COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 71 1996 NO. 1

CALCULS DE DIMENSIONS DE PACKING

PAR

FATHI BEN NASR (MONASTIR)

Introduction. Ce travail s'inscrit dans le cadre de plusieurs études d'analyse multifractale de mesures [1, 3, 4, ..., 11]. Nous poursuivons ici une telle étude en nous plaçant dans la situation considérée par J. Peyrière, G. Michon et G. Brown [3, 11].

Soit $\{\{I_{n,j}\}_{1\le j\le \nu_n}\}_{n\ge 1}$ une suite de partitions de $[0,1[$ en intervalles semi-ouverts à droite. Si $t\in[0,1[$, on désigne par $I_n(t)$ celui des intervalles $\{I_{n,j}\}_{1\le j\le\nu_n}$ qui contient t. La longueur d'un intervalle I est notée $|I|$. On suppose que, pour tout $t\in[0,1[$, $\lim_{n\to\infty}|I_n(t)|=0$.

Pour la commodité on note $F=\{(n,k): n\ge 1 \text{ et } 1\le k\le\nu_n\}$ et on dit qu'une partie J de F est un *ε-packing* d'un ensemble M si $\{I_j\}_{j\in J}$ est un ε-packing de M, c'est-à-dire les I_j sont disjoints, de longueurs inférieurs à ε et rencontrant tous M.

A chaque mesure de probabilité μ sur $[0,1[$ on associe un indice Dim_μ qu'on définit de la même manière que la dimension de Tricot [12, 13], mais en considérant seulement des packings d'éléments de F : si α et ε sont deux nombres strictement positifs, on pose

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(M,\varepsilon) &= \sup\Big\{\sum_{j\in J}\mu(I_j)^\alpha :\ J\ \varepsilon\text{-packing de } M\Big\},\\ \mu_\alpha(M) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\alpha(M,\varepsilon),\\ \Delta_\mu(M) &= \inf\{\alpha>0:\mu_\alpha(M)<\infty\}\end{aligned}$$

et

$$\operatorname{Dim}_\mu(M)=\inf\Big\{\sup_n \Delta_\mu(M_n): M=\bigcup M_n\Big\}$$

Lorsque μ est la mesure de Lebesgue, on écrit simplement $\Delta(M)$ et $\operatorname{Dim} M$.

Pour x et y réels on définit la quantité suivante :

$$K_\varepsilon(x,y)=\sup\sum_j{}^{*}\,\mu(I_j)^{x+1}|I_j|^{-y},$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 28A80, 28A60, 60D05, 60G57.

Key words and phrases: multifractal, dimension, packing.

où la borne supérieure est prise sur tous les ε-packings de $[0,1[$ composés d'éléments de F et où $\sum^*$ est prise sur les j tels que $\mu(I_j) \neq 0$. La valeur obtenue décroît quand ε tend vers 0 et sa limite est $K(x,y)$. La fonction K ainsi définie est convexe, décroissante en x et croissante en y. Il existe alors une fonction φ concave et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que l'intérieur de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : K(x,y) = 0\}$ coïncide avec l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \varphi(x-0)\}$. On suppose que φ est finie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et que sa borne supérieure S est strictement positive.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(\alpha) = \inf\{\alpha(x+1) - \varphi(x)\}, \quad f_+(\alpha) = \inf\{\alpha(x+1) - \varphi(x) : x \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)\}.$$

Dans [3, 11], G. Brown, G. Michon et J. Peyrière ont étudié la dimension de packing de l'ensemble

$$B_\alpha = \left\{ t \in [0,1[\ : \limsup \frac{\log \mu(I_n(t))}{\log |I_n(t)|} \leq \alpha \right\}.$$

Ils ont montré que $\operatorname{Dim} B_\alpha \leq f(\alpha)$ chaque fois que $\alpha \leq \varphi'(-1-0)$. Nous proposons ici deux idées pour améliorer ce résultat :

(i) Permettre les "permutations" des intervalles pour les packings considérés.

(ii) Obtenir une majoration uniforme des rapports $\log \mu(I_{\sigma(j)}) / \log |I_j|$ pour ces packings.

Ces idées seront aussi appliquées dans la comparaison de la dimension d'un sous-ensemble de $[0,1[$ par rapport à deux mesures μ et ν; cela constitue d'ailleurs la motivation du départ de ce travail.

Je voudrais remercier Jacques Peyrière pour les discussions que nous avons eues sur le sujet.

Comparaison de $\Delta_\mu(M)$ et $\Delta_\nu(M)$. Considérons deux mesures de probabilité μ et ν et une famille de nombres $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $\varepsilon \leq u_\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = 0$. Soit k un entier ≥ 1. Pour tout $M \subset [0,1[$ et $J \subset F$, nous désignons par $\mathcal{L}^k_{J,\varepsilon}(M)$ la famille de toutes les applications σ de J dans F pour lesquelles il existe une partition finie de J, $J = J_1 \cup \ldots \cup J_s$ avec $1 \leq s \leq k$, telle que $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_q}$ soit un u_ε-packing de M pour tout $1 \leq q \leq s$. On définit alors

$$L^k_{J,\varepsilon}(M) = \inf \sup_{j\in J} \log \mu(I_{\sigma(j)}) / \log \nu(I_j),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les σ de $\mathcal{L}^k_{J,\varepsilon}(M)$ et avec les précautions ordinaires :

$$\frac{\log \xi}{\log 0} = \frac{\log 1}{\log 0} = \frac{\log 0}{\log 0} = \frac{\log 1}{\log 1} = 0$$

et

$$\frac{\log 0}{\log \eta} = \frac{\log \xi}{\log 1} = \frac{\log 0}{\log 1} = +\infty$$

si ξ et η sont deux réels strictement compris entre 0 et 1. Il est clair que, si J est un ε-packing de M,

$$L^k_{J,\varepsilon}(M) \le \sup_{j\in J} \log \mu(I_j)/\log \nu(I_j). \tag{1}$$

On pose

$$L^k_\varepsilon(M) = \sup L^k_{J,\varepsilon}(M),$$

où la borne supérieure est prise sur tous les ε-packings J de M. La valeur obtenue décroît quand ε tend vers 0, et sa limite est $L^k(M)$. C'est un élément de $[0,\infty]$. Vu la définition de $\mathcal{L}^k_{J,\varepsilon}(M)$, la suite $(L^k(M))_k$ est décroissante. Nous pouvons donc définir

$$L(M) = \lim_{k\to\infty} L^k(M).$$

THÉORÈME 1. *Si $L(M)$ est fini alors $\Delta_\nu(M) \le L(M)\Delta_\mu(M)$.*

Démonstration. Considérons $\lambda > L(M)$, k un entier tel que $L^k(M) < \lambda$ et J un ε-packing de M. Quitte à prendre ε plus petit, on peut supposer que $L^k_\varepsilon(M) < \lambda$. Il existe alors une application σ de J dans F et une partition $J = \bigcup_{q=1}^s J_q$, $s \le k$, telles que, pour tout $1 \le q \le s$, $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_q}$ est un u_ε-packing de M et

$$\sup_{j\in J} \log \mu(I_{\sigma(j)})/\log \nu(I_j) \le \lambda.$$

Donc si $\gamma > 0$ on a

$$\forall j \in J, \quad \nu(I_j)^{\lambda\gamma} \le \mu(I_{\sigma(j)})^\gamma.$$

Comme $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_q}$ est un u_ε-packing de M, cela entraîne que

$$\sum_{j\in J} \nu(I_j)^{\lambda\gamma} \le k\mu_\gamma(M, u_\varepsilon)$$

et par suite,

$$\nu_{\lambda\gamma}(M,\varepsilon) \le k\mu_\gamma(M, u_\varepsilon).$$

D'où, en prenant les limites,

$$\nu_{\lambda\gamma}(M) \le k\mu_\gamma(M).$$

Il en résulte que $\Delta_\nu(M) \le \lambda\gamma$ pour tous $\lambda > L(M)$ et $\gamma > \Delta_\mu(M)$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Remarque 1. Soit $B_\alpha = \{t \in [0,1[\ : \limsup \log \mu(I_n(t))/\log \nu(I_n(t)) \le \alpha\}$ avec α la meilleure constante possible pour appliquer le théorème de Billingsley [2, p. 144]. L'intérêt du théorème 1 réside dans le fait que, dans certains cas, l'analyse classique ne permet pas d'obtenir une inégalité du type $\Delta_\nu(B_\alpha) < \alpha\Delta_\mu(B_\alpha)$ comme l'illustre l'exemple suivant.

EXEMPLE 1. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des mots construits avec $\{0,1\}$ comme alphabet. La longueur d'un élément j de $\mathcal{A}$ est notée $|j|$, le mot de longueur nulle ω. Pour tout $j \in \mathcal{A}$, on désigne par $N_k(j)$ le nombre d'apparitions de la lettre k dans j. Si j et k appartiennent à $\mathcal{A}$, on note jk le mot obtenu en mettant les mots j et k bout à bout.

Soit $\mathcal{A}\cup\partial\mathcal{A}$ la compactification naturelle de $\mathcal{A}$. A chaque élément j de $\mathcal{A}$, on associe une partie C_j de $\partial\mathcal{A}$ qu'on appellera *cylindre* : C_j est constituée des éléments de $\partial\mathcal{A}$ qui commencent par j.

Soient β, γ, ϱ des nombres réels tels que $1/3 < \beta < \gamma < \varrho < 1/2$. On appellera respectivement *cylindre de première*, *deuxième*, *troisième espèce* tout cylindre C_j tel que

$$N_0(j)/|j| \leq \beta, \quad \gamma \leq N_0(j)/|j| \leq \varrho, \quad N_0(j)/|j| < \gamma.$$

Si C_j est un cylindre de première ou de seconde espèce d'ordre n ($|j| = n$), on désigne par $\widetilde{C}_j$ l'ensemble des cylindres C_l d'ordre $n+6$ contenus dans C_j et de même espèce que C_j. Il existe alors un entier n_0 tel que $\operatorname{card}\widetilde{C}_j \geq 15$ si $|j| \geq n_0$. A l'ordre n_0, on considère deux cylindres de première espèce C_{j_0} et $C_{j'_0}$ et un cylindre de seconde espèce $C_{j''_0}$. On associe à C_{j_0} une suite de famille de cylindres de première espèce $(\mathcal{F}_n(C_{j_0}))_{n\geq 1}$ qu'on défini par récurrence ainsi : $\mathcal{F}_1(C_{j_0}) = \widetilde{C}_{j_0}$ et pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{F}_{k+1}(C_{j_0})$ est la famille de tous les cylindres de première espèce d'ordre $n_0 + 6(k+1)$ qui ont un parent dans $\mathcal{F}_k(C_{j_0})$.

Nous allons maintenant sélectionner au hasard des cylindres d'ordre $n_0 + 6k$, $k \in \mathbb{N}$. La sélection se déroule pas à pas.

Premier pas. Les cylindres sélectionnés sont $C_{j'_0}$ et $C_{j''_0}$. On pose $M_{n_0} = C_{j'_0} \cup C_{j''_0}$ et on dit que $C_{j'_0}$ *est en relation avec* $C_{j''_0}$: $C_{j'_0}\, R\, C_{j''_0}$.

Deuxième pas

Première opération. On sélectionne au hasard s cylindres dans $\widetilde{C}_{j'_0}$: $C_{j'_0 l'_1}, \ldots, C_{j'_0 l'_s}$, et s cylindres dans $\widetilde{C}_{j''_0}$: $C_{j''_0 l''_1}, \ldots, C_{j''_0 l''_s}$, et on dit que, pour tout k, $C_{j'_0 l'_k}\, R\, C_{j''_0 l''_k}$. Le nombre s est choisi aussi aléatoirement supérieur à 1.

Deuxième opération. On sélectionne ensuite au hasard p cylindres $C_{j''_0 l''_{s+1}}, \ldots, C_{j''_0 l''_{s+p}}$ parmi les cylindres restant dans $\widetilde{C}_{j''_0}$ après avoir effectué la première opération et p cylindres de $\mathcal{F}_1(C_{j_0})$: $C_{j_0 l_1}, \ldots, C_{j_0 l_p}$, et on dit que, pour tout $1 \leq k \leq p$, $C_{j_0 l_k}\, R\, C_{j''_0 l''_{s+k}}$. L'entier p est choisi aléatoirement supérieur à 0 avec la précaution de laisser au moins un cylindre dans $\mathcal{F}_1(C_{j_0})$.

Troisième opération. Soit maintenant $C_{j''_0 l''_{s+p+1}}, \ldots, C_{j''_0 l''_{s+p+q}}$ tous les cylindres de troisième espèce d'ordre n_0+6 qui sont contenus dans $C_{j_0''}$. Ces cylindres sont tous sélectionnés. Evidemment le nombre q peut être nul. On pose

$$M_{n_0+6}=\Big[\bigcup_{k=1}^{s}(C_{j_0'l_k'}\cup C_{j_0''l_k''})\Big]\cup\Big[\bigcup_{k=1}^{p}(C_{j_0l_k}\cup C_{j_0''l_{s+k}''})\Big]\cup\Big[\bigcup_{k=1}^{q}C_{j_0''l_{s+p+k}''}\Big].$$

Troisième pas

Première opération. Pour chaque couple de cylindres en relation, appartenant à l'étape précédente, on effectue la première opération du deuxième pas.

Deuxième opération. D'abord, on choisi au hasard p cylindres de deuxième espèce d'ordre n_0+12 contenus dans $M_{n_0+6}\cap C_{j_0''}$ et non sélectionnés dans la première opération. Ensuite, on prend p cylindres dans $\mathcal{F}_2(C_{j_0})$ qui n'ont pas de parents sélectionnés dans les étapes précédentes. Ces cylindres sont à leur tour deux à deux en relation. L'entier p est choisi aléatoirement ≥ 0 avec la précaution de laisser au moins un cylindre dans $\mathcal{F}_2(C_{j_0})$ dont les parents ne sont pas choisis précédemment.

Troisième opération. On sélectionne maintenant tous les cylindres de troisième espèce d'ordre n_0+12 qui sont contenus dans $M_{n_0+6}\cap C_{j_0''}$. Enfin, on désigne par M_{n_0+12} la réunion des cylindres sélectionnés dans la première, deuxième et troisième opération.

On construit ainsi par étapes une suite d'ensembles $(M_{n_0+6k})_{k\geq 0}$ de $\partial\mathcal{A}$ et une relation R non totale sur les cylindres sélectionnés ayant la propriété suivante :

(2) Chaque cylindre sélectionné de deuxième espèce est en relation avec un seul cylindre de même ordre et de première espèce.

Notons au passage que si C_j est de première espèce et $C_j\,R\,C_k$, les descendants sélectionnés de C_j sont toujours en relation avec les descendants de C_k; ce qui n'est pas toujours vrai pour les descendants sélectionnés de C_k. Notons aussi que dans la construction on peut avoir des cylindres sélectionnés de deuxième espèce contenant des cylindres sélectionnés de troisième espèce et vice-versa.

Considérons un système de longueurs $\{l_0,l_1\}$ tel que $0<l_1<l_0$ et $l_0+l_1=1$. On construit une suite $\{\{I_j\}_{j\in\mathcal{A},|j|=n}\}_{n\geq 0}$ de partitions de $[0,1[$ en intervalles semi-ouverts à droite de la façon suivante. La première partition est constituée de l'unique élément $I_\omega=[0,1[$. Pour passer de la n-ième à la $(n+1)$-ième partition, on partage dans l'ordre chaque I_j, $|j|=n$, en deux intervalles $\{I_{jk}\}_{k=0,1}$ ainsi :

$$|I_{jk}|=\begin{cases} l_k|I_j| & \text{si } C_j \text{ contient un cylindre sélectionné,}\\ \frac{1}{2}|I_j| & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a alors, par analogie, des intervalles de première, deuxième et troisième espèces et des intervalles sélectionnés dont certains sont en relation.

Soit maintenant un système de poids $\{p_0, p_1\}$ tels que $0 < p_0 < p_1$ et $p_0 + p_1 = 1$.

On considère ici la mesure de Lebesgue comme mesure ν et μ la probabilité définie par : pour tout $j \in \mathcal{A}$ et $k \in \{0,1\}$, $\mu(I_{jk})$ vaut $p_k\mu(I_j)$ si I_j contient un intervalle selectionné et $\frac{1}{2}\mu(I_j)$ dans le cas contraire.

Introduisons la fonction

$$g(x) = \frac{x\log(p_0/p_1) + \log p_1}{x\log(l_0/l_1) + \log l_1}.$$

Alors g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. Donc, elle admet une fonction réciproque définie dans $\left[\log p_1/\log l_1, \log p_0/\log l_0\right]$.

Observons que si I_j contient un intervalle sélectionné,

$$\mu(I_j) = |I_j|^{g(N_0(j)/|j|)}. \tag{3}$$

Soit α un nombre strictement compris entre $g(\gamma)$ et $g(\varrho)$. Alors, compte tenu de (3), B_α est non vide. Quitte à prendre p_0 proche de $1/2$ et l_0 proche de 1, on peut supposer que $g(\varrho) < 1$. Dans ces conditions l'ensemble B_α est contenu dans $I_{j_0} \cup I_{j_0'} \cup I_{j_0''}$.

Pour mettre en œuvre l'exemple, on a besoin d'une variante de ce qui précède. En effet, au lieu de considérer tous les intervalles I_j, on utilise seulement ceux dont l'ordre est $n_0 + 6k$, $k \leq 0$. Bien entendu, ces intervalles permettent le calcul de Δ et Δ_μ. On obtient ainsi d'autres quantités $\widetilde{\mathcal{L}}^k_{J,\varepsilon}(M)$, $\widetilde{L}^k_{J,\varepsilon}(M)$, $\widetilde{L}^k_\varepsilon(M)$, $\widetilde{L}^k(M)$ et $\widetilde{L}(M)$. Le théorème 1 devient alors

$$\widetilde{L}(M) < \infty \Rightarrow \Delta(M) \leq \widetilde{L}(M)\Delta_\mu(M).$$

Imposons maintenant la condition supplémentaire suivante :

$$\frac{\beta\log(p_0/p_1) + \log p_1}{\varrho\log(l_0/l_1) + \log l_1} \leq g(\gamma) \tag{4}$$

et montrons qu'on a alors $\widetilde{L}(B_\alpha) < \alpha$, ce qui conduit à l'inégalité $\Delta(B_\alpha) < \alpha\Delta_\mu(B_\alpha)$.

Notons $\widetilde{\mathcal{A}} = \{j \in \mathcal{A} : |j| = n_0 + 6k, k \in \mathbb{N}\}$ et soit J un ε-packing de B_α ($J \subset \widetilde{\mathcal{A}}$) et σ l'application de J dans $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par

$$\sigma(j) = \begin{cases} k & \text{si } I_j \text{ est sélectionné de deuxième espèce et } I_k\, R\, I_j, \\ j & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

Alors $\sigma \in \widetilde{\mathcal{L}}^2_{J,\varepsilon}(B_\alpha)$. En effet, prenons la partition de J suivante :

$$J_1 = \{j \in J : I_j \text{ sélectionné de deuxième espèce}\} \quad \text{et} \quad J_2 = J \backslash J_1.$$

Il est évident que $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_2}$ est un u_ε-packing de B_α. Reste donc à montrer que $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_1}$ l'est aussi. Pour tout $j \in J_1$, l'intervalle $I_{\sigma(j)}$ rencontre B_α puisqu'il est sélectionné et, compte tenu de (2), il admet une longueur inférieure à celle de I_j, donc inférieure à u_ε. Enfin les intervalles $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_1}$ sont deux à deux disjoints. Si ce n'était pas le cas, il existerait deux éléments j et k de J_1 tels que $I_{\sigma(k)} \subset I_{\sigma(j)}$. L'intersection de I_j et I_k serait alors non vide puisque les descendants sélectionnés de $I_{\sigma(j)}$ ne sont en relation qu'avec les descendants de I_j.

Compte tenu de la répartition des intervalles sélectionnés et en vertu de (2)–(4), on a

$$\forall j \in J, \quad \mu(I_{\sigma(j)})|I_j|^{-g(\gamma)} \geq 1.$$

Il en résulte que $\widetilde{L}^2_{J,\varepsilon}(B_\alpha) \leq g(\gamma)$ et par suite $\widetilde{L}(B_\alpha) \leq g(\gamma)$. Comme $g(\gamma) < \alpha$, l'inégalité $\widetilde{L}(B_\alpha) < \alpha$ est établi.

Majoration de $\operatorname{Dim} B_\alpha$**.** La mesure ν considérée dans ce paragraphe est la mesure de Lebesgue. Pour tout $\eta > \alpha$ et pour tout $p \geq 1$ désignons par $B_\alpha(\eta, p)$ l'ensemble des $t \in B_\alpha$ tels que l'on ait

(6) $$\forall n \geq 1, \quad |I_n(t)| \geq 1/p \quad \text{ou} \quad |I_n(t)|^\eta \leq \mu(I_n(t)).$$

On a alors $B_\alpha(\eta,p) \subset B_\alpha(\eta, p+1)$ et $B_\alpha = \bigcup_p B_\alpha(\eta,p)$.

PROPOSITION. *Pour toute partie M de $B_\alpha(\eta,p)$ on a*

(i) $L(M) \leq \eta$.
(ii) $\Delta(M) \leq \frac{1}{\eta} L(M) f_+(\eta)$.

Démonstration. (i) Soient $\varepsilon < 1/p$ et J un ε-packing de M. Tenant compte de (6) on a

$$\forall j \in J, \quad |I_j|^\eta \leq \mu(I_j).$$

D'où

(7) $$\forall j \in J, \quad \frac{\log \mu(I_j)}{\log |I_j|} \leq \eta.$$

Il résulte de (1) et (7) que $L^k_{J,\varepsilon}(M) \leq \eta$. Cela entraîne que $L^k_\varepsilon(M) \leq \eta$ et par suite $L(M) \leq \eta$.

(ii) Soient $\lambda > L(M)$, k un entier tel que $L^k(M) < \lambda$ et J un ε-packing de M. Quitte à prendre ε plus petit, on peut supposer que $u_\varepsilon < 1/p$ et $L^k_\varepsilon(M) < \lambda$. Il existe alors une application σ de J dans F et une partition $J = \bigcup_{q=1}^s J_q$, $s \leq k$, telles que, pour tout $1 \leq q \leq s$, $\{I_{\sigma(j)}\}_{j\in J_q}$ est un u_ε-packing de M et

(8) $$\forall j \in J, \quad |I_j|^\lambda \leq \mu(I_{\sigma(j)}).$$

Ainsi, pour tout $j \in J$, l'intervalle $I_{\sigma(j)}$ rencontre $B_\alpha(\eta, p)$ et admet une longueur strictement inférieure à $1/p$. On a donc, en vertu de (6),

$$\forall j \in J, \quad |I_{\sigma(j)}|^\eta \leq \mu(I_{\sigma(j)}). \tag{9}$$

Si $t < 0$ et $\gamma > 0$, (8) avec (9) donnent

$$\forall j \in J, \quad |I_j|^{\gamma\lambda} \leq \mu(I_{\sigma(j)})^{\gamma - t} |I_{\sigma(j)}|^{\eta t},$$

d'où, pour tout $1 \leq q \leq s$,

$$\sum_{j \in J_q} |I_j|^{\gamma\lambda} \leq \sum_{j \in J_q} \mu(I_{\sigma(j)})^{\gamma - t} |I_{\sigma(j)}|^{\eta t}.$$

Comme $\{I_{\sigma(j)}\}_{j \in J_q}$ est un u_ε-packing de M, cela entraîne

$$\sum_{j \in J_q} |I_j|^{\gamma\lambda} \leq K_{u_\varepsilon}(\gamma - t - 1, -\eta t)$$

et par suite

$$\sum_{j \in J} |I_j|^{\gamma\lambda} \leq k K_{u_\varepsilon}(\gamma - t - 1, -\eta t). \tag{10}$$

Posons $\psi(z) = \inf \varphi^{-1}(]-z, \infty[)$ et soit t un nombre strictement compris entre $-S/\eta$ et 0. Alors, pour ε assez petit, le second membre de (10) est fini chaque fois que $\gamma > \psi(\eta t) + t + 1$. Comme $\psi(\eta t) + t + 1$ est positif, (10) implique que

$$\Delta(M) \leq \lambda(\psi(\eta t) + t + 1). \tag{11}$$

L'inégalité (11) étant valable quel que soit $\lambda > L(M)$ et $-S/\eta < t < 0$ donc

$$\Delta(M) \leq L(M) \inf\{\psi(\eta t) + t + 1 : -S/\eta < t < 0\}.$$

La démonstration sera donc complète après que nous aurons prouvé l'inégalité suivante :

$$\inf\{\psi(\eta t) + t + 1 : -S/\eta < t < 0\} \leq \frac{1}{\eta} f_+(\eta). \tag{12}$$

Remarquons que, dans le cas où $\varphi(z) > 0$, on a $\psi(\eta t) \leq z$ quel que soit t strictement compris entre $-\frac{1}{\eta}\varphi(z)$ et 0, et il en résulte que

$$\begin{aligned} \inf\{\psi(\eta t) + t + 1 : -5/\eta < t < 0\} \\ \leq \inf\{t + 1 - \varphi(t)/\eta : t \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Or la fonction φ est concave et prend des valeurs strictement positives; donc elle s'annule au plus une fois et par suite on peut prendre $t \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$ dans le second membre de (13). Cela établit bien (12) et achève ainsi la démonstration de la proposition.

THÉORÈME 2. *En posant*

$$T_\mu(\alpha,\eta,p) = \inf\Big\{\sup_n L(M_n) : B_\alpha(\eta,p) = \bigcup M_n\Big\}$$

et

$$T_\mu(\alpha) = \varliminf_{\eta\to\alpha^+}\ \varliminf_{p\to\infty} T_\mu(\alpha,\eta,p),$$

on a

$$\operatorname{Dim} B_\alpha \le \frac{1}{\alpha} T_\mu(\alpha) f_+(\alpha).$$

D é m o n s t r a t i o n. Considérons une suite d'ensembles $\{M_n\}_n$ dont la réunion est $B_\alpha(\eta,p)$. La proposition entraîne alors que

$$\forall n,\qquad \Delta(M_n) \le \frac{1}{\eta} L(M_n) f_+(\eta).$$

Par conséquent, en considérant le sup de chaque côté, cela conduit à

$$\operatorname{Dim} B_\alpha(\eta,p) \le \frac{1}{\eta} T_\mu(\alpha,\eta,p) f_+(\eta),$$

d'où, en utilisant le fait que dim est "σ-stable",

$$\operatorname{Dim} B_\alpha \le \frac{1}{\eta} f_+(\eta)\ \varliminf_{p\to\infty} T_\mu(\alpha,\eta,p)$$

et l'inégalité est valable quel que soit $\eta > \alpha$, donc

$$\operatorname{Dim} B_\alpha \le \frac{1}{\alpha} T_\mu(\alpha) f_+(\alpha),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.

R e m a r q u e 2. D'après la proposition, on a $L(M) \le \eta$ pour toute partie M de $B_\alpha(\eta,p)$; ce qui entraîne $T_\mu(\alpha,\eta,p) \le \eta$ et en conséquence $T_\mu(\alpha) \le \alpha$. Donc si $f(\alpha) = f_+(\alpha)$, on retrouve l'inégalité établie dans [3, 11]. Dans le prochain paragraphe on montre qu'en fait il s'agit d'une amélioration.

EXEMPLE 2. Dans ce paragraphe nous allons donner un exemple où seul le théorème 2 permet d'établir l'inégalité $\operatorname{Dim} B_\alpha < f(\alpha)$.

On prend ici la mesure μ et la suite $\{\{I_j\}_{j\in\mathcal{A},|j|=n}\}_{n\ge 0}$ de partitions de $[0,1[$ considérées dans l'exemple 1. La fonction φ associée est alors finie sur tout $\mathbb{R}$. Elle vérifie en outre les inégalités suivantes :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \varphi(x) \le x, \tag{14}$$

$$\varphi(x) \ge \frac{\log 2}{\log l_1} + (x+1)\frac{\log p_1}{\log l_1} \qquad \text{pour } x \text{ assez grand}, \tag{15}$$

et

$$\varphi(0) \ge 0. \tag{16}$$

En effet, il existe une constante R telle que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\sum_{|j|=n} \mu(I_j)^{x+1}|I_j|^{-y} \geq R2^{n(y-x)}.$$

Cela implique que $K(x,y) = \infty$ pour tout $y > x$, ce qui prouve (14). Par ailleurs, si x et y sont strictement positifs, on a

$$\sum_{|j|=n} \mu(I_j)^{x+1}|I_j|^{-y} \leq 2^n p_1^{n(x+1)} l_1^{-ny}. \tag{17}$$

Si de plus

$$y < \frac{\log 2}{\log l_1} + (x+1)\frac{\log p_1}{\log l_1}$$

(cette inégalité est réalisée pour x assez grand), l'inégalité (17) entraîne que $K(x,y) < \infty$. Ainsi on a (15). Enfin, observons que si $y < 0$, on a

$$\sum_{|j|=n} \mu(I_j)|I_j|^{-y} \leq l_0^{-ny}.$$

On déduit que $K(0,y) < \infty$, et par conséquent on a (16).

En vertu de (14)–(16), la fonction φ est strictement croissante, elle s'annule au point 0 et $\varphi(x)$ est infiniment grand quand x tend vers ∞.

Plaçons nous dans le cas où $g(\varrho) < 1$ et n'imposons plus la condition supplémentaire (4). Soit α un nombre compris strictement entre $g(\gamma)$ et $g(\varrho)$. Alors $\alpha \leq \varphi'(-1-0)$ et $f(\alpha) = f_+(\alpha)$ puisque, compte tenu de (14), la dérivée à gauche de φ en 0 est supérieure à 1.

Comme dans l'exemple 1, on utilise seulement les packings d'éléments de $\widetilde{\mathcal{A}}$. Le théorème 2 devient alors

$$\operatorname{Dim} B_\alpha \leq \frac{1}{\alpha}\widetilde{T}_\mu(\alpha) f_+(\alpha).$$

Montrons maintenant qu'on a bien $\widetilde{T}_\mu(\alpha) < \alpha$, ce qui établit l'inégalité $\operatorname{Dim} B_\alpha < f(\alpha)$.

Soit J un ε-packing de $B_\alpha(\eta,p)$ ($J \subset \widetilde{\mathcal{A}}$). Quitte à prendre n_0 et p assez grands, on peut supposer que tous les intervalles sélectionnés de première espèce rencontrent $B_\alpha(\eta,p)$. Dans ces conditions, l'application σ définie dans (5) appartient à $\widetilde{\mathcal{L}}^2_{J,\varepsilon}(B_\alpha(\eta,p))$. Si de plus $\varepsilon < 1/p$, on a, en vertu de (2), (3) et (6),

$$\forall j \in J, \quad \mu(I_{\sigma(j)})|I_j|^{-H(\alpha)} \geq 1,$$

où

$$H(\alpha) = \sup\left(\frac{\beta\log(p_0/p_1) + \log p_1}{g^{-1}(\alpha)\log(l_0/l_1) + \log\ l_1}\ , g(\gamma)\right).$$

On en déduit que $\widetilde{L}^2_{J,\varepsilon}(B_\alpha(\eta,p)) \le H(\alpha)$ et par conséquent $\widetilde{L}(B_\alpha(\eta,p)) \le H(\alpha)$. Cela entraîne que $\widetilde{T}_\mu(\alpha) \le H(\alpha)$, et puisque β et γ sont strictement inférieurs à $g^{-1}(\alpha)$, l'inégalité $\widetilde{T}_\mu(\alpha) < \alpha$ est établie.

Remarque 3. 1) Les exemples 1 et 2 ont été conçus de telle sorte qu'on se trouve dans le cas où il existe une partie I de B_α sur laquelle la propriété de symétrie suivante n'est pas vérifiée :

$$\text{“}\forall t \in I\ \exists t' \in B_\alpha\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall k \ge p, \qquad I_{n_0+6k}(t)\, R\, I_{n_0+6k}(t')\text{”}.$$

Or c'est seulement dans le cas contraire qu'il serait possible, en décomposant l'ensemble B_α en réunion de parties disjointes deux à deux symétriques, et par une correspondance entre ces parties symétriques, de retrouver nos inégalités avec l'analyse classique, à savoir les théorèmes de type Billingsley et de type Brown, Michon et Peyrière.

2) Le théorème 2 reste valable quand la borne supérieure S de φ est nulle. En effet, dans ce cas $f_+(\eta) = \eta$ et par suite on a trivialement $\Delta(M) \le \frac{1}{\eta}L(M)f_+(\eta)$.

RÉFÉRENCES

[1] T. Bedford, *Hausdorff dimension and box dimension in self-similar sets*, Proc. Conf. Topology and Measure V (Binz, 1987), Wissensch. Beitr., Ernst-Moritz-Arndt Univ., Greifswald, 1988, 17–26.

[2] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York, 1965.

[3] G. Brown, G. Michon and J. Peyrière, *On the multifractal analysis of measures*, J. Statist. Phys. 66 (1992), 775–790.

[4] B. Mandelbrot, *Multifractal measures, especially for the geophysicist*, in: Fractals in Geophysics, Birkhäuser, Basel, 1989, 5–42.

[5] —, *A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) value for the dimension $f(\alpha)$*, Fractals' Physical Origin and Properties (Erice, 1988), L. Pietronero (ed.), Plenum, New York, 1989, 3–29.

[6] —, *Two meanings of multifractality, and the notion of negative fractal dimension*, in: Soviet-American Chaos Meeting (Woods Hole, 1989), K. Ford and D. Campbell (eds.), Amer. Inst. Phys., 1990, 79–90.

[7] —, *Limit lognormal multifractal measures*, in: Frontiers of Physics: Landau Memorial Conference (Tel Aviv, 1988), E. Gotsman (ed.), Pergamon, New York, 1989, 91–122.

[8] —, *New "anomalous" multiplicative multifractals: left sided $f(\alpha)$ and the modeling of DLA*, Phys. A 168 (1990), 95–111.

[9] B. Mandelbrot, C. J. G. Evertsz and Y. Hayakawa, *Exactly self-similar "left-sided" multifractal measures*, Phys. Rev. A, to appear.

[10] L. Olsen, *A multifractal formalism*, Adv. in Math. 116 (1995), 82–196.

[11] J. Peyrière, *Multifractal measures*, in: Probabilistic and Stochastic Methods in Analysis, with Applications (Il Ciocco, 1991), J. Byrnes (ed.), Kluwer Acad. Publ., 1992, 175–186.

[12] C. Tricot, *Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle*, Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Genève, 1980.

[13] —, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 91 (1982), 57–74.

Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5019 Monastir, Tunisie

Received 22 December 1994;
revised 21 December 1995