COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 71 1996 NO. 1

FORMES MULTIPLICATIVES À VALEURS DANS LE SPECTRE

PAR

ABDELAZIZ MAOUCHE (QUÉBEC, QUÉ.)

Introduction. Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème suivant : est-ce-qu'une application linéaire surjective définie d'une algèbre de Banach complexe A sur elle-même qui préserve le spectre est multiplicative? En fait, il suffit de montrer que cette application est un morphisme de Jordan; voir [2] pour l'historique et la bibliographie concernant ce problème. Dans [3] il est question des applications multiplicatives qui préservent le spectre sur les matrices. Ceci nous a donné l'idée d'étudier le cas d'une algèbre de Banach quelconque, c'est-à-dire qui ne soit pas nécessairement de dimension finie. On s'est alors rendu compte que même le cas d'une fonctionnelle non-additive avec une condition supplémentaire sur le spectre n'est pas trivial. On montre qu'une fonctionnelle multiplicative χ d'une algèbre de Banach complexe A dans $\mathbb{C}$ telle que $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$ pour tout $x \in A$ n'est pas toujours un caractère. Un exemple est donné à la fin de cette note pour illustrer ce fait. Toutefois, en utilisant le résultat principal de [4], on démontre qu'il existe un caractère unique f sur A tel que $\chi \equiv f$ sur la composante connexe de l'unité $G_1(A)$ de l'ensemble des éléments inversibles.

Notre référence pour les algèbres de Banach est [1].

THÉORÈME. *Soit A une algèbre de Banach complexe. Supposons que l'application $\chi : A \to \mathbb{C}$ possède les propriétés suivantes* :

(i) χ *est multiplicative*,
(ii) $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$, *pour tout* $x \in A$.

Alors il existe un caractère unique f sur A tel que $\chi(x) = f(x)$ pour tout $x \in G_1(A)$.

Démonstration. (a) Il est clair que $\chi(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) χ est continue au voisinage de 1. En effet, comme $\chi(1+x) \in \operatorname{Sp}(1+x)$, alors $|\chi(1+x) - 1| \le \varrho(x) \le \|x\|$. Ainsi $\chi(1+x) \to 1$ quand $x \to 0$. Cela implique en particulier que χ est continue en tout point a inversible car $\chi(x)/\chi(a) - 1 = \chi(xa^{-1}) - 1 \to 0$ lorsque $x \to a$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46H70.

(c) Soit x fixé. Pour n assez grand $e^{x/2^n}$ est proche de 1; prenons la branche du logarithme qui est l'inverse de l'exponentielle sur le disque $|z-1| < 1$ du plan complexe $\mathbb{C}$. On remarque aussi que la suite $2^n \log \chi(e^{x/2^n})$ se stabilise puisque $\chi(e^{x/2^{n+1}})^2 = \chi(e^{x/2^n})$. Posons

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \log \chi(e^{x/2^n}).$$

On voit que $f(2x) = 2f(x)$. Il suit du calcul fonctionnel holomorphe et du fait que les fonctions log et exp sont inverses l'une de l'autre au voisinage de 1 que

$$\chi(e^{x/2^n}) \in \mathrm{Sp}(e^{x/2^n}) = \exp(\mathrm{Sp}(x/2^n))$$

et ainsi

$$\log \chi(e^{x/2^n}) \in \mathrm{Sp}(x/2^n).$$

On déduit maintenant que $f(x) \in \mathrm{Sp}\, x$.

(d) Montrons que f est additive. On sait par la formule de Trotter [1, Exercise 15, p. 67] que $u_k = (e^{x/k}e^{y/k})^k \to e^{x+y}$ quand $k \to \infty$. En utilisant la continuité de χ de la partie (b), on a $\chi(u_k) = (e^{x/k})^k \chi(e^{y/k})^k = \chi(e^x)\chi(e^y) \to \chi(e^{x+y})$ et donc $\chi(e^x)\chi(e^y) = \chi(e^{x+y})$. Il suit que $\chi(e^{x/2^n})\chi(e^{y/2^n}) = \chi(e^{(x+y)/2^n})$, et on a aussi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} 2^n \log \chi(e^{(x+y)/2^{n+1}}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \log \chi(e^{x/2^{n+1}})\chi(e^{y/2^{n+1}}). \end{aligned}$$

Comme $\log uv = \log u + \log v$ si $u,\ v$ sont assez proches de 1, on déduit que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(e) On a $f(x) - f(y) = f(x-y) \in \mathrm{Sp}(x-y)$, donc d'après le théorème de Kowalski–Słodkowski [4], f est un caractère. Pour n assez grand on a $e^{f(x)/2^n} = \chi(e^{x/2^n})$, donc $f(e^x) = e^{f(x)} = \chi(e^x)$ pour tout $x \in A$. Fixons $a \in A$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ assez grand on a $\lambda - a = e^u$ pour un $u \in A$ et alors $\chi(\lambda - a) = \chi(e^u) = f(e^u) = f(\lambda - a) = \lambda - f(a)$. Maintenant, si $a \in G_1(A)$, il existe $u_1, \ldots, u_n \in A$ tels que $a = e^{u_1} \ldots e^{u_n}$ [1, p. 47] et donc $\chi(a) = \chi(e^{u_1} \ldots e^{u_n}) = \chi(e^{u_1}) \ldots \chi(e^{u_n})$. Maintenant, par ce qui précède, $\chi(a) = f(a)$. Pour ce qui est de l'unicité, on observe que si l'on a deux caractères f et g tels que $f(x) = g(x) = \chi(x)$ pour tout $x \in G_1(A)$ alors la même égalité a lieu pour tout $x \in A$. En effet, soit x un élément quelconque de A et prenons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \varrho(x)$. Alors $\lambda - x = e^u$ pour un certain $u \in A$. Il suit que $\lambda - f(x) = f(\lambda - x) = f(e^u) = g(e^u) = g(\lambda - x) = \lambda - g(x)$ et $f \equiv g$. ■

Exemple. Voici un exemple qui montre que le résultat précédent est le meilleur possible. En effet, considérons l'algèbre de Banach des fonctions continues $A = C([0,1])$ et l'application $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{C}$ définie par

$\phi(f) = 0$ si f s'annule en un point et $\phi(f) = f(0)$ autrement. Alors $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$ et $\phi(f) \in \operatorname{Sp} f$ pour toutes $f, g \in C([0,1])$. Mais ϕ n'est pas additive car si on prend $f(t) = t - 1$ alors $\phi(f) = 0$, $\phi(1 + f) = 0$ et $\phi(1) = 1$.

Remerciements. L'auteur remercie vivement l'arbitre pour ses suggestions pertinentes.

RÉFÉRENCES

[1] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory,* Universitext, Springer, New York, 1991.
[2] B. Aupetit and H. du Toit Mouton, *Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras*, Studia Math. 109 (1994), 91–100.
[3] S. H. Hochwald, *Multiplicative maps on matrices that preserve the spectrum*, Linear Algebra Appl. 212/213 (1994), 339–351.
[4] S. Kowalski and Z. Słodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras*, Studia Math. 67 (1980), 215–223.

Département de Mathématiques et de Statistique
Faculté des Sciences et de Génie
Université Laval
Québec, Québec
Canada G1K 7P4
E-mail: maouche@mat.ulaval.ca

Received 13 June 1995