\theta}^1_a(z, a), (1 - s)\widetilde{\theta}^1_a(z, a) + s(\widetilde{\theta}^1_{a-1}(z, a) + \delta)) \quad \text{si } a \geq 1,\\
&v^0_m(z, s) = \theta^1_2(z), \quad v^a_m(z, s) = \theta^1_{a+1}(z) \quad \text{si } a \geq 1 \text{ pour } m = 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

Quels que soient z et s, $\alpha_1(u^a(z, s))$ est un homéomorphisme de (E, D) sur (E, D), ce qui entraîne (8). Pour obtenir (9), il suffit de montrer que si $z \in V(\delta)$ et si i, j sont tels que $\xi^i_j(z) \leq \delta$, alors $\widetilde{\xi}^i_j(z, t) \leq \xi^i_j(z)$ pour $0 \leq t \leq p_1 + 1$. Soit $0 \leq a \leq p_1$, et supposons cela vrai pour $0 \leq t \leq a$. Par construction de $u^a(z, s)$, nous avons, pour $0 \leq s \leq 1$, $\widetilde{\xi}^i_j(z, a+s) \leq \widetilde{\xi}^i_j(z, a)$ si $(i, j) \neq (1, a)$, et si $(i, j) = (1, a)$, alors $\widetilde{\xi}^i_j(z, a + s) = \widetilde{\xi}^i_j(z, a)$ car sinon nous aurions $u^a_2(z, s) \neq u^a_1(z, s)$, donc $\lambda_a(z) \neq 0$; alors z appartiendrait à G_a, donc vérifierait $\xi^1_a(z) > \frac{3}{2}\delta$, ce qui est absurde, donc (9) est encore vérifiée pour $a \leq t \leq a + 1$.

Si $z \in V(\delta/2)$, alors $\lambda_a(z) = 0$ pour tout a, ce qui entraîne (10). Compte tenu de (9), il suffit de vérifier (11) quand $z \in F_j \setminus V(\delta)$. Alors $\lambda_j(z) = 1$. Si $j = 0$, la définition de u^0 montre que $\widetilde{\xi}^1_1(z, 1) = \delta$. Puisque $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, nous avons $g(z, t) = g(z, 1)$ pour $1 \leq t \leq 2$. La définition de u^j pour $j > 2$ montre alors que $\widetilde{\theta}^1_1(z, t) = \widetilde{\theta}^1_1(z, 2)$ et $\widetilde{\theta}^1_2(z, t) \leq \widetilde{\theta}^1_2(z, 2)$ pour $t \geq 2$, d'où $\widetilde{\xi}^1_1(z, t) \leq \widetilde{\xi}^1_1(z, 1)$ pour $t \geq 1$. Si $j \geq 1$, alors $\widetilde{\xi}_{j-1}(z, j + 1) = \delta$ et, pour $t \geq j + 1$, $\widetilde{\theta}^1_{j-1}(z, t) = \widetilde{\theta}^1_{j-1}(z, j + 1)$ et $\widetilde{\theta}^1_j(z, t) = \widetilde{\theta}^1_j(z, j + 1)$, d'où $\widetilde{\xi}^1_j(z, t) = \widetilde{\xi}^1_j(z, j + 1)$, ce qui donne (11).

Puisque $N_{r-1} \cup V(\delta/2)$ est un voisinage de N_{r-1} dans $N_{r-1} \cup M_\pi$, (10) garantit que g est continue sur $(N_{r-1} \cup M_\pi) \times [0, p_1 + 1]$. Il ne reste plus qu'à choisir λ_a de façon que $(4')$ soit vérifiée. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\|\overline{\alpha}_1(v^a(z,s)(g(z,a))\| < \|g(z,a)\| + \varepsilon/L \quad \text{pour } z \in F_a \text{ et } 0 \le s \le 1,$$

car on pourra alors trouver un voisinage G'_a de F_a contenu dans G_a tel que cette inégalité soit vérifiée pour $z \in G'_a$ et $0 \le s \le 1$, et il suffira de prendre λ_a nulle hors de G'_a. Remarquons que, puisque nous ne touchons pas la deuxième coordonnée, nous avons, pour $z \in M_\pi$, $0 \le j \le p_1$ et $0 \le t \le p_1 + p_1^2 + 1$, $\chi_j^1(g(z,t)) = \chi_j^1(z)$. Pour $z \in F_a$, les fonctions $g(z,a)$ et $g(z,a+s) = \overline{\alpha}_1(v^a(z,s))(g(z,a))$ ne diffèrent que sur une bande $[\alpha,\beta] \times I$ où $[\alpha,\beta]$ est contenu dans un intervalle $[\widetilde{\theta}_j^1(z,a), \widetilde{\theta}_{j+1}^1(z,a)]$ avec $|j-a| = 1$. Pour $y \in]\alpha,\beta[$, $\chi_j^1(g(z,a),y) = \chi_j^1(z)$ et $\chi^1(g(z,a+s),y) = \chi_a^1(z) = \varrho(z) < 1/3$. D'après le lemme 7, $\chi_j^1(z) > 2/3$, d'où $\|g(z,a+s)\|^2 - \|g(z,a)\|^2 = |\alpha-\beta|(\varrho(z) - \chi_j^1(z)) \le 0$.

Pour $z \in M_\pi$, posons $\mu_0(z) = \widetilde{\mu}(z, p_1+1)$. Il résulte de (11) que $\mu_0 \le \delta$ si $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$. Nous construirons $g|(A'_k \setminus N_{r-1}) \times [p_1+1, L]$ de façon qu'elle vérifie

(12) $|\widetilde{\theta}_j^i(z,a+s) - \widetilde{\theta}_j^i(z,a)| \le \mu_0(z)$ pour $z \in M_\pi$, $p_1 + 1 \le a \le L-1$ et $0 \le s \le 1$,

(13) pour $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$, $\widetilde{\xi}_j^i(z,L) = 0$ pour tout couple (i,j) tel que $\widetilde{\xi}_j^i(z,p_1+1) = \mu_0(z)$.

Evidemment, (13) entraîne (5). La condition (12) entraîne la continuité de g sur $(N_{r-1} \cup M_\pi) \times [p_1+1, L]$. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que si $\{(z_l,t_l)\}_{l=1}^\infty$ est une suite de points de $M_\pi \times [p_1+1, L]$ convergeant vers $(z_0,t_0) \in N_{r-1} \times [p_1+1, L]$, alors cette suite a une sous-suite dont l'image par g converge vers z_0.

Soit $z_l = \sum_{q=1}^{m(l)} n_q(l) x_q(l)$. Puisque $m(l)$ et les $|n(l)|$ sont majorés par k, nous pouvons, quitte à passer à une sous-suite, supposer que $m(l) = m$ et $n_q(l) = n_q$ ne dépendent pas de l et que, pour tout q, la suite $\{x_q(l)\}$ converge vers un point x_q de E. Alors $z_0 = \sum_{q=1}^m n_q x_q$. Comme chaque $x_q(l)$ est de la forme $(\theta_{j_1}^1(z_l), \theta_{j_2}^2(z_l))$ avec $1 \le j_i \le p_i$, nous pouvons supposer que $x_q(l) = (\theta_{j_1}^1(q)(z_l), \theta_{j_2}^2(q)(z_l))$ où $j_i(q)$ ne dépend pas de l, et que les suites $\{(\theta_{j_i(q)}^i(z_l)\}_{l=1}^\infty$ ont des limites $\theta_{j_i(q)}^i$; alors $x_q = (\theta_{j_1(q)}^1, \theta_{j_2(q)}^2)$. Par construction de g, $g(z_l,t_l) = \sum_{q=1}^m n_q x_q(l,t_l)$ où $x_q(l,t_l) = (\widetilde{\theta}_{j_1(q)}^1(z_l,t_l), \widetilde{\theta}_{j_2(q)}^2(z_l,t_l))$. Puisque $\{z_l\}$ tend vers $z_0 \in N_{r-1}$, $\{\mu(z_l)\}$ tend vers zéro. D'après (10), pour l assez grand, $g(z_l,t) = z_l$ pour $0 \le t \le p_1+1$, donc $\widetilde{\theta}_j^i(z_l,t) = \theta_j^i(z_l)$ quels que soient i et j et $\mu_0(z_l) = \mu(z_l)$. Alors, (12) implique que $\{|\widetilde{\theta}_j^i(z_l,t_l) - \theta_j^i(z_l)|\}$ tend vers zéro, donc $\{\widetilde{\theta}_j^i(z_l,t_l)\}$ a la même limite que $\{\theta_j^i(z_l)\}$, ce qui entraîne que $\{x_q(l,t_l)\}$ a la même limite que $\{x_q(l)\}$, donc que $\{g(z_l,t_l)\}$ tend vers $\sum_{q=1}^m n_q x_q = z_0$.

Soit $\mathcal{T}_1$ l'ensemble des couples ordonnés $\tau = (j_1,j_2)$ d'entiers distincts vérifiant $0 \le j_1 \le p_1 - 1$ et $0 \le j_2 \le p_1$. $\mathcal{T}_1$ contient p_1^2 éléments. Soit

$\tau \rightsquigarrow a_\tau$ une bijection de $\mathcal{T}_1$ sur $\{p_1+1,\ldots,p_1+p_1^2\}$. Pour $\tau=(j_1,j_2)\in\mathcal{T}_1$, posons

$$K_\tau=\{z\in M_\pi\cap\overline{B}(1/2)\mid \widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,p_1+1)=\mu_0(z) \text{ et } \widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,p_1+1)\geq 2\delta\},$$
$$Q_\tau=\{z\in M_\pi\cap\overline{B}(1/2)\mid \widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,p_1+1)\leq 3\delta/2\}.$$

Les ensembles K_τ et Q_τ sont disjoints et fermés dans M_π. Notons que si $z\in M_\pi\cap\overline{B}(1/2)$ et s'il existe $j_1<p_1$ tel que $\mu_0(z)=\widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,p_1+1)$, alors il existe $\tau\in\mathcal{T}_1$ tel que K_τ contienne z. En effet, comme $(p_1+1)2\delta<1$, il existe j_2 tel que $\widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,p_1+1)\geq 2\delta$, donc $z\in K_\tau$ avec $\tau=(j_1,j_2)$.

Pour $p_1+1\leq a\leq p_1+p_1^2$, nous poserons $i_a=1$ et si $a=a_\tau$ avec $\tau=(j_1,j_2)$, nous prendrons λ_a telle que $\lambda_a^{-1}(1)=K_\tau$ et que $\lambda_a(z)=0$ si $z\in Q_\tau$ et nous définirons $v^a(z,s)=\{v^a_w(z,s)\}_{w=0}^5$ comme suit :

(a) si $j_1<j_2$, alors

$$\begin{aligned}
v^a_0(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1}(z,a),\\
v^a_1(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1+1}(z,a),\\
v^a_2(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1+1}(z,a)-s\gamma_a(z)\min(\mu_0(z),\widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,a)),\\
v^a_3(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_2}(z,a),\\
v^a_4(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_2}(z,a)-s\gamma_a(z)\min(\mu_0(z),\widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,a)),\\
v^a_5(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1+1}(z,a),
\end{aligned}$$

(b) si $j_2<j_1$, alors

$$\begin{aligned}
v^a_0(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_2}(z,a),\\
v^a_1(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_2+1}(z,a),\\
v^a_2(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_2+1}(z,a)+s\gamma_a(z)\min(\mu_0(z),\widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,a)),\\
v^a_3(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1}(z,a),\\
v^a_4(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1}(z,a)+s\gamma_a(z)\min(\mu_0(z),\widetilde{\xi}^1_{j_1}(z,a)),\\
v^a_5(z,s)&=\widetilde{\theta}^1_{j_1+1}(z,a).
\end{aligned}$$

Dans ces formules, γ_a est une fonction continue de $A'_k\setminus N_{r-1}$ dans I égale à 1 sur K_τ et à zéro sur $R_a=\{z\in A'_k\setminus N_{r-1}\mid \widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,a)=0\}$, dont la présence est destinée à garantir que $v^a_0=v^a_2$ si $v^a_0=v^a_1$ et que $v^a_4=v^a_5$ si $v^a_3=v^a_5$. Pour qu'il existe une telle fonction, il faut que les fermés K_τ et R_a de $A'_k\setminus N_{r-1}$ soient disjoints. Mais si $z\in M_\pi$ et si $\widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,a)=0$, on déduit de (8), de la définition des $v^{a'}$ et du fait que $\lambda^{-1}_{a_{\tau'}}(1)=K_{\tau'}$ pour tout τ' qu'il existe un $\tau'=(j'_1,j'_2)$ tel que $j'_1=j_2$, $a_{\tau'}<a$ et $\lambda_{a_{\tau'}}(z)=1$, donc $z\in K_{\tau'}\subset M_\pi\cap\overline{B}(1/2)$, d'où $\widetilde{\xi}^1_{j_2}(z,p_1+1)=\mu_0(z)\leq\delta$, donc z n'appartient

pas à K_τ.

La condition (12) est évidemment vérifiée. Concernant (13), remarquons que si $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ et s'il existe $j_0 < p_1$ tel que $\mu_0(z) = \widetilde{\xi}^1_{j_0}(z)$, alors la fonction $t \rightsquigarrow \widetilde{\xi}^1_{j_0}(z,t)$ décroît sur $[p_1+1, p_1+p_1^2+1]$ et s'annule en $p_1+p_1^2+1$. En effet, si $a = a_\tau$ avec $\tau = (j_1, j_2)$, le seul intervalle $]\widetilde{\theta}^1_j(z,a), \widetilde{\theta}^1_{j+1}(z,a)[$ que $\alpha(u^a(z,s))$ peut allonger est celui d'indice j_2, mais cela n'arrive que si $\lambda_a(z) \neq 0$, donc si $\widetilde{\xi}^1_{j_2}(z, p_1+1) > 3\delta/2$; alors $j_2 \neq j_0$, car $\mu_0(z) \leq \delta$ d'après (11), donc la fonction décroît. Comme nous l'avons remarqué, il existe j tel que $\tau = (j_0, j) \in \mathcal{T}_1$. Mais alors $\gamma_{a_\tau}(z) = \lambda_{a_\tau}(z) = 1$ et, d'après le choix des v^a, $\widetilde{\xi}^1_{j_0}(z, a_\tau + 1) = 0 \geq \widetilde{\xi}^1_{j_2}(z, p_1 + p_1^2 + 1) \geq 0$.

Reste à choisir λ_a de façon à vérifier (4′). Pour cela, prenant d'abord λ_a arbitrairement, il suffit de montrer que

$$\|g(z, a+s)\| < \|g(z,a)\| + \varepsilon/L \quad \text{pour } z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2) \text{ et } 0 \leq s \leq 1.$$

Cette inégalité sera alors vérifiée pour z dans un voisinage de $M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ et $0 \leq s \leq 1$, et il suffira de multiplier la fonction initiale par une fonction nulle hors de ce voisinage et égale à 1 sur $M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ pour obtenir la fonction λ_a cherchée. Remarquons que, pour $t \leq p_1 + p_1^2 + 1$, $z \in M_\pi$ et $\widetilde{\theta}^1_j(z,t) < y < \widetilde{\theta}^1_{j+1}(z,t)$, nous avons $\chi^1_j(g(z,t), y) = \chi^1_j(z)$, d'où, pour $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$, $p_1 + 1 \leq a \leq p_1 + p_1^2$ et $0 \leq s \leq 1$,

$$\|g(z,a)\|^2 = \sum_{j=0}^{p_1} \widetilde{\xi}^1_j(z,a)\chi^1_j(z), \qquad \|g(z,a+s)\|^2 = \sum_{j=0}^{p_1} \widetilde{\xi}^1_j(z,a+s)\chi^1_j(z).$$

D'après le choix de v^a, si $a = a_\tau$ avec $\tau = (j_1, j_2)$, alors $\widetilde{\xi}^1_j(z, a+s) = \widetilde{\xi}^1_j(z,a)$ pour $j \neq j_1, j_2$ et $|\widetilde{\xi}^1_j(z,a+s) - \widetilde{\xi}^1_j(z,a)| \leq \mu_0(z) \leq \delta$ si $j = j_1$ ou j_2. Comme $0 \leq \chi^1_j(z) \leq k^2$, il en résulte que

$$\|g(z,a+s)\|^2 \leq \|g(z,a)\|^2 + 2\delta k^2 = \|g(z,a)\|^2 + \varepsilon^2/L^2,$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Pour $p_1+p_1^2+1 \leq a \leq L-1$, nous posons $i_a = 2$ et procédons comme nous l'avons fait pour $p_1+1 \leq a \leq p_1+p_1^2$, mais en utilisant la deuxième variable, de façon que si $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ et si $j_0 < p_2$ est tel que $\mu_0(z) = \widetilde{\xi}^2_{j_0}(z, p_1+1)$, alors $\widetilde{\xi}^2_{j_0}(z, L) = 0$. Pendant ces opérations, les nombres $\widetilde{\xi}^1_j(z,t)$ ne varient plus, donc aussi $\widetilde{\xi}^1_j(z,L) = \widetilde{\xi}^1_j(z, p_1 + p_1^2 + 1) = 0$ si $z \in M_\pi \cap \overline{B}(1/2)$ et $\widetilde{\xi}^1_j(z, p_1+1) = \mu_0(z)$, d'où (13).

Ceci achève la démonstration du lemme 6.

Preuve de la proposition. (A) Il faut montrer que, pour $0 < \delta < 1/2$, $k \geq 1$ et $m \geq 0$, toute fonction continue f de S_m dans $B(\delta) \cap A'_k$ est inessentielle. Posant $\eta = \frac{1}{2}(\delta - \sup\{\|f(x)\| \mid x \in S^m\}) > 0$, il suffit pour cela de construire une homotopie $g : (B(\delta - \eta) \cap A'_k) \times I \to A'_k$ vérifiant

(1) $g(z,0) = z$,
(2) $\|g(z,t)\| \le \|z\| + \eta/2$,
(3) $g((B(\delta - \eta) \cap A'_k) \times \{1\}) = \{0\}$.

Pour cela, posons $\varepsilon = \eta/k$. Le lemme 6 nous fournit, pour $1 \le j \le k$, une homotopie $h_j^\varepsilon : A'_j \times I \to A'_j$ vérifiant

(i) $h_j^\varepsilon(z,0) = z$,
(ii) $\|h_j^\varepsilon(z,t)\| \le \|z\| + \varepsilon$,
(iii) $h_j^\varepsilon((B(\delta - \varepsilon) \cap A'_j) \times \{1\}) \subset A'_{j-1}$.

Il est alors facile de voir que l'on peut définir g par

$$g(z,0) = z,$$
$$g\left(z, \frac{i+t}{k}\right) = h_{k-i}^\varepsilon\left(g\left(z, \frac{i}{k}\right), t\right) \quad \text{pour } 0 \le i \le k-1 \text{ et } 0 \le t \le 1.$$

(B) Il suffit de montrer que, pour tout $z \in H$, il existe un chemin $\omega : I \to H$ tel que $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = z$ et $\|\omega(t)\| \le \|z\|$ pour tout t; cela peut se faire par récurrence sur le nombre $m(z) = m$ dans la représentation $z = \sum_{q=1}^m n_q x_q$ ($x_q = (x_q^1, x_q^2) \in E$). Si $m = 1$, $z = nx$ avec $x = (x_1, x_2)$. Si, par exemple, $x^2 = 1$, il suffit de prendre $\omega(t) = nx_t$ où $x_t = (tx_1, x_2)$.

Si $m(z) > 1$, soit q_0 tel que $x_{q_0} \ne (1,1)$; par exemple $x_{q_0}^1 < 1$. Pour $-x_{q_0}^1 \le t \le 1 - x_{q_0}^1$, soit $y(t) = (x_{q_0}^1 + t, x_{q_0}^2)$, et soit $z(t) = n_{q_0} y(t) + \sum_{q \ne q_0} n_q x_q$. Il est facile de voir que $\|z(t)\|^2$ est une fonction linéaire sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $]\alpha + x_{q_0}^1, \beta + x_{q_0}^1[$ ne contienne aucun des x_q^1 avec $q \ne q_0$. Se déplaçant vers la gauche ou la droite selon le cas, on peut donc relier, sans augmenter la norme, z à un point $z' = z(t_0)$ tel que ou bien $y(t_0) = 0$, ou bien $y(t_0) = x_q$ avec $q \ne q_0$, ou bien $y(t_0) = (1,1)$. Si $m(z') < m(z)$, l'hypothèse de récurrence s'applique. Si $m(z') = m(z)$, le même procédé, appliqué à z', permet de le relier, sans augmenter la norme, à un point z'' tel que $m(z'') < m(z')$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. D. Ancel, T. Dobrowolski and J. Grabowski, *Closed subgroups in Banach spaces*, Studia Math. 109 (1994), 277–290.

[2] T. Dobrowolski, *Examples of topological groups homeomorphic to l_2^f*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 303–311.

[3] A. Dold und R. Thom, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte*, Ann. of Math. 67 (1958), 239–281.

[4] S. Eilenberg and R. L. Wilder, *Uniform local connectedness and contractibility*, Amer. J. Math. 64 (1942), 613–622.

[5] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, 1965.
[6] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.
[7] J. West, *Open problems in infinite dimensional topology*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed (eds.), Elsevier, 1990, 524–597.

UFR 920
Université Paris VI
Boîte courrier 172
4, pl. Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

Received 12 June 1996;
revised 19 December 1997