

INÉGALITÉ DE HARNACK ELLIPTIQUE SUR LES GRAPHERS

PAR

T. DELMOTTE (CERGY-PONTOISE)

Introduction. Il s'agit d'une version discrète et elliptique de l'inégalité de Harnack globale, c'est-à-dire pour un opérateur aux différences elliptique sur un graphe. Deux hypothèses géométriques sont faites sur le graphe : la régularité du volume et une inégalité de Poincaré. Ceci est précisé dans la première section.

La démonstration repose sur la méthode de J. Moser ([Mo1] pour la version elliptique, [Mo2] pour la version parabolique) présentée dans les espaces euclidiens \mathbb{R}^n , mais où le rôle des inégalités fonctionnelles de Poincaré et Sobolev est clairement mis en relief. Ainsi, dans le cadre continu, N. Varopoulos a pu reprendre cette méthode en retrouvant les mêmes inégalités fonctionnelles sur les groupes de Lie [V2] (version elliptique), et L. Saloff-Coste sur les variétés riemanniennes [SC1], [SC2] (version parabolique). Le principal attrait de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucune structure algébrique de la géométrie, notamment pas d'invariance par translation ni d'autres outils algébriques sur la géométrie. Toutefois, A. A. Grigor'yan a aussi obtenu le résultat parabolique sur les variétés riemanniennes par une méthode géométrique [G].

Dans le cadre discret, G. F. Lawler a étudié le cas des graphes \mathbb{Z}^n [L]. A. B. Merkov a obtenu [Me] une inégalité de Harnack globale par les mêmes arguments géométriques que [G] mais en guise de condition isopérimétrique, il a besoin d'une inégalité apparemment plus contraignante que l'inégalité de Poincaré. Adapter la méthode de Moser exige de transformer des calculs de différentiation continue en des calculs de différence. C'est ce que X. Y. Zhou a réussi à faire [Z] sur les graphes \mathbb{Z}^n si bien que L. Saloff-Coste nous a indiqué que l'on devait pouvoir traiter ainsi les graphes que nous considérons. Indépendamment de ce présent travail, I. Holopainen et P. M. Soardi ont obtenu le même résultat pour les opérateurs p -Laplacien au lieu d'opérateurs elliptiques du second ordre. Mais les difficultés rencontrées (lemme de John et Nirenberg, inégalité de Sobolev et discrétisation des

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 39A12.

calculs de différentiation) sont très comparables. Une question reste ouverte : peut-on aussi adapter la version parabolique [Mo2]?

Je voudrais remercier le référé pour ses remarques avisées, notamment sur la proposition 6.2. Il indique aussi un autre travail simultané sur le même sujet : *A global Harnack inequality on graphs and some related consequences* de M. Rigoli, M. Salvatori et M. Vignati.

1. Énoncé de l'inégalité de Harnack. Plan de la preuve. Le cadre géométrique est un graphe infini connexe localement uniformément fini, à savoir que si on note $x \sim y$ quand x et y sont voisins, alors

$$\exists N, \forall x, \quad \#\{y \mid y \sim x\} \leq N.$$

Sur ce graphe, on dispose d'une métrique à valeurs entières :

$$d(x, y) = \inf\{n \mid \exists(x = a_0, a_1, \dots, a_n = y) \text{ tel que } \forall i, a_i \sim a_{i+1}\}.$$

Pour obtenir l'inégalité de Harnack globale, on fait deux hypothèses géométriques sur le graphe : la régularité du volume et une inégalité de Poincaré. Par volume, on entend ici mesure de dénombrement. On définit les boules et leur bord :

$$B(x, n) = \{y \mid d(x, y) < n\}, \quad \partial B = \{y \mid d(x, y) = n - 1\}.$$

On note kB la boule $B(x, kn)$ si $B = B(x, n)$. L'hypothèse de régularité du volume s'écrit

$$\exists C_1 > 0, \forall B, \quad \#(2B) \leq C_1 \#(B).$$

Notons que cette hypothèse inclut le caractère localement uniformément fini. C_1 convient comme valeur de N , il suffit d'appliquer la régularité du volume à $B(x, 1)$. On note ensuite la moyenne sur une boule d'une fonction réelle f du graphe :

$$f_B = \frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} f(x).$$

La deuxième hypothèse, l'inégalité de Poincaré (des méthodes pour obtenir cette inégalité sont décrites dans [CSC2]), s'écrit

$$\exists C_2 > 0, \forall x^0, \forall n, \quad \sum_{x \in B(x^0, n)} |f(x) - f_B|^2 \leq C_2 n^2 \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, 2n) \\ x \sim y}} |f(x) - f(y)|^2.$$

A chaque arête (non orientée) xy , on associe un coefficient C_{xy} pour définir l'opérateur

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{y \sim x} C_{xy}(u(x) - u(y)).$$

Il sera supposé elliptique au sens où

$$\exists C_3 > 0, \quad 1/C_3 \leq C_{xy} \leq C_3.$$

On dira qu'une fonction u est *harmonique* sur B quand $\mathcal{L}u \equiv 0$ sur $B \setminus \partial B$. On peut maintenant énoncer le théorème.

THÉORÈME 1 (Inégalité de Harnack). *Si $u > 0$ est harmonique sur $2B$, alors*

$$\max_B u \leq C \min_B u,$$

où C est une constante qui ne dépend que des trois constantes du graphe C_1, C_2, C_3 .

Cette inégalité est globale car la constante C ne dépend pas de B (ni de u). Dans notre cadre géométrique discret, elle n'est justement remarquable que pour les grands rayons. Dans toute la suite, C désigne à chaque fois une constante qui aurait pu être calculée précisément en fonction de C_1, C_2 et C_3 . La démonstration est une adaptation de la méthode de Moser qui consiste à étudier les quantités

$$\phi(p, B) = \left(\frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} u(x)^p \right)^{1/p}.$$

B étant fixée, $\phi(p, B)$ est une fonction croissante de p qui tend vers $\min_B u$ quand p tend vers $-\infty$ et vers $\max_B u$ quand p tend vers $+\infty$. On démontrera en fait l'inégalité pour $u > 0$ harmonique sur $308B$, mais il suffit ensuite, pour $x_1, x_2 \in B$ et $u > 0$ harmonique sur $2B$, d'appliquer celle-ci plusieurs fois le long d'un chemin reliant x_1 et x_2 pour obtenir $u(x_1) < CC \dots Cu(x_2)$, soit une autre forme $u(x_1) < Cu(x_2)$ en changeant la constante.

Dans la section 3, on démontre (Théorème 3.3)

$$\phi(+q, 4B) \leq C\phi(-q, 4B)$$

pour une constante q qui ne dépend que des trois constantes du graphe. Pour cela, on aura eu besoin d'une version discrète du lemme de John et Nirenberg établie dans la section 2. Dans la section 5, on démontre (Théorème 5.4)

$$\left(\min_B u \geq \right) \min_{2B} u \geq C\phi(-q, 4B), \quad \max_B u \leq C\phi(+q, 4B).$$

Pour obtenir ces résultats, on aura utilisé l'inégalité de Sobolev établie dans la section 4.

2. Un lemme de John et Nirenberg. Ce lemme concerne la norme BMO :

$$\|f\|_{\text{BMO}(B^0)} = \sup_{B \subset B^0} \left(\frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} |f(x) - f_B| \right).$$

Le lemme de John et Nirenberg sur \mathbb{R}^n [JN] fut publié en même temps que [Mo1] qui l'utilise. Sa démonstration fait appel aux cubes dyadiques qui sont automatiquement disjoints. Il est raisonnablement admis qu'il se

généralise dans les espaces homogènes au sens de Coifman et Weiss [CW]. Dans [B], l'auteur annonce que la démonstration de [JN] se généralise en effet à l'aide d'un lemme de recouvrement précis : il s'agit de remplacer l'outil des cubes dyadiques. De la même manière, nous généralisons une démonstration extraite d'un cours de G. David à l'aide d'un lemme de recouvrement simple de type Vitali qui extrait des boules disjointes d'un ensemble de boules.

LEMME 2.1 (de type Vitali). *Si $I \subset \{B \mid B \subset B^0\}$ alors il existe $J \subset I$ vérifiant :*

- *Les boules de J sont disjointes.*
- *Pour tout $B \in I$, il existe $B' \in J$ tel que $B \subset 3B'$.*

Preuve. J sera construit sous la forme $\{B_1, \dots, B_n\}$. On construit les B_i par récurrence ainsi : tant qu'il reste des boules de I disjointes de $B_1 \cup \dots \cup B_j$, on en choisit une de rayon maximal qui sera B_{j+1} .

Ainsi toute boule $B = B(x, n)$ de I rencontrera une boule $B' = B(x', n')$ de J de plus grand rayon :

$$\exists y \in B \cap B' \quad \text{et} \quad n' \geq n.$$

On en déduit $B \subset 3B'$. En effet, si $z \in B$,

$$d(x', z) \leq d(x', y) + d(y, x) + d(x, z) < 3n'.$$

COROLLAIRE. $\#(\bigcup_{B \in I} B) \leq C_1^2 \#(\bigcup_{B' \in J} B')$.

En effet,

$$\# \left(\bigcup_{B \in I} B \right) \leq \sum_{B' \in J} \#(3B') \leq C_1^2 \sum_{B' \in J} \#(B') \leq C_1^2 \# \left(\bigcup_{B' \in J} B' \right).$$

Les propositions suivantes seront utiles pour la démonstration du lemme de John et Nirenberg.

PROPOSITION 2.2. *Pour tout $x \in B^0 = B(x^0, n^0)$ et tout $n \leq n^0$, il existe y tel que $x \in B(y, n) \subset B^0$.*

Il suffit de prendre y dans $B(x, n) \cap B(x^0, n^0 + 1 - n)$.

PROPOSITION 2.3. *($B' \subset B$ et $\|f\|_{\text{BMO}(B)} \leq 1$) \Rightarrow $|f_B - f_{B'}| \leq \#(B)/\#(B')$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{\#(B)} \sum_{x \in B} |f(x) - f_B| \geq \frac{1}{\#(B)} \left| \sum_{x \in B'} (f(x) - f_B) \right| \\ &= \frac{1}{\#(B)} \#(B') |f_{B'} - f_B|. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.4. *Si $\|f\|_{\text{BMO}(5B^0)} = 1$, $B = B(x, n) \subset B^0$, $B' = B(x', n') \subset B^0$, $n'/2 \leq n \leq 2n'$ et $B \cap B' \neq \emptyset$, alors $|f_B - f_{B'}| \leq C$.*

Preuve. On a $B \subset 5B'$ (et réciproquement $B' \subset 5B$). En effet, si $z \in B$, en utilisant $y \in B \cap B'$, on a

$$d(x', z) \leq d(x', y) + d(y, x) + d(x, z) < n' + n + n \leq 5n'.$$

La proposition 2.3 donne alors

$$|f_B - f_{5B'}| \leq \frac{\#(5B')}{\#(B)} \leq C \frac{\#(B')}{\#(B)} \leq C \frac{\#(5B)}{\#(B)} \leq C.$$

Enfin $|f_{5B'} - f_{B'}| \leq C$.

LEMME 2.5 (de John et Nirenberg). *Si $\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)} = 1$ et $f_{B^0} = 0$, alors $\#\{x \in B^0 \mid f(x) > \sigma\} \leq Ce^{-\sigma/C} \#(B^0)$.*

Preuve. On fixe T suffisamment grand (en fonction de C_1) et on pose, pour $k \geq 1$,

$$D_k = \{x \in B^0 \mid kT < f(x)\},$$

$$I_k = \{B \subset B^0 \mid kT < f_B < (k + 1/2)T\}, \quad E_k = \bigcup_{B \in I_k} B.$$

Par le lemme 2.1 (Vitali), on construit $J_k \subset I_k$ et on pose encore

$$F_k = \bigcup_{B \in J_k} B \quad \text{vérifiant par construction} \quad \#(E_k) \leq C_1^2 \#(F_k).$$

On démontre (en choisissant T grand) successivement que :

- 1) $D_k \subset E_k$,
- 2) pour tout $B \in J_{k+1}$, il existe $B' \in J_k$ tel que $B \subset 6B'$,
- 3) il existe $\mu < 1$ (fonction de C_1) tel que $\#(F_{k+1}) \leq \mu \#(F_k)$.

Pour démontrer le lemme de John et Nirenberg dans \mathbb{R}^n , on aurait pris pour I_k l'ensemble des cubes dyadiques maximaux pour la propriété $f_Q > kT$ qui s'avèrent contenir presque tout D_k . Ces cubes auraient été automatiquement disjoints, le caractère maximal aurait donné $f_Q < kT + C$ et on obtiendrait une relation de type 3) en appliquant $\|f\|_{\text{BMO}}$ dans chaque cube de F_k .

1) Soit $x \in D_k$. On note $B^0 = B(x^0, n^0)$ et $2^s \leq n^0 < 2^{s+1}$. Par la proposition 2.2, on construit les boules B_0, \dots, B_s de sorte que B_i contienne x et soit de rayon 2^i . Ainsi, en utilisant la proposition 2.4,

$$f_{B^0} = f(x) > kT, \quad |f_{B_{i+1}} - f_{B_i}| \leq C, \quad |f_{B_s}| = |f_{B_s} - f_{B^0}| \leq C.$$

En choisissant T plus grand que $2C$, on disposera donc de i tel que $B_i \in I_k$, d'où $x \in E_k$.

2) On pose $B = B(x, n) \in J_{k+1}$ et $2^s n \leq n^0 < 2^{s+1} n$. Comme au 1), on construit des boules B_0, \dots, B_s contenant x et de rayon $2^i n$, en choisissant

$B_0 = B$. On dispose ainsi de $B_i \in I_k$. B_i contient le centre x de B et son rayon est plus grand, donc $B \subset 2B_i$.

Enfin, J_k étant construit à partir de I_k par le lemme 2.1 (Vitali), il existe $B' \in J_k$ tel que $B_i \subset 3B'$, soit $B \subset 6B'$.

Notons que $B' \subset B^0 \Rightarrow 6B' \subset 11B^0$. Plus généralement, si $B = B(x, n) \subset B' = B(x', n')$, alors $n < 2n'$ et $kB \subset (2k-1)B'$.

En effet, puisque le graphe est infini connexe, il existe $y \in B \subset B'$ tel que $d(x, y) = n - 1 \leq d(x, x') + d(x', y) \leq (n' - 1) + (n' - 1)$, d'où $n < 2n'$. Et si $y \in B(x, kn)$, alors il existe $z \in B(x, n)$ tel que $d(y, z) \leq (k-1)n$ de sorte que

$$d(y, x') \leq d(y, z) + d(z, x') < 2(k-1)n' + n' = (2k-1)n'.$$

3) On déduit de l'étape précédente que l'on peut parcourir les boules de J_{k+1} ainsi :

$$\#(F_{k+1}) \leq \sum_{B' \in J_k} \left(\sum_{\substack{B \in J_{k+1} \\ B \subset 6B'}} \#(B) \right).$$

On applique maintenant $\|f\|_{\text{BMO}}$ dans $6B' \subset 11B^0$ pour estimer $\sum_{B \in J_{k+1}, B \subset 6B'} \#(B)$ avec $\#(B')$:

$$\begin{aligned} C_1^3 \#(B') &\geq \#(6B') \geq \sum_{x \in 6B'} |f(x) - f_{6B'}| \geq \sum_{\substack{B \in J_{k+1} \\ B \subset 6B'}} \left| \sum_{x \in B} (f(x) - f_{6B'}) \right| \\ &\geq \sum_{\substack{B \in J_{k+1} \\ B \subset 6B'}} \#(B) |f_B - f_{6B'}|. \end{aligned}$$

Or $f_B > (k+1)T$ et $f_{6B'} < (k+1/2)T + C_1^3$, donc pour $T > 2C_1^3$,

$$\sum_{\substack{B \in J_{k+1} \\ B \subset 6B'}} \#(B) \leq \frac{C_1^3}{T/2 - C_1^3} \#(B').$$

Ce coefficient $\mu = C_1^3/(T/2 - C_1^3)$ peut être rendu plus petit que 1 et

$$\#(F_{k+1}) \leq \mu \sum_{B' \in J_k} \#(B') = \mu \#(F_k),$$

d'où

$$\#(F_k) \leq \mu^k \#(B^0) = e^{-k/C} \#(B^0),$$

ce qui permet de conclure car $\#(D_k) \leq \#(E_k) \leq C_1^2 \#(F_k)$.

En appliquant ce lemme à

$$\frac{f - f_{B^0}}{\|f\|_{\text{BMO}}} \quad \text{et} \quad \frac{f_{B^0} - f}{\|f\|_{\text{BMO}}},$$

on obtient

COROLLAIRE. *Il existe deux constantes α et β ne dépendant que de C_1 telles que*

$$\frac{1}{\#(B^0)^2} \sum_{x \in B^0} e^{\alpha f(x)/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \sum_{x \in B^0} e^{-\alpha f(x)/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \leq \beta^2.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in B^0} e^{\alpha f(x)/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \\ & \leq e^{\alpha f_{B^0}/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \left(\#(B^0) + \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\alpha(k+1)} \# \left\{ x \in B^0 \mid \left| \frac{f(x) - f_{B^0}}{\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \right| > k \right\} \right) \\ & \leq e^{\alpha f_{B^0}/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \left(\#(B^0) + C \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{\alpha k} e^{-k/\tilde{C}} \#(B^0) \right) \\ & \leq \beta e^{\alpha f_{B^0}/\|f\|_{\text{BMO}(11B^0)}} \#(B^0) \end{aligned}$$

en choisissant $\alpha = 1/(2\tilde{C})$.

3. Passage de L^{-q} à L^{+q} . La norme BMO du logarithme d'une fonction harmonique. On utilise ici le lemme de John et Nirenberg en suivant l'article original de J. Moser [Mo1]. Une alternative est d'utiliser comme L. Saloff-Coste dans [SC2] un lemme abstrait de Bombieri–Gusti, surtout quand on fait intervenir une variable temps (version parabolique de l'inégalité) car alors la méthode originale devient délicate ([Mo2]).

PROPOSITION 3.1. *Soit $\phi \geq 0$, $\phi \equiv 0$ sur ∂B et $\mathcal{L}u \geq 0$ sur $B \setminus \partial B$. Alors*

$$\sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} (\phi(x) - \phi(y))(u(x) - u(y)) \geq 0.$$

Pour interpréter ces relations avec des résultats sur \mathbb{R}^n , on peut comparer \mathcal{L} à $-\Delta$. Cette proposition est une façon d'intégrer par parties :

$$\int_B \nabla \phi \nabla u = - \int_B \phi \Delta u, \quad \text{pour } \phi \equiv 0 \text{ sur } \partial B.$$

Preuve. x étant fixé,

$$\sum_{\substack{y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} \phi(x)(u(x) - u(y)) \geq 0.$$

En effet, soit $x \in \partial B$ et $\phi(x) = 0$, soit $\mathcal{L}u(x) \geq 0$. En intervertissant les rôles de x et y , on peut donc conclure.

LEMME 3.2. Soit $\eta \geq 0$, $u > 0$, $\eta \equiv 0$ sur ∂B et $\mathcal{L}u \geq 0$ sur B . Alors

$$\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \eta(x)^2 \leq C \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)| \eta(x) \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right|.$$

Preuve. On pose $\phi(x) = \eta(x)^2/u(x)$. Il s'agit de démontrer (interprétation sur \mathbb{R}^n)

$$\int_B (\nabla \ln u)^2 \eta^2 \leq C \int_B |\nabla \eta| \eta |\nabla \ln u|.$$

Or, en calculant $\nabla \phi$,

$$\int_B \nabla \phi \nabla u = \int_B \frac{-(\nabla u)^2}{u^2} \eta^2 + 2\eta \nabla \eta \frac{\nabla u}{u} \geq 0.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\nabla u/u = \nabla \ln u$.

La preuve est une adaptation discrète de ce calcul. On différentie d'abord ϕ :

$$\phi(x) - \phi(y) = \left(\frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(y)} \right) \eta(x)^2 + \frac{1}{u(y)} (\eta(x)^2 - \eta(y)^2).$$

La proposition 3.1 donne donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} (u(x) - u(y)) \left(\frac{1}{u(y)} - \frac{1}{u(x)} \right) \eta(x)^2 \\ \leq \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} (u(x) - u(y)) \frac{1}{u(y)} \left(\eta(x)^2 - \eta(y)^2 \right). \end{aligned}$$

Tous les termes de la somme de gauche sont positifs. En utilisant la constante d'ellipticité, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} (u(x) - u(y)) \left(\frac{1}{u(y)} - \frac{1}{u(x)} \right) \eta(x)^2 \\ \leq C \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |u(x) - u(y)| \frac{1}{u(y)} |\eta(x)^2 - \eta(y)^2|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathcal{L}u(x) \geq 0$, l'ellipticité et le fait qu'un sommet ait un nombre limité de voisins entraînent que $u(y) \leq Cu(x)$, de sorte que u prend des valeurs comparables sur deux sommets voisins : $1/C \leq u(x)/u(y) \leq C$. On en déduit que

$$(u(x) - u(y)) \left(\frac{1}{u(y)} - \frac{1}{u(x)} \right) = \left(\frac{u(x)}{u(y)} - 1 \right) \left(1 - \frac{u(y)}{u(x)} \right) \geq C \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2$$

ainsi que

$$|u(x) - u(y)| \frac{1}{u(y)} \leq C \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right|.$$

D'où

$$\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \eta(x)^2 \leq C \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)| (\eta(x) + \eta(y)) \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right|.$$

Dans le terme de droite, en fait,

$$\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)| \eta(x) \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right| = \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)| \eta(y) \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right|.$$

Donc, en multipliant la constante par 2, on obtient l'énoncé du lemme.

COROLLAIRE.

$$\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \eta(x)^2 \leq C \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)|^2.$$

En effet, par Hölder,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)| \eta(x) \left| \ln \frac{u(x)}{u(y)} \right| \\ \leq \sqrt{\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)|^2 \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \eta(x)^2}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.3. *Il existe $q > 0$, ne dépendant que des trois constantes du graphe, tel que si $u > 0$ est harmonique sur $77B^0$, alors*

$$\phi(-q, B^0) \geq C \phi(+q, B^0).$$

Preuve. On démontre d'abord que $\|\ln u\|_{\text{BMO}(11B^0)} \leq C$. Puis on utilise le lemme 2.5 de John et Nirenberg. Pour $B = B(z, n) \subset 11B^0$, on applique donc le corollaire du lemme 3.2 à u sur $4B$ avec la fonction cut-off η car $4B \subset (2 \times 4 - 1) \times 11B^0$:

$$\begin{aligned} \eta &\equiv 1 \quad \text{sur } 2B, \\ \eta(x) &= \frac{4n - 1 - d(z, x)}{2n} \quad \text{sur } 4B \setminus 2B, \end{aligned}$$

de sorte que $|\eta(x) - \eta(y)|^2 \leq 1/(4n^2)$ pour $x \sim y$. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x,y \in 2B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 &\leq \sum_{\substack{x,y \in 4B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \eta(x)^2 \\ &\leq C \sum_{\substack{x,y \in 4B \\ x \sim y}} |\eta(x) - \eta(y)|^2 \leq C \frac{1}{n^2} \#(B). \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré donne alors

$$\sum_{x \in B} |\ln u(x) - (\ln u)_B|^2 \leq C_2 n^2 \sum_{\substack{x,y \in 2B \\ x \sim y}} \left(\ln \frac{u(x)}{u(y)} \right)^2 \leq C \#(B).$$

Par Hölder,

$$\sum_{x \in B} |\ln u(x) - (\ln u)_B| \leq (\#B)^{1/2} \left(\sum_{x \in B} (\ln u(x) - (\ln u)_B)^2 \right)^{1/2} \leq C \#(B),$$

soit $\|\ln u\|_{\text{BMO}(11B^0)} \leq C$.

Pour $q = \alpha/C$, le corollaire du lemme 2.5 de John et Nirenberg donne

$$\phi(+q, B^0)^q \cdot \phi(-q, B^0)^{-q} \leq \beta^2.$$

D'où $\phi(-q, B^0) \geq C\phi(+q, B^0)$.

4. Inégalité de Sobolev. Nous suivons ici la démarche employée par L. Saloff-Coste dans [SC1] pour obtenir une inégalité de Sobolev–Poincaré dans une boule à l'aide des hypothèses minimales de régularité du volume et d'inégalité de Poincaré. On obtient que le graphe vérifie des inégalités semblables à \mathbb{R}^δ si on choisit un exposant δ supérieur à $\ln C_1 / \ln 2$ et strictement supérieur à 2, par exemple $\delta = \max\{\ln C_1 / \ln 2, 3\}$. On note $f_s(x) = f_{B(x,s)}$.

LEMME 4.1. *Si f est à support dans $B(x_0, r)$ et $s \leq r$, alors*

$$\|f_s\|_2^2 \leq C \#(B(x_0, r))^{-1} (r/s)^\delta \|f\|_1^2.$$

Preuve. Par interpolation,

$$\|f_s\|_2^2 = \sum_{x \in B(x_0, r+s)} f_s(x)^2 \leq (\max f_s) \sum_{x \in B(x_0, r+s)} f_s(x).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B(x_0, r+s)} f_s(x) &\leq \sum_{y \in B(x_0, r)} \sum_{x \in B(y, s)} \frac{f(y)}{\#(B(x, s))} \\ &\leq C \sum_{y \in B(x_0, r)} f(y) = C \|f\|_1 \end{aligned}$$

car $\#(B(y, s)) \leq \#(B(x, 2s)) \leq C_1 \#(B(x, s))$, et

$$f_s(x) \leq \|f\|_1 / \#(B(x, s)).$$

Il suffit donc de vérifier $\#(B(x_0, r)) \geq C(r/s)^\delta \#(B(x, s))$, ce qui se fait en appliquant plusieurs fois la régularité du volume.

LEMME 4.2. *Si f est à support fini, alors*

$$\|f - f_s\|_2^2 \leq Cs^2 \|\nabla f\|_2^2,$$

où l'on a noté $\|\nabla f\|_2^2 = \sum_{x \sim y} (f(x) - f(y))^2$.

Preuve. On utilise un squelette du graphe, à savoir une famille maximale de sommets $\{x_i\}_{i \in I}$ vérifiant $d(x_i, x_j) \geq 2s$ pour tous $i \neq j$, de sorte que les boules $B(x_i, 2s)$ recouvrent le graphe et que les boules $B(x_i, s)$ soient disjointes. On note $J = \{B(x_i, s) \mid i \in I\}$. On a

$$\|f - f_s\|_2^2 \leq \sum_{B \in J} 2 \left(\sum_{x \in 2B} (f(x) - f_{3B})^2 + \sum_{x \in 2B} (f_{3B} - f_s(x))^2 \right).$$

On estime les deux termes grâce à l'inégalité de Poincaré dans $3B$:

$$\sum_{x \in B} (f(x) - f_{3B})^2 \leq \sum_{x \in 3B} (f(x) - f_{3B})^2 \leq Cs^2 \sum_{\substack{x, y \in 6B \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))^2$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{x \in 2B} (f_{3B} - f_s(x))^2 &\leq \sum_{x \in 2B} \sum_{y \in B(x, s)} \frac{(f_{3B} - f(y))^2}{\#(B(x, s))} \\ &\leq \sum_{y \in 3B} \left((f_{3B} - f(y))^2 \sum_{x \in B(y, s)} \frac{1}{\#(B(x, s))} \right) \\ &\leq Cs^2 \sum_{\substack{x, y \in 6B \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))^2. \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier

$$\sum_{B \in J} \sum_{\substack{x, y \in 6B \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))^2 \leq C \|\nabla f\|_2^2.$$

Pour cela, on remarque simplement que $\#\{B \in J \mid x \in 6B\} \leq C$. En effet,

$$\#(B(x, 7s)) \geq \sum_{\substack{i \in I \\ x \in B(x_i, 6s)}} \#(B(x_i, s)).$$

Or en appliquant plusieurs fois la régularité du volume, on obtient $\#(B(x_i, s)) \geq C \#(B(x, 13s))$.

THÉORÈME 4.3 (Inégalité de Nash). *Si f est à support dans $B(x_0, r)$, alors*

$$\|f\|_2^{2+4/\delta} \leq C(\#(B(x_0, r)))^{-2/\delta} r^2 (\|\nabla f\|_2^2 + r^{-2} \|f\|_2^2) \|f\|_1^{4/\delta}.$$

Preuve. Considérons d'abord le cas où $f_{B(x_0, r)} = 0$. Les deux lemmes donnent, pour $s \leq r$,

$$\|f\|_2 \leq C(s \|\nabla f\|_2 + (\#(B(x_0, r)))^{-1/2} (r/s)^{\delta/2} \|f\|_1).$$

Pour obtenir le résultat du théorème (sans le terme $r^{-2} \|f\|_2^2$), on voudrait donner à s la valeur

$$S(f) = \left[\frac{\|f\|_1}{\|\nabla f\|_2} (\#(B(x_0, r)))^{-1/2} r^{\delta/2} \right]^{2/(\delta+2)}.$$

L'inconvénient est que s doit être un entier inférieur à r . Cependant on peut obtenir $C_- \leq S(f) \leq C_+ r$:

- Un sommet a au plus C_1 voisins, donc $\|\nabla f\|_2^2 \leq 2C_1 \|f\|_2^2 \leq 2C_1 \|f\|_1^2$. Par ailleurs, on peut obtenir une majoration du volume $\#(B(x_0, r)) \leq Cr^\delta$ à l'aide de $\#(B(x_0, 1)) = 1$ et la régularité du volume. Ces deux estimations donnent $S(f) \geq C_-$.

- On a supposé que la moyenne de f était nulle, donc l'inégalité de Poincaré dans la boule $B(x_0, r)$ donne

$$\|f\|_1 (\#(B(x_0, r)))^{-1/2} \leq \|f\|_2 \leq Cr \|\nabla f\|_2,$$

ce qui permet d'établir $S(f) \leq C_+ r$.

Ainsi, on peut donner à s la valeur de l'entier immédiatement supérieur à $S(f)/C_+$, de sorte que $C^{-1}S(f) \leq s \leq CS(f)$, ce qui donne

$$\|f\|_2^{2+4/\delta} \leq C(\#(B(x_0, r)))^{-2/\delta} r^2 \|\nabla f\|_2^2 \|f\|_1^{4/\delta}.$$

Enfin, pour une fonction constante sur $B(x_0, r)$,

$$\|f\|_2^{2+4/\delta} = (\#(B(x_0, r)))^{-2/\delta} \|f\|_2^2 \|f\|_1^{4/\delta}.$$

On obtient donc le résultat voulu en décomposant $f = (f - f_{B(x_0, r)}) + f_{B(x_0, r)}$.

THÉORÈME 4.4 (Inégalité de Sobolev). *Si f est à support dans la boule $B(x_0, r-1)$, alors*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\#(B(x_0, r))} \sum_{x \in B(x_0, r)} f(x)^{2\nu} \right)^{1/\nu} \\ & \leq C \frac{1}{\#(B(x_0, r))} \left(r^2 \sum_{\substack{x, y \in B(x_0, r) \\ x \sim y}} (f(x) - f(y))^2 + \sum_{x \in B(x_0, r)} f(x)^2 \right), \end{aligned}$$

où $\nu = \delta/(\delta - 2)$.

P r e u v e. Ces inégalités de Nash et Sobolev sont toutes deux équivalentes à une estimation des marches aléatoires sur le graphe ([CKS] et [V1] dans le cadre continu et [CSC1] dans le cadre discret). Dans [BCLSC], les auteurs obtiennent directement l'équivalence et remplacent l'expression classique $\|\nabla f\|_2^2$ par une large classe de fonctionnelles. Voici ce que donne leur démonstration pour notre terme $\|\nabla f\|_2^2 + r^{-2}\|f\|_2^2$.

Notons $a_k = \#\{x \mid |f(x)| \geq 2^k\}$, de sorte que

$$2^{-p}\|f\|_p^p \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} a_k \leq \frac{1}{1 - 2^{-p}} \|f\|_p^p.$$

Notons aussi

$$b_k = \sum_{\substack{2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1} \text{ ou } 2^k \leq |f(y)| < 2^{k+1} \\ \text{et } x \sim y}} (f(x) - f(y))^2 + r^{-2} 2^{2k} a_k,$$

qui vérifie $\sum b_k \leq C(\|\nabla f\|_2^2 + r^{-2}\|f\|_2^2)$. On applique l'inégalité de Nash à $\min(\max(|f| - 2^k, 0), 2^k)$, ce qui donne

$$(2^{2k} a_{k+1})^{1+2/\delta} \leq A b_k (2^k a_k)^{4/\delta}.$$

On a noté $A = C(\#(B(x_0, r)))^{-2/\delta} r^2$ le coefficient qui apparaît au début de l'inégalité de Nash. C'est ensuite un calcul sur les deux suites a_k et b_k qui permet d'aboutir à

$$\begin{aligned} \sum_k 2^{2\nu k} a_k &= \sum_k 2^{2\nu(k+1)} a_{k+1} \\ &\leq 2^{2\nu} A^{\nu/(2\nu-1)} \sum_k b_k^{\nu/(2\nu-1)} (2^{2\nu k} a_k)^{(2\nu-2)/(2\nu-1)} \\ &\leq 2^{2\nu} A^{\nu/(2\nu-1)} \left(\sum_k b_k \right)^{\nu/(2\nu-1)} \left(\sum_k 2^{4\nu k} a_k^2 \right)^{(\nu-1)/(2\nu-1)} \\ &\leq 2^{2\nu} A^{\nu/(2\nu-1)} \left(\sum_k b_k \right)^{\nu/(2\nu-1)} \left(\sum_k 2^{2\nu k} a_k \right)^{(2\nu-2)/(2\nu-1)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\sum_k 2^{2\nu k} a_k \right)^{1/\nu} \leq 2^{4\nu-2} A \left(\sum_k b_k \right),$$

ce qui donne sur les normes de f :

$$\|f\|_{2\nu}^2 \leq C(\#(B(x_0, r)))^{(2-2\nu)/(2\nu)} (r^2 \|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_2^2).$$

Ceci équivaut à l'inégalité cherchée.

5. Passage de $\pm q$ à $\pm\infty$

LEMME 5.1. *Soit $\eta \geq 0$, $u > 0$ et $\eta \equiv 0$ sur ∂B . Si l'une des deux hypothèses est vérifiée :*

- †1 : $1/2 < p \leq 1$ et $\mathcal{L}u \leq 0$ sur B ou
- †2 : $0 < p < 1/2$ et $\mathcal{L}u \geq 0$ sur B ,

alors

$$\sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} \eta(x)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 \leq C \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^2 \sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} u(x)^{2p} |\eta(x) - \eta(y)|^2.$$

Preuve. Soit $\phi(x) = u(x)^{2p-1} \eta(x)^2$.

On applique la même méthode qu'au lemme 3.2. Dans \mathbb{R}^n , on obtient le résultat pour toutes les valeurs de p . Ici, il est plus facile de restreindre p à un intervalle compact, mais les bornes 0 et 1 sont arbitraires. On a

$$\phi(x) - \phi(y) = (u(x)^{2p-1} - u(y)^{2p-1})\eta(x)^2 + u(y)^{2p-1}(\eta(x)^2 - \eta(y)^2).$$

La proposition 3.1 donne alors selon le cas †1 ou †2 :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} (u(x) - u(y)) (u(x)^{2p-1} - u(y)^{2p-1}) \eta(x)^2 \\ \leq_{\dagger 1} \sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} (u(x) - u(y)) u(y)^{2p-1} (\eta(y)^2 - \eta(x)^2). \\ \geq_{\dagger 2} \end{aligned}$$

Tous les termes de la somme de gauche ont le même signe : positif dans le cas †1 et négatif dans le cas †2. Dans les deux cas, on obtient (en utilisant aussi la constante d'ellipticité)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} |u(x) - u(y)| \cdot |u(x)^{2p-1} - u(y)^{2p-1}| \eta(x)^2 \\ \leq C \sum_{\substack{x, y \in B \\ x \sim y}} C_{xy} |u(x) - u(y)| u(y)^{2p-1} |\eta(y)^2 - \eta(x)^2|. \end{aligned}$$

On peut maintenant minorer les termes de gauche par

$$(u(x)^p - u(y)^p)^2 \leq C \frac{p^2}{|2p-1|} |u(x) - u(y)| \cdot |u(x)^{2p-1} - u(y)^{2p-1}|$$

et majorer les termes de droite par

$$p|u(x) - u(y)| u(y)^{p-1} \leq C |u(x)^p - u(y)^p|.$$

Ces deux inégalités s'obtiennent en estimant les fonctions de deux variables p et $z = u(x)/u(y)$ suivantes :

$$\frac{|2p-1|}{p^2} \cdot \frac{(z^p-1)^2}{|z^{2p-1}-1| \cdot |z-1|} \quad \text{et} \quad p \frac{|z-1|}{|z^p-1|}.$$

Leur support est compact : $0 < p \leq 1$ et $1/C \leq z \leq C$ d'après l'ellipticité et le fait qu'un sommet ait un nombre limité de voisins. Il suffit donc de vérifier que les facteurs fonctions de p ont été bien choisis pour qu'il n'y ait pas de divergence quand $z \rightarrow 1$, seul cas de discontinuité.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \eta(x)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 \\ & \leq C \frac{2p}{|2p-1|} \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} u(y)^p |\eta(x) - \eta(y)| (\eta(x) + \eta(y)) |u(x)^p - u(y)^p| \\ & \leq C \frac{2p}{|2p-1|} \left[\left(\sum u(y)^{2p} |\eta(x) - \eta(y)|^2 \sum \eta(x)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum u(y)^{2p} |\eta(x) - \eta(y)|^2 \sum \eta(y)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

En fait,

$$\sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \eta(x)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 = \sum_{\substack{x,y \in B \\ x \sim y}} \eta(y)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2.$$

D'où le résultat du lemme.

PROPOSITION 5.2. *Si $u > 0$ est harmonique sur $2B^0$, alors*

$$\phi(2, B^0) \leq C\phi(+q, 2B^0).$$

Preuve. On démontre ce résultat pour une boule B^0 suffisamment grande. Pour $0 < p \leq 1$, $p \neq 1/2$, $h \leq n$, on applique d'abord l'inégalité de Sobolev du théorème 4.4 à $\eta(x)u(x)^p$ dans $B(x^0, n+h)$ avec la fonction cut-off η :

$$\begin{aligned} \eta & \equiv 1 & \text{sur } B(x^0, n), \\ \eta(x) & = \frac{n+h-1-d(x^0, x)}{h} & \text{sur } B(x^0, n+h) \setminus B(x^0, n), \end{aligned}$$

de sorte que $|\eta(x) - \eta(y)|^2 \leq 1/h^2$ pour $x \sim y$. On a

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\#(B(x^0, n))} \sum_{x \in B(x^0, n)} u(x)^{2p\nu} \right)^{1/\nu} \\
& \leq \left(\frac{\#(B(x^0, n+h))}{\#(B(x^0, n))} \right)^{1/\nu} \left(\frac{1}{\#(B(x^0, n+h))} \sum_{x \in B(x^0, n+h)} (\eta(x)u(x)^p)^{2\nu} \right)^{1/\nu} \\
& \leq \frac{C}{\#(B(x^0, n+h))} \left(n^2 \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, n+h) \\ x \sim y}} |\eta(x)u(x)^p - \eta(y)u(y)^p|^2 \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{x \in B(x^0, n+h)} \eta(x)^2 u(x)^{2p} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.1, on peut estimer le premier terme par le deuxième :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, n+h) \\ x \sim y}} |\eta(x)u(x)^p - \eta(y)u(y)^p|^2 \\
& \leq \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, n+h) \\ x \sim y}} 2[\eta(x)^2 |u(x)^p - u(y)^p|^2 + |\eta(x) - \eta(y)|^2 u(y)^{2p}] \\
& \leq C \left[\left(\frac{2p}{2p-1} \right)^2 + 1 \right] \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, n+h) \\ x \sim y}} u(x)^{2p} |\eta(x) - \eta(y)|^2 \\
& \leq \frac{C}{h^2} \left[\left(\frac{2p}{2p-1} \right)^2 + 1 \right] \sum_{\substack{x, y \in B(x^0, n+h) \\ x \sim y}} u(x)^{2p}.
\end{aligned}$$

Finalement, si on note $\phi(p, n) = \phi(p, B(x^0, n))$, on a

$$\phi(2p\nu, n)^{2p} \leq C \left[1 + \left(\frac{2p}{2p-1} \right)^2 \frac{n^2}{h^2} + \frac{n^2}{h^2} \right] \phi(2p, n+h)^{2p}.$$

En posant $r = 2p$, $0 < r \leq 2$, $r \neq 1$, on obtient

$$\phi(r\nu, n) \leq \left(C \left[1 + \left(\frac{r+1}{r-1} \right)^2 \frac{n^2}{h^2} \right] \right)^{1/r} \phi(r, n+h).$$

q étant fixé, on connaît k tel que $q\nu^{k-1} < 2 \leq q\nu^k$. Eventuellement, on diminue légèrement la valeur de q pour que $q\nu^i \neq 1$, pour tout i . Pour une boule B^0 de rayon N , avec $N > k$, on prend la partie entière de N/k pour valeur de h de sorte que dans la suite, tous les facteurs n/h seront majorés par $3k$. On obtient la suite d'inégalités

$$\phi(2, B^0) \leq \phi(q\nu^k, B^0) = \phi(q\nu^k, N),$$

$$\begin{aligned}
 \phi(q\nu^k, N) &\leq \left(C \left[1 + \left(\frac{q\nu^{k-1} + 1}{q\nu^{k-1} - 1} \right)^2 9k^2 \right] \right)^{1/(q\nu^{k-1})} \\
 &\quad \times \phi(q\nu^{k-1}, N + h), \\
 \phi(q\nu^{k-1}, N + h) &\leq \left(C \left[1 + \left(\frac{q\nu^{k-2} + 1}{q\nu^{k-2} - 1} \right)^2 9k^2 \right] \right)^{1/(q\nu^{k-2})} \\
 &\quad \times \phi(q\nu^{k-2}, N + 2h), \\
 &\quad \vdots \\
 \phi(q\nu, N + (k-1)h) &\leq \left(C \left[1 + \left(\frac{q+1}{q-1} \right)^2 9k^2 \right] \right)^{1/q} \phi(q, N + kh), \\
 \phi(q, N + kh) &\leq C\phi(q, 2B^0).
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.3. Si $\mathcal{L}u \geq 0$ sur $2B^0$, alors

$$\max_{B^0} u \leq C\phi(2, 2B^0).$$

Preuve. Pour les puissances supérieures, on n'utilise que le cas $p = 1$ du lemme 5.1. On suppose ici que le rayon de B^0 est de la forme 2^N . On a

$$\phi(2\nu, n) \leq (C[1 + n^2/h^2])^{1/2} \phi(2, n + h).$$

En revanche, ceci s'applique à toute sous-solution u , donc à $u^{r/2}$, pour $r \geq 2$. Finalement,

$$\phi(r\nu, n) \leq (C[1 + n^2/h^2])^{1/r} \phi(r, n + h).$$

On utilisera la suite

$$n_i = 2^N + 2^{N-i} \quad \text{et} \quad h_i = 2^{N-1-i}$$

de sorte que $n_i = n_{i+1} + h_i$, $n_N = 2^N + 1$ et $n_0 = 2^{N+1}$. Pour $i = 0, \dots, N-1$ on a

$$\phi(2\nu^{i+1}, n_{i+1}) \leq (C[1 + n_{i+1}^2/h_i^2])^{1/(2\nu^i)} \phi(2\nu^i, n_{i+1} + h_i).$$

En estimant $n_i \leq 2^{N+1}$, on obtient

$$\phi(2\nu^{i+1}, n_{i+1}) \leq (C[1 + 2^{4+2i}])^{1/(2\nu^i)} \phi(2\nu^i, n_i),$$

soit

$$\phi(2\nu^{i+1}, n_{i+1}) \leq C^{(i+1)/\nu^i} \phi(2\nu^i, n_i).$$

Comme le produit infini de ces constantes converge, on obtient une estimation indépendante de N ,

$$\phi(2\nu^N, 2^N + 1) \leq C\phi(2, 2B^0).$$

Or, en ne comptant que le maximum de u , $M = \max_{B^0} u$, on déduit

$$\phi(2\nu^N, 2^N + 1) \geq M \#(B(x^0, 2^N + 1))^{-1/(2\nu^N)} \geq CM.$$

THÉORÈME 5.4. *Si $u > 0$ est harmonique sur $4B^0$, alors*

$$\min_{B^0} u \geq C\phi(-q, 2B^0), \quad \max_{B^0} u \leq C\phi(+q, 4B^0).$$

Preuve. Pour le deuxième point, on applique successivement les deux propositions précédentes. Quant au premier point, il suffit d'appliquer la proposition 5.3 à $u^{-q/2}$ qui est une sous-solution.

Ce théorème, combiné avec le théorème 3.3, achève la démonstration de l'inégalité de Harnack.

6. Deux applications immédiates

PROPOSITION 6.1 (Théorème de Liouville). *Sous les hypothèses du théorème 1, toute fonction harmonique positive définie sur le graphe (infini) est constante.*

Preuve. On note u la fonction et on suppose $u(x) > \inf u$. Pour $\varepsilon > 0$, on dispose de $u(y) < \inf u + \varepsilon$ et on étudie $u_\varepsilon = u - \inf u + \varepsilon > 0$. On a

$$\frac{u_\varepsilon(x)}{u_\varepsilon(y)} > \frac{u(x) - \inf u + \varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Comme ce coefficient tend vers l'infini quand ε tend vers zéro, cela peut contredire l'inégalité de Harnack appliquée à u_ε sur une boule contenant x et y .

PROPOSITION 6.2 (Continuité de Hölder). *Il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que si u est harmonique sur $B_0 = B(x_0, 2n)$ et $x, y \in B(x_0, n)$, alors*

$$|u(y) - u(x)| \leq C(d(x, y)/n)^\alpha \max_{B_0} |u|.$$

Preuve. On étudie les variations $V(i) = \max_{B(x, 2^i)} u - \min_{B(x, 2^i)} u$. On encadre $d(x, y)$ par $2^{N_1-1} \leq d(x, y) < 2^{N_1}$ de sorte que $|u(y) - u(x)| \leq V(N_1)$. On encadre aussi n par $2^{N_2} \leq n < 2^{N_2+1}$ de sorte que $V(N_2) \leq 2 \max_{B_0} |u|$.

L'inégalité de Harnack donne $V(i) \leq \lambda V(i+1)$, avec $\lambda < 1$, donc $V(N_1) \leq \lambda^{N_2-N_1} V(N_2)$, d'où l'inégalité recherchée.

RÉFÉRENCES

- [BCLSC] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux and L. Saloff-Coste, *Sobolev inequalities in disguise*, Indiana Univ. Math. J., à paraître.
- [B] N. Burger, *Espace des fonctions à variation moyenne bornée sur un espace de nature homogène*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 286 (1978), 139–142.
- [CKS] E. Carlen, S. Kusuoka and D. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov functions*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 23 (1987), 245–287.

- [CSC1] T. Coulhon et L. Saloff-Coste, *Puissances d'un opérateur régularisant*, *ibid.* 26 (1990), 419–436.
- [CSC2] —, —, *Isopérimétrie sur les groupes et les variétés*, *Rev. Mat. Iberoamericana* 9 (1993), 293–314.
- [CW] R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, *Lecture Notes in Math.* 242, Springer, 1971.
- [G] A. A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds*, *Math. USSR-Sb.* 72 (1992), 47–77.
- [JN] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 415–426.
- [L] G. F. Lawler, *Estimates for differences and Harnack inequality for difference operators coming from random walks with symmetric, spatially inhomogeneous, increments*, *Proc. London Math. Soc.* (3) 63 (1991), 552–568.
- [Me] A. B. Merkov, *Second-order elliptic equations on graphs*, *Math. USSR-Sb.* 55 (1986), 493–509.
- [Mo1] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 577–591.
- [Mo2] —, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, *ibid.* 17 (1964), 101–134.
- [SC1] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, *Internat. Math. Res. Notices* 1992, no. 2, 27–38.
- [SC2] —, *Parabolic Harnack inequality for divergence form second order differential operators*, *Potential Anal.* 4 (1995), 429–467.
- [V1] N. Varopoulos, *Une généralisation du théorème de Hardy–Littlewood–Sobolev pour les espaces de Dirichlet*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 299 (1984), 651–654.
- [V2] —, *Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie*, *ibid.* 304 (1987), 519–521.
- [Z] X. Y. Zhou, *Green function estimates and their applications to the intersections of symmetric random walks*, *Stochastic Process. Appl.* 48 (1993), 31–60.

Département de Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
2, Avenue A. Chauvin
F-95302 Cergy-Pontoise, France
E-mail: delmotte@u-cergy.fr

*Received 27 November 1995;
revised 26 March 1996*