COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 73 1997 NO. 1

UNIVERSALITÉ FORTE POUR LES SOUS-ENSEMBLES TOTALEMENT BORNÉS. APPLICATIONS AUX ESPACES $C_{\mathrm{p}}(X)$

PAR

TARAS BANAKH (LVIV) ET ROBERT CAUTY (PARIS)

1. Introduction. Cet article est consacré à la classification topologique des espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables et séparables de dimension infinie (que nous appellerons simplement *espaces localement convexes* dans la suite). Alors que deux espaces localement convexes complets sont toujours homéomorphes, la situation est beaucoup plus compliquée pour les espaces non complets : l'ensemble des types d'homéomorphisme des sous-espaces vectoriels σ-compacts de l^2 a la puissance du continu [4]. Dans ces conditions, la notion de "classification topologique" de ces espaces ne peut avoir qu'un sens restreint. Nous nous intéressons ici au problème suivant : deux espaces localement convexes sont-ils homéomorphes si chacun est homéomorphe à un fermé de l'autre? Les cas particuliers où une réponse affirmative à ce problème est déjà connue ont d'intéressantes applications, permettant entre autres de montrer que de vastes classes d'espaces sont homéomorphes à leurs carrés ou à leurs produits infinis (voir [5] et [6]).

Il paraît raisonnable de conjecturer que la réponse à ce problème est affirmative lorsque les deux espaces sont des Z_σ, i.e. des réunions dénombrables de Z-ensembles. On dispose alors pour l'attaquer de la puissante théorie des ensembles absorbants de M. Bestvina et J. Mogilski [3]. Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces métrisables séparables qui est topologique (si C est homéomorphe à $C' \in \mathcal{C}$, alors $C \in \mathcal{C}$) et héréditaire pour les fermés (tout fermé d'un espace appartenant à $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$). Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 3.1 de [3].

1.1. THÉORÈME. *Supposons que deux espaces localement convexes E_1 et E_2 vérifient les conditions suivantes* ($i = 1, 2$) :

(1) *E_i est réunion dénombrable de Z-ensembles*,

(2) *E_i est réunion dénombrable de fermés appartenant à $\mathcal{C}$*,

(3) *E_i est fortement $\mathcal{C}$-universel.*

Alors E_1 et E_2 sont homéomorphes.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 57N17, 54C35.

En outre, d'après la proposition 2.3 de [3], E_i est alors fortement universel pour la classe σ-$\mathcal{C}$ des espaces qui sont réunion dénombrable de fermés appartenant à $\mathcal{C}$, et cette classe σ-$\mathcal{C}$ coïncide avec la classe $\mathcal{F}_0(E_i)$ des espaces homéomorphes à des fermés de E_i. Le problème est donc ramené, pour les espaces localement convexes E qui sont des Z_σ, à la vérification de la $\mathcal{F}_0(E)$-universalité forte de E, ou même simplement, de la $\mathcal{C}$-universalité forte de E pour une classe $\mathcal{C}$ telle que σ-$\mathcal{C} = \mathcal{F}_0(E)$.

Nous prouverons ici que tout espace localement convexe E est fortement universel pour la classe $\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E)$ des espaces homéomorphes à des sous-ensembles fermés totalement bornés de E, ce qui nous fournira une réponse affirmative au problème dans le cas des espaces localement convexes E tels que σ-$\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E) = \mathcal{F}_0(E)$ (et qui sont des Z_σ). La classe $\mathcal{E}$ des espaces localement convexes E tels que σ-$\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E) = \mathcal{F}_0(E)$ contient évidemment tous les espaces qui sont réunion dénombrable de sous-ensembles totalement bornés (ou, ce qui revient au même, sont contenus dans un sous-ensemble σ-compact de leur complété), mais elle contient aussi d'autres espaces. En effet, de résultats récemment obtenus par les auteurs découle l'existence de classes $\mathcal{C}$ telles que tout espace localement convexe $\mathcal{C}$-universel E contienne des copies fermées totalement bornées de chaque espace $C \in \mathcal{C}$ (E est dit *$\mathcal{C}$-universel* si tout espace appartenant à $\mathcal{C}$ est homéomorphe à un fermé de E). Pour une telle classe $\mathcal{C}$, tout espace localement convexe $\mathcal{C}$-universel appartenant à σ-$\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{E}$. Parmi les classes $\mathcal{C}$ ayant cette propriété figurent toutes les classes boréliennes $\mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha \ge 1$) et $\mathcal{M}_\alpha$ ($\alpha \ge 2$), donc tout espace localement convexe qui est un Z_σ, appartient à $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \ge 1$ (resp. $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha \ge 2$) et est $\mathcal{A}_\alpha$-universel (resp. $\mathcal{M}_\alpha$-universel) est homéomorphe à l'espace Λ_α (resp. Ω_α) de [3].

Dans la dernière section, nous appliquerons ces résultats aux espaces de fonctions $C_{\mathrm{p}}(X)$ et $C^*_{\mathrm{p}}(X)$.

Rappelons qu'un fermé A d'un espace localement convexe E est appelé un *Z-ensemble* dans E si, pour tout compact K, toute fonction continue de K dans E peut être arbitrairement approximée par des fonctions continues de K dans $E\backslash A$. Il est connu que tout compact d'un espace localement convexe est un Z-ensemble (c'est un cas particulier du corollaire 1.8 de [3]). Un *Z-plongement* de X dans E est un plongement dont l'image est un Z-ensemble.

Soient E un espace localement convexe, F un sous-espace de E et (K, C) un couple d'espaces (i.e. $C \subset K$). L'espace E (resp. le couple (E, F)) est dit *fortement K-universel* (resp. *fortement (K, C)-universel*) si, pour tout fermé D de K, toute fonction continue f de K dans E telle que $f|D$ soit un Z-plongement (vérifiant $(f|D)^{-1}(F) = D \cap C$) et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de E, il existe un Z-plongement g de K dans E prolongeant $f|D$ (et tel que $g^{-1}(F) = C$) qui est $\mathcal{U}$-proche de f (i.e., pour tout $x \in K$, $\{f(x), g(x)\}$

est contenu dans un élément de $\mathcal{U}$). Si $\mathcal{C}$ est une classe d'espaces, E est dit *fortement* $\mathcal{C}$*-universel* s'il est fortement C-universel pour tout $C \in \mathcal{C}$.

2. L'universalité forte pour les fermés précompacts. Premières applications. T. Dobrowolski a prouvé dans [8] que tout espace localement convexe est fortement universel pour la classe de ses sous-ensembles compacts. Le théorème suivant généralise ce résultat.

2.1. THÉORÈME. *Soit E un espace métrique linéaire séparable localement convexe de dimension infinie. Alors*

(1) *E est fortement $\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E)$-universel,*

(2) *si E est un Z_σ, il est fortement σ-$\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E)$-universel.*

Démonstration. (2) résulte de (1) et de la proposition 2.3 de [3]; (1) découle des deux lemmes suivants, dont le premier est un cas particulier d'un résultat de [1].

2.2. LEMME. *Soient $\widetilde{E}$ un espace localement convexe et E un sous-espace vectoriel partout dense de $\widetilde{E}$. Pour tout couple d'espaces (K, C), la (K, C)-universalité forte de $(\widetilde{E}, E)$ entraîne la C-universalité forte de E.*

2.3. LEMME. *Soient $\widetilde{E}$ un espace localement convexe et E un sous-espace vectoriel partout dense de $\widetilde{E}$. Pour tout compact A de $\widetilde{E}$, le couple $(\widetilde{E}, E)$ est fortement $(A, A \cap E)$-universel.*

Démonstration. Fixons une distance invariante d sur $\widetilde{E}$. Soient A un compact de $\widetilde{E}$, B un fermé de A et $g : A \to \widetilde{E}$ une fonction continue telle que $g|B$ soit un Z-plongement vérifiant $(g|B)^{-1}(E) = B \cap E$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il nous faut trouver un Z-plongement $h : A \to \widetilde{E}$ tel que $h|B = g|B$, $h^{-1}(E) = A \cap E$ et $d(g, h) = \sup\{d(g(a), h(a)) : a \in A\} < \varepsilon$.

Quitte à remplacer A par un translaté $A + x_0$ avec $x_0 \in E$, nous pouvons supposer que $A \cap g(A) = \emptyset$. Soit $H(\widetilde{E}|E)$ l'ensemble des homéomorphismes h de $\widetilde{E}$ sur lui-même tels que $h(E') = E'$ pour tout sous-espace vectoriel E' vérifiant $E \subset E' \subset \widetilde{E}$.

Nous suivons la démonstration du lemme 4.3 de [8]. Ecrivons $A \backslash B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, où $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ sont des compacts. Nous construirons une suite $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ d'éléments de $H(\widetilde{E}|E)$ vérifiant, pour $n \geq 0$,

(1) $d(g, h_0|A) < \varepsilon/8$,

(2) $d(h_n, h_{n+1}) < 2^{-(n+2)}\varepsilon$,

(3) $h_n|g(A) = \mathrm{id}$,

(4) $h_{n+1}|A_n = h_n|A_n$,

(5) $d(h_n|B, g|B) < 2^{-(n+3)}\varepsilon$.

Pour obtenir h_0 vérifiant (1) et (3), il suffit d'utiliser la proposition 2.6 de [8] avec $K = A$, $L = g(A)$, $f = g$ et $\varepsilon/8$. Si h_n est déjà construit, la proposition 2.6 de [8], appliquée à $K = h_n(B)$, $L = h_n(A_n) \cup g(A)$ et $f = g \circ h_n^{-1}|K$, nous fournit $h' \in H(\widetilde{E}|E)$ tel que $d(f, h'|K) < 2^{-(n+4)}\varepsilon$, $d(h', \mathrm{id}) < d(f, \mathrm{id}) + 2^{-(n+4)}\varepsilon$ et $h'|L = \mathrm{id}$. Alors, $h_{n+1} = h' \circ h_n$ vérifie (2)–(5) (pour (2), noter que $d(f, \mathrm{id}) = d(g|B, h_n|B)$).

Soit $h(a) = \lim_{n\to\infty} h_n(a)$. Les conditions (1)–(5) impliquent que h est un plongement de A dans $\widetilde{E}$ tel que $h|B = g|B$ et $d(g, h) < \varepsilon$. Puisque les h_n appartiennent à $H(\widetilde{E}|E)$, nous avons $h^{-1}(E) \cap (A\backslash B) = E \cap (A\backslash B)$, d'où $h^{-1}(E) = A \cap E$. Comme tout compact d'un espace localement convexe de dimension infinie est un Z-ensemble, h est un Z-plongement. ■

2.4. Remarque. Le plongement h construit dans la démonstration précédente vérifie $h^{-1}(E')\backslash B = E' \cap (A\backslash B)$ pour tout sous-espace vectoriel E' tel que $E \subset E' \subset \widetilde{E}$. Cela permet d'étendre le théorème 2.1 à des "systèmes" plus généraux.

2.5. COROLLAIRE. *Soient E_1, E_2 deux espaces localement convexes qui sont des Z_σ. Si $E_1 \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_2)$ et $E_2 \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_1)$, alors E_1 et E_2 sont homéomorphes.*

Démonstration. Si $E_1 \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_2)$, alors $\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_1) \subset \mathcal{F}_0(E_1) \subset \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_2)$, donc nous avons $\sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_1) = \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_2)$. D'après le théorème 2.1 et la proposition 2.3 de [3], E_1 et E_2 sont fortement $\sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_1)$-universels, et le corollaire résulte du théorème 1.1.

2.6. Remarque. La condition suffisante d'homéomorphie du corollaire 2.5 n'est pas nécessaire. En effet, plongeons le cube de Hilbert $Q = [0,1]^\omega$ comme sous-ensemble linéairement indépendant dans l'espace de Hilbert l^2, et soient $E(Q)$ et $E(s)$ les sous-espaces vectoriels de l^2 engendrés par Q et $s =]0,1[^\omega$ respectivement. Il résulte de [5] et [10] que $E_1 = E(s)$ est homéomorphe à $E_2 = E(Q) \times l^2$, mais $E_1 \notin \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E_2)$ car tout fermé totalement borné de E_2 est σ-compact et E_1 n'est pas σ-compact.

Nous dirons qu'un espace localement convexe est *σ-précompact* s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles totalement bornés. Remarquons qu'un fermé totalement borné X d'un espace localement convexe E est un Z-ensemble (cela résulte des deux faits suivants : 1) la fermeture A de X dans le complété $\widetilde{E}$ de E est compacte, donc est un Z-ensemble dans $\widetilde{E}$, et 2) toute function continue d'un compact K dans $\widetilde{E}\backslash A$ peut être approximée uniformément par des fonctions continues de K dans $E\backslash A$). Le corollaire suivant est donc un cas particulier du corollaire 2.5.

2.7. Corollaire. *Deux espaces localement convexes σ-précompacts sont homéomorphes si, et seulement si, chacun est homéomorphe à un fermé de l'autre.*

C. Bessaga et T. Dobrowolski ont prouvé dans [2] que tout espace localement convexe σ-compact est homéomorphe à un espace préhilbertien. Le corollaire précédent permet d'étendre leur argument aux espaces σ-précompacts. Notons que W. Marciszewski a récemment construit un exemple d'espace normé qui n'est pas homéomorphe à un espace préhilbertien [12].

2.8. Corollaire. *Tout espace localement convexe σ-précompact est homéomorphe à un espace préhilbertien.*

Démonstration. Nous suivons l'argument de [2]. Soient E un espace localement convexe σ-précompact et $\widetilde{E}$ son complété. E est contenu dans un ensemble σ-compact $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \widetilde{E}$ où $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ sont des compacts. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de formes linéaires continues sur $\widetilde{E}$ séparant les points de A et choisies de façon que $\sup\{|f_n(a)| : a \in A_n\} \le 1/n$ pour tout n. Définissons une fonction $T : A \to l^2$ par $T(a) = (f_n(a))_{n=1}^{\infty}$. Alors, $T(E)$ est un sous-espace vectoriel de l^2. Puisque A_n est compact, $T|A_n$ est un plongement, donc $A_n \cap E$ et $T(A_n \cap E) = T(A_n) \cap T(E)$ sont homéomorphes et sont des fermés totalement bornés de E et $T(E)$ respectivement, ce qui entraîne que $E \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(T(E))$ et $T(E) \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_{\mathrm{tb}}(E)$. D'après le corollaire 2.7, E et $T(E)$ sont homéomorphes. ∎

Considérons les conditions suivantes, relatives à une classe topologique $\mathcal{C}$ d'espaces :

(A) $C \in \mathcal{C}$ entraîne $C \times 2^{\omega} \in \mathcal{C}$ (2^{ω} est l'ensemble de Cantor);

(B) Soient K un compact et A, C des sous-ensembles de K. Si K et C appartiennent à $\mathcal{C}$ et si A est σ-compact, alors $A \cup C \in \mathcal{C}$;

(C) Pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe un compact $K \in \mathcal{C}$ qui contient C.

Le lemme suivant est un cas particulier de résultats obtenus récemment par les auteurs [1].

2.9. Lemme. *Soient E un espace localement convexe, $\widetilde{E}$ son complété et $\mathcal{C}$ une classe d'espaces vérifiant* (A) *et* (B). *Si E contient un sous-ensemble $\mathcal{C}$-universel de type G_δ, alors, pour tout couple (K, C) où K est compact et K, C appartiennent à $\mathcal{C}$, il y a un plongement f de K dans $\widetilde{E}$ tel que $f^{-1}(E) = C$.*

Le corollaire suivant résulte du lemme 2.9 et du théorème 2.1.

2.10. Corollaire. *Soient E un espace localement convexe et $\mathcal{C}$ une classe vérifiant* (A)–(C). *Si E contient un G_δ $\mathcal{C}$-universel, alors E est fortement $\mathcal{C}$-universel.*

Parmi les classes $\mathcal{C}$ vérifiant (A)–(C) figurent toutes les classes boréliennes $\mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha \geq 1$) et $\mathcal{M}_\alpha$ ($\alpha \geq 2$), donc ce corollaire contient la réponse affirmative à la question 6.5 de [11].

3. Applications aux espaces de fonctions. Dans cette section, X est un espace régulier dénombrable non discret. Nous notons $C_{\mathrm{p}}(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X avec la topologie de la convergence simple, et $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ le sous-espace de $C_{\mathrm{p}}(X)$ formé des fonctions bornées. Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}$ (qui sera toujours supposé contenir les complémentaires des ensembles finis), soit $\mathbb{N}_{\mathcal{F}}$ l'espace qui est la réunion de l'ensemble discret $\mathbb{N}$ et d'un point $\infty \notin \mathbb{N}$ dont les voisinages sont les ensembles $A \cup \{\infty\}$ avec $A \in \mathcal{F}$. If est connu que $C_{\mathrm{p}}(\mathbb{N}_{\mathcal{F}})$ (resp. $C_{\mathrm{p}}^*(\mathbb{N}_{\mathcal{F}})$) est topologiquement isomorphe à son sous-espace $c_{\mathcal{F}}$ (resp. $c_{\mathcal{F}}^*$) formé des fonctions s'annulant en ∞.

Les résultats de cette section sont basés sur la remarque suivante.

3.1. LEMME. *Pour tout espace régulier dénombrable*,

$$\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X)) \subset \mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}^*(X)) \subset \sigma\text{-}\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X)).$$

Avant de prouver ce lemme, donnons-en quelques conséquences intéressantes. Il est prouvé dans [6] que $C_{\mathrm{p}}(X)$ est fortement $\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X))$-universel. Puisque $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ est contenu dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}^X$ formé des fonctions bornées, il est σ-précompact, donc le théorème 2.1 entraîne que $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ est fortement $\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}^*(X))$-universel. Le théorème 1.1 entraîne alors immédiatement le suivant

3.2. THÉORÈME. *Les espaces $C_{\mathrm{p}}(X)$ et $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ sont homéomorphes si, et seulement si, $C_{\mathrm{p}}(X)$ est un Z_σ.*

D'après le corollaire 3.6 de [9], $C_{\mathrm{p}}(X)$ est un Z_σ s'il est analytique, d'où

3.3. COROLLAIRE. *Si $C_{\mathrm{p}}(X)$ est analytique, il est homéomorphe à $C_{\mathrm{p}}^*(X)$.*

D'autre part, la remarque 4.13 de [6] peut se reformuler comme suit :

3.4. COROLLAIRE. *Pour un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *$c_{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à $c_{\mathcal{F}}^*$*,
(2) *$c_{\mathcal{F}}$ est de première catégorie*,
(3) *$\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de première catégorie de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

Soit σ le sous-espace de $\mathbb{R}^\omega$ formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. L'espace $C_{\mathrm{p}}(X) \times \sigma$ est réunion dénombrable de fermés de la forme $C_{\mathrm{p}}(X) \times [0,1]^n$. Comme $C_{\mathrm{p}}(X)$ est toujours homéomorphe à $C_{\mathrm{p}}(X) \times \mathbb{R}$ (et même à $C_{\mathrm{p}}(X) \times \mathbb{R}^\omega$ si X n'est pas compact, voir [6]), les ensembles $C_{\mathrm{p}}(X) \times [0,1]^n$ appartiennent à $\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X))$, donc $C_{\mathrm{p}}(X) \times \sigma \in \sigma\text{-}\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X))$. Puisque σ est un Z_σ, il en est de même de $C_{\mathrm{p}}(X) \times \sigma$. Puisque $C_{\mathrm{p}}(X)$ est fortement $\mathcal{F}_0(C_{\mathrm{p}}(X))$-universel, il en est de même de $C_{\mathrm{p}}(X) \times \sigma$ d'après la proposition 2.6 de [3]. Le lemme 3.1 et le théorème 1.1 nous permettent maintenant d'affirmer

3.5. Théorème. *Les espaces $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ et $C_{\mathrm{p}}(X) \times \sigma$ sont homéomorphes.*

3.6. Corollaire. *Soient X, Y des espaces réguliers dénombrables. Si les espaces $C_{\mathrm{p}}(X)$ et $C_{\mathrm{p}}(Y)$ sont homéomorphes, alors les espaces $C_{\mathrm{p}}^*(X)$ et $C_{\mathrm{p}}^*(Y)$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Si X est discret, alors $C_{\mathrm{p}}(X) = \mathbb{R}^X$ est complet. Si $C_{\mathrm{p}}(Y)$ est homéomorphe à $C_{\mathrm{p}}(X)$, Y doit aussi être discret d'après [7], et les espaces X et Y sont homéomorphes. Si X et Y ne sont pas discrets, la conclusion résulte de 3.5. ∎

Il serait intéressant de savoir si ce corollaire se généralise aux espaces indénombrables.

Démonstration du lemme 3.1. Soit Σ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^\omega$ formé des suites bornées. Pour $n \ge 1$, soit $Q_n = \{f \in \mathbb{R}^X : |f(x)| \le n$ pour tout $x \in X\}$; Q_n est compact et $\bigcup_{n=1}^\infty Q_n$ contient $C_{\mathrm{p}}^*(X)$. Comme $Q_n \cap C_{\mathrm{p}}(X) = Q_n \cap C_{\mathrm{p}}^*(X)$, la deuxième inclusion est évidente.

Si A est un fermé de X, nous noterons $C_{\mathrm{p}}(X, A)$ (resp. $C_{\mathrm{p}}^*(X, A)$) le sous-ensemble de $C_{\mathrm{p}}(X)$ (resp. $C_{\mathrm{p}}^*(X)$) formé des fonctions s'annulant sur A. Pour prouver la première inclusion, nous pouvons supposer X non compact. Alors (voir la démonstration du lemme 4.2 de [6]), X contient un fermé discret A qui en est un rétracte, et nous avons la suite d'homéomorphismes (linéaires)

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{p}}^*(X) &\cong C_{\mathrm{p}}^*(X, A) \times C_{\mathrm{p}}^*(A) \cong C_{\mathrm{p}}^*(X, A) \times \Sigma \\ &\cong C_{\mathrm{p}}^*(X, A) \times \Sigma \times \Sigma \cong C_{\mathrm{p}}^*(X) \times \Sigma. \end{aligned}$$

Cela entraîne que, notant $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, la première inclusion est vraie s'il existe une fonction continue $\varphi : \overline{\mathbb{R}}^X \to \mathbb{R}^X$ telle que $\varphi^{-1}(C_{\mathrm{p}}^*(X)) = C_{\mathrm{p}}(X)$ (car alors, si $i : \overline{\mathbb{R}}^X \to \Sigma$ est un plongement, $\varphi \times i | C_{\mathrm{p}}(X)$ est un plongement fermé de $C_{\mathrm{p}}(X)$ dans $C_{\mathrm{p}}^*(X) \times \Sigma$). Nous distinguerons trois cas :

1^er^ cas : X a un seul point d'accumulation. Alors, pour un certain filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}$, le couple $(C_{\mathrm{p}}(X), C_{\mathrm{p}}^*(X))$ est homéomorphe à $(c_{\mathcal{F}}, c_{\mathcal{F}}^*)$. Définissons $\varphi_0 : \overline{\mathbb{R}}^\omega \to [0,1]^\omega$ par $\varphi_0(\{x_n\}) = \{|x_n|/(1 + |x_n|)\}$. Alors φ_0 est continue et vérifie $\varphi_0^{-1}(c_{\mathcal{F}}) \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = c_{\mathcal{F}}$. Soit J un arc dans $[0,1]^\omega$ dont une extrémité est un point a de $[0,1]^\omega \backslash c_{\mathcal{F}}$ et tel que $J \backslash \{a\} \subset c_{\mathcal{F}}^*$. Ecrivons $\overline{\mathbb{R}}^\omega \backslash \mathbb{R}^\omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, où chaque K_n est compact, et prenons, pour tout $n \ge 1$, une fonction continue φ_n de $\overline{\mathbb{R}}^\omega$ dans J telle que $\varphi_n^{-1}(a) = K_n$. Alors $\varphi = \sum_{n=0}^\infty 2^{-(n+1)}\varphi_n$ est une fonction continue de $\overline{\mathbb{R}}^\omega$ dans $[0,1]^\omega$, donc $\varphi^{-1}(c_{\mathcal{F}}) = \varphi^{-1}(c^*_{\mathcal{F}})$, et $\varphi(z)$ appartient à $c_{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, $\varphi_n(z)$ appartient à $c_{\mathcal{F}}$ pour tout $n \geq 0$, d'où $\varphi^{-1}(c^*_{\mathcal{F}}) = \varphi^{-1}(c_{\mathcal{F}}) = \mathbb{R}^\omega \cap \varphi_0^{-1}(c_{\mathcal{F}}) = c_{\mathcal{F}}$.

2ème cas : L'ensemble X^{d} des points d'accumulation de X est compact. Etant compact et dénombrable, X^{d} est métrisable; comme X est de dimension zéro, X^{d} est alors un rétracte de X, et nous avons

$$C_{\mathrm{p}}(X) \cong C_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}) \times C_{\mathrm{p}}(X^{\mathrm{d}}), \quad C^*_{\mathrm{p}}(X) \cong C^*_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}) \times C^*_{\mathrm{p}}(X^{\mathrm{d}})$$

avec $C_{\mathrm{p}}(X^{\mathrm{d}}) = C^*_{\mathrm{p}}(X^{\mathrm{d}})$. Il suffit donc de montrer que $C_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}) \in \mathcal{F}_0(C^*_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}))$. Mais

$$C_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}) \cong C_{\mathrm{p}}(X/X^{\mathrm{d}}, \{X^{\mathrm{d}}\}), \quad C^*_{\mathrm{p}}(X, X^{\mathrm{d}}) \cong C^*_{\mathrm{p}}(X/X^{\mathrm{d}}, \{X^{\mathrm{d}}\})$$

et comme le quotient X/X^{d} n'a qu'un seul point d'accumulation, cela résulte du premier cas.

3ème cas : X^{d} n'est pas compact. Il existe alors un sous-ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ infini fermé discret dans X^{d}. Comme X^{d} est fermé, ce sous-ensemble est fermé dans X et nous pouvons trouver des sous-ensembles fermés-ouverts deux à deux disjoints $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ tels que $X = \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ et que $x_n \in V_n$ pour tout $n \geq 1$.

Affirmation. *Pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction continue $\alpha_n : [0,\infty] \to \mathbb{R}^{V_n}$ vérifiant*

(1) $0 \leq \alpha_n(t)(x) \leq 3$ *pour tout $x \in V_n$ et tout $t \in [0,\infty]$,*
(2) $\alpha_n^{-1}(C_{\mathrm{p}}(V_n)) = [0,\infty[$,
(3) *l'oscillation de $\alpha_n(\infty)$ en x_n est égale à* 3.

En effet, comme V_n est ouvert et fermé et contient $x_n \in X^{\mathrm{d}}$, il est infini et dénombrable, donc nous pouvons trouver une suite $\{W_n^m\}_{m=1}^\infty$ d'ensembles ouverts et fermés vérifiant $W_n^1 = V_n$, $W_n^m \supset W_n^{m+1}$ et $\bigcap_{m=1}^\infty W_n^m = \{x_n\}$. Alors, la fonction α_n definie comme suit : $\alpha_n(t)(x_n) = 0$ pour tout $t \in [0,\infty]$ et, pour $x \in W_n^m \backslash W_n^{m+1}$, $m \geq 1$,

$$\alpha_n(t)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq m, \\ 3s & \text{si } t = m+s,\ 0 \leq s \leq 1, \\ 3 & \text{si } t \geq m+1, \end{cases}$$

vérifie (1)–(3).

Ecrivons $\overline{\mathbb{R}}^X \backslash \mathbb{R}^X = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, où les K_n sont compacts, et définissons $\psi : \overline{\mathbb{R}}^X \to \mathbb{R}^X$ par $\psi(z)|V_n = \alpha_n(d(z, K_n)^{-1})$ (où d est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}^X$). La fonction $\varphi_0 : \overline{\mathbb{R}}^X \to Q_1$ définie par $\varphi_0(f)(x) = f(x)/(1 + |f(x)|)$ est continue et vérifie

$$\varphi_0^{-1}(C^*_{\mathrm{p}}(X)) \cap \mathbb{R}^X = C_{\mathrm{p}}(X). \tag{4}$$

Soit $\varphi = \varphi_0 + \psi$. Comme $\|\varphi_0\| \le 1$ et $\|\psi\| \le 3$, $\varphi^{-1}(C_{\rm p}(X)) = \varphi^{-1}(C_{\rm p}^*(X))$. Si $z \in \overline{\mathbb{R}}^X \setminus \mathbb{R}^X$, il y a un n tel que $z \in K_n$. Comme $\|\varphi_0\| \le 1$, (3) garantit que l'oscillation de φ en x_n est ≥ 1, donc $\varphi(z) \notin C_{\rm p}(X)$. Si $z \in \mathbb{R}^X$, il résulte de (2) et du fait que les V_n forment un recouvrement ouvert de X que $\psi(z)$ est continue sur X. Alors, $\varphi(z)$ est continue si, et seulement si, $\varphi_0(z)$ l'est, donc (4) entraîne que $\varphi^{-1}(C_{\rm p}^*(X)) = C_{\rm p}(X)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Banakh and R. Cauty, *Interplay between strongly universal spaces and pairs*, preprint.

[2] C. Bessaga and T. Dobrowolski, *Affine and homeomorphic embeddings into l^2*, preprint.

[3] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[4] R. Cauty, *Une famille d'espaces préhilbertiens σ-compacts ayant la puissance du continu*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 40 (1992), 41–43.

[5] —, *Indépendance linéaire et classification topologique des espaces normés*, Colloq. Math. 66 (1994), 243–255.

[6] R. Cauty, T. Dobrowolski and W. Marciszewski, *A contribution to the topological classification of the spaces $C_{\rm p}(X)$*, Fund. Math. 142 (1993), 267–301.

[7] J. Dijkstra, T. Grilliot, D. Lutzer and J. van Mill, *Function spaces of low Borel complexity*, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 703–710.

[8] T. Dobrowolski, *Extending homeomorphisms and applications to metric linear spaces without completeness*, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 753–784.

[9] T. Dobrowolski, W. Marciszewski and J. Mogilski, *On topological classification of function spaces $C_{\rm p}(X)$ of low Borel complexity*, ibid. 328 (1991), 307–324.

[10] T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Sigma-compact locally convex metric linear spaces universal for compacta are homeomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1982), 653–658.

[11] —, —, *Problems on topological classification of incomplete metric spaces*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed (eds.), Elsevier, Amsterdam, 1990, 409–429.

[12] W. Marciszewski, *On topological embeddings of linear metric spaces*, preprint.

Department of Mathematics
Lviv University
Universytetska 1
Lviv, 290602
Ukraine

Université Paris VI, UFR 920
Boîte courrier 172
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Received 1 April 1996