COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 71 1996 NO. 1

ABSENCE DE PRINCIPE DU MAXIMUM POUR CERTAINES ÉQUATIONS PARABOLIQUES COMPLEXES

PAR

PASCAL AUSCHER* (AMIENS), THIERRY COULHON (CERGY) ET PHILIPPE TCHAMITCHIAN (MARSEILLE)

Le but de cette note est de montrer que le principe du maximum, même dans une version affaiblie, n'est pas vérifié pour la classe des opérateurs paraboliques du type $d/dt + L$, où L est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 sous forme divergence à coefficients complexes mesurables et bornés en dimension supérieure ou égale à 5. Le principe de démonstration repose sur un résultat abstrait de la théorie des semi-groupes permettant d'utiliser le contre-exemple présenté dans [MNP] à la régularité des solutions faibles pour cette classe d'opérateurs elliptiques.

Soit $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ une matrice à coefficients complexes, mesurables définis sur $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, (uniformément) accrétive et bornée au sens où il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad \operatorname{Re} A(x)\xi\cdot\overline{\xi} \ge \delta|\xi|^2 \quad \text{p.p.,} \tag{1}$$

$$\|A\|_\infty < \delta^{-1}. \tag{2}$$

On a posé $\|A\|_\infty := \sup\{|A(x)\xi\cdot\overline{\eta}| : x\in\mathbb{R}^n,\ \xi,\eta\in\mathbb{C}^n,\ |\xi| = |\eta| = 1\}$, la borne supérieure en x étant comprise au sens de L^∞.

Considérons le problème parabolique

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n\times\,]0,T],\\ u_0 = f & \text{sur } \mathbb{R}^n,\end{cases}$$

où les égalités sont prises en un sens approprié. Pour cela, nous prenons le point de vue abstrait des semi-groupes.

Pour A vérifiant (1)–(2), on appelle $L = -\operatorname{div} A\nabla$ l'opérateur maximal-accrétif sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont le domaine $\mathcal{D}(L) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ est le plus grand sous-espace de $H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\langle Lf, g\rangle = \int A\nabla f\cdot\overline{\nabla g}, \qquad f\in\mathcal{D}(L),\ g\in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 35B50, 35K15, 47D05.

*Travail effectué à Brown University, Providence.

L'inclusion ci-dessus est dense (cf. [K]). D'après le théorème de Hille–Yosida, $-L$ engendre un semi-groupe contractant $S_t = e^{-tL}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $u(t) = S_t f$ est l'unique solution du problème (P) dans la classe $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(]0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, $u(t) \in \mathcal{D}(L)$ pour tout $t > 0$ ([Y]). Remarquons que cela entraîne que u est une solution faible sur Q de la première équation dans (P).

Lorsque les coefficients a_{ij} sont réels, S_t se prolonge en un semi-groupe contractant sur tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ (avec les précautions d'usage si $p = \infty$). En particulier,

$$\sup_Q |u| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |f|. \tag{4}$$

C'est le principe du maximum. La première preuve sous ces hypothèses semble être dans [AS] (voir aussi [Ar2]). (Merci à L. Saloff-Coste pour cette information.)

On peut se demander ce qu'il advient si les coefficients sont complexes. Le problème est l'existence d'une constante c, en général plus grande que 1 ([O]), indépendante de f et u solution de (P) telle que

$$\sup_Q |u| \leq c \sup_{\mathbb{R}^n} |f|. \tag{5}$$

Ceci constitue un principe du maximum faible. De telles inégalités apparaissent dans les travaux de Miranda et d'Agmon (cf. [Ke]).

L'inégalité (5) est connue dans les cas suivants :

(i) si $n = 1$ ou 2 avec $c = c(n, \delta)$, où δ est définie par (1)–(2) ([AT1], [AMcT]);

(ii) si $n \geq 3$ et si A est une perturbation L^∞ d'une matrice elliptique réelle A_0 (non nécessairement constante ni symétrique) : $\|A - A_0\|_\infty < \varepsilon(n, A_0)$ et $c = c(n, \delta, \varepsilon)$ ([A]);

(iii) si A possède un module de continuité ω et $c = c(n, \delta, \omega, T)$ ([A]).

Le but de cette note est de montrer que S_t n'est pas nécessairement borné sur tous les $L^p(\mathbb{R}^n)$. En particulier, ceci fournit un contre-exemple à (5).

THÉORÈME 1. *Soient $n \geq 5$ et $T > 0$. Il existe $L = -\operatorname{div} A\nabla$ vérifiant* (1)–(2) *et, pour tout $k > 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|f\|_\infty = 1$ tels que la solution u du problème* (P) *vérifie* $\sup_Q |u| \geq k$.

Dans [AT2], un contre-exemple à l'estimation gaussienne pour le noyau du semi-groupe est présenté lorsque $n \geq 5$. Remarquons qu'une telle estimation entraîne (5). La réciproque naturelle est : étant donné $L = -\operatorname{div} A\nabla$ vérifiant (1)–(2), est-il vrai que (5) pour les solutions de (P) et celles du problème adjoint entraîne une estimation gaussienne pour le noyau du semi-groupe e^{-tL}? La réponse est positive lorsque $c = 1$ dans (5) ([C1]), mais si $c > 1$ nous n'en savons rien.

Nous procédons différemment. La démonstration repose sur l'interpolation complexe et la théorie des semi-groupes holomorphes combinées à des méthodes assez classiques pour les EDP paraboliques. On utilise notamment une inégalité de Caccioppoli parabolique.

On désigne par $\|R\|_{q,p}$ la norme d'un opérateur borné R de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$. Le résultat suivant est la clef de voûte.

Théorème 2. *Soient $n \geq 3$, $T > 0$, $2 < q \leq \infty$, et $L = -\operatorname{div} A\nabla$ vérifiant* (1)–(2). *Supposons que S_t soit borné sur $L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $\sup_{0<t\leq T} \|S_t\|_{q,q} = M < \infty$. Alors pour tout $p \in [2, q[$, toute solution faible u de L appartient à L^p_{loc} et $\|u\|_{L^p_{\text{loc}}} \leq c(n, \delta, M, p, q, \|u\|_{H^1_{\text{loc}}})$.*

Rappelons qu'une *solution faible* de L sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est une fonction $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que

$$\int A\nabla u \cdot \nabla\varphi = 0 \tag{6}$$

pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Preuve du théorème 1. Dans [MNP], les auteurs construisent pour chaque $n \geq 5$ un opérateur L comme ci-dessus, où A est homogène de degré 0 (i.e. $A(\lambda x) = A(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$) et une solution faible de L sur $\mathbb{R}^n$ qui est de la forme $u(x) = |x|^{-s}G(x/|x|)$, où $s \in \mathbb{C}$ avec $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$ et où G est lipschitzienne sur la sphère unité. En particulier, $u \notin L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si $p \operatorname{Re} s > n$. On déduit alors du théorème 2 que le semi-groupe associé n'est pas uniformément borné sur $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour $q \operatorname{Re} s > n$, i.e. pour chaque $T > 0$,

$$\sup_{0<t\leq T} \|S_t\|_{q,q} = \infty. \tag{7}$$

Observons, en outre, que $\|S_t\|_{q,q}$ est indépendant de $t > 0$. En effet, par un changement de variable, il vient pour $s > 0$, $S_{ts} = e^{-tsL} = V_s^{-1}e^{-tL_s}V_s$, où $L_s = -\operatorname{div} A_s\nabla$ avec $A_s(x) = A(s^{1/2}x)$ et où V_s est défini par $V_sf(x) = f(s^{1/2}x)$. On a donc $\|S_{ts}\|_{q,q} = \|e^{-tL_s}\|_{q,q}$. De plus, l'homogénéité de A implique $L_s = L$ et $\|e^{-tL_s}\|_{q,q} = \|S_t\|_{q,q}$. Par suite, (7) devient

$$\|S_t\|_{q,q} = \infty, \qquad \forall t > 0. \tag{8}$$

Finalement, fixons $t > 0$. Comme $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ et que $\|S_tf\|_2 \leq \|f\|_2$, le théorème de Riesz–Thorin et (8) entraînent que

$$\sup\{\|S_tf\|_\infty : f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_\infty = 1\} = \infty.$$

Ceci démontre le théorème 1.

On a en fait montré un énoncé plus fort dont voici une forme possible.

Proposition 3. *Soit* $n \geq 5$. *Il existe* $L = -\operatorname{div} A\nabla$ *vérifiant* (1)–(2) *tel que* $\|e^{-tL}\|_{\infty,\infty} = \infty$ *pour tout* $t > 0$.

On a déjà remarqué que l'inégalité

$$\sup_{t>0} \|e^{-tL}\|_{\infty,\infty} \leq c(n,\delta)$$

est vraie pour la classe des opérateurs $L = -\operatorname{div} A\nabla$ vérifiant (1)–(2) si la dimension est 1 ou 2. Le cas des dimensions 3 et 4 est ouvert.

Il reste à démontrer le théorème 2. Par commodité d'écriture, on suppose que $T = \infty$, la preuve étant identique dans le cas $T < \infty$. La preuve se décompose en plusieurs étapes, la première étant un résultat abstrait sur les semi-groupes analytiques que l'on trouve dans [C2].

Proposition 4. *Soit* (T_t) *un semi-groupe analytique borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *de générateur* B, *et borné sur* $L^r(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq r < 2$, *tel que*

$$\|f\|_2 \leq C\|f\|_r^{\alpha} |\langle Bf, f\rangle|^{(1-\alpha)/2}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(B) \cap L^r(\mathbb{R}^n), \tag{9}$$

où $\alpha = (1 + n(1/r - 1/2))^{-1}$. *Alors*

$$\|T_t\|_{2,r} \leq Ct^{-(n/2)(1/r-1/2)}, \quad \forall t > 0. \tag{10}$$

En effet, il découle de (9) appliqué à $T_t f$ et des hypothèses que

$$\|T_t f\|_2 \leq C\|f\|_r^{\alpha} t^{(\alpha-1)/2} \|f\|_2^{1-\alpha}, \quad \forall t > 0,\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n),$$

et l'on conclut avec le lemme d'extrapolation de [C2], section 3.

Cette proposition s'applique à S_t^*, dont le générateur est $-L^*$, avec $r = q/(q-1)$. En effet, la continuité sur $L^r(\mathbb{R}^n)$ est l'hypothèse du théorème 2. De plus, S_t admet une extension holomorphe contractante sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ en vertu de la remarque suivante. Il existe un angle $\omega \in\,]0, \pi/2[$ tel que $e^{\pm i\theta}A$ soit uniformément accrétive et bornée si $|\theta| \leq \gamma < \omega$. Donc

$$\operatorname{Re}\langle e^{i\theta} Lf, f\rangle \geq \delta_\gamma \|\nabla f\|_2^2, \quad |\theta| \leq \gamma. \tag{11}$$

On applique alors les résultats de [K] par exemple : l'extension holomorphe S_z est définie par $S_z = e^{-te^{i\theta}L}$ pour $z = te^{i\theta}$ dans le secteur $|\arg z| < \omega$ et $\|S_z\|_{2,2} \leq 1$. Enfin, l'inégalité à la Nash (13) est une conséquence de l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg

$$\|f\|_2 \leq C\|f\|_p^{\alpha} \|\nabla f\|_2^{1-\alpha},$$

et de (11) où $\theta = 0$. On a donc

$$\|S_t\|_{q,2} \leq Ct^{-(n/2)(1/2-1/q)}, \quad \forall t > 0. \tag{12}$$

L'étape suivante consiste à localiser (12). Pour cela, suivant l'idée de Davies [Da] pour l'estimation gaussienne du noyau de S_z, on introduit

$$S_z^\lambda = \{e^{-\lambda\psi}\} S_z \{e^{\lambda\psi}\},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et où ψ est lipschitzienne, à valeurs réelles et telle que $\|\nabla\psi\|_\infty \le 1$. On a noté $\{m\}$ l'opérateur de multiplication ponctuelle par m.

Remarquons que $\|S_z^\lambda\|_{p,q} = \|S_z^{\mathrm{Re}\,\lambda}\|_{p,q}$ car la conjugaison par des exponentielles complexes $e^{i\mu\psi}$, $\mu \in \mathbb{R}$, ne modifie pas la norme d'un opérateur agissant sur les espaces de Lebesgue. On tire donc de (12) que

$$\|S_t^{i\mu}\|_{q,2} \le Ct^{-(n/2)(1/2-1/q)}, \quad \forall t > 0,\ \forall \mu \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

D'autre part, S_z^λ est un semi-groupe holomorphe sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour chaque λ et il dépend analytiquement de (z,λ). Pour en estimer la norme d'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on suppose $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $z = te^{i\theta}$ avec $|\theta| < \omega$, S_z^λ est le semi-groupe engendré par

$$-e^{i\theta}L^{(\lambda)} = -\{e^{-\lambda\psi}\}e^{i\theta}L\{e^{\lambda\psi}\}.$$

Soit $\gamma < \omega$. Pour une constante α ne dépendant que de n, δ, et γ, l'inégalité de Gårding

$$\mathrm{Re}\langle e^{i\theta}L^{(\lambda)}f, f\rangle \ge \delta_\gamma\|\nabla f\|_2^2 - \alpha\lambda^2\|f\|_2^2, \quad f \in \mathcal{D}(L^{(\lambda)}),\ |\theta| \le \gamma,$$

que l'on obtient par un calcul à partir de (3) et par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, entraîne

$$\|S_z^\lambda\|_{2,2} \le e^{\alpha|z|(\mathrm{Re}\lambda)^2}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall z,\ |\arg z| < \gamma. \tag{14}$$

Fixons $p \in\,]2,q[$ une fois pour toutes. En appliquant à partir de (13) et (14) le théorème d'interpolation de Stein [SW], une première fois à $z = t$ fixé et une deuxième fois à $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé, on voit que S_t^λ admet un prolongement analytique comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans un secteur $|\arg z\,| < \omega_p$ indépendant de λ avec l'estimation suivante : pour tout $\gamma < \omega_p$, il existe des constantes strictement positives (dont la valeur n'est pas importante) α, β, c ne dépendant que de $n, p, q, \delta, M, \gamma$ telles que

$$\|S_z^\lambda\|_{p,2} \le c|z|^{-\beta}e^{\alpha|z|\lambda^2} \quad \forall z,\ |\arg z| < \gamma,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Le résultat suivant s'inspire du lemme de Gaffney [Da1]. Si $E, F \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ensembles, leur distance de Hausdorff est définie par

$$d(E,F) = \inf\{|x-y| : x \in E,\ y \in F\} = \inf\{d(x,F) : x \in E\}.$$

Lemme 5. *Soient $E, F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles mesurables tels que $d = d(E,F) > 0$. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} f \subset F$,*

$$\|S_z f\|_{L^p(E)} \le c|z|^{-\beta}e^{-d^2/(4\alpha|z|)}\,\|f\|_2, \quad |\arg z| < \gamma, \tag{16}$$

où c, α, β, γ sont les constantes de (15).

Preuve. Posons $\psi(x) = d(x,F)$ et soit $\lambda > 0$. Comme $\psi(x) = 0$ pour $x \in F$, on a

$$S_z f = S_z(e^{-\lambda\psi}f) = e^{-\lambda\psi}S_z^{-\lambda}f$$

et donc

$$\|S_z f\|_{L^p(E)} \le c|z|^{-\beta} e^{\alpha|z|\lambda^2} \sup_{x\in E} e^{-\lambda\psi(x)} \|f\|_2$$
$$\le c|z|^{-\beta} e^{\alpha|z|\lambda^2} e^{-\lambda d}\|f\|_2.$$

Il ne reste qu'à optimiser le choix de λ.

L'inégalité (16) est la version locale annoncée de (12). L'étape suivante consiste à en déduire une autre estimation locale.

COROLLAIRE 6. *Sous les hypothèses du lemme* 5, *si* $0 < t \le d^2$ *et* $g \in L^{p'}(E)$,

$$\|\nabla S_t^* g\|_{L^2(F)} \le ct^{-\beta-1/2} e^{-ad^2/t} \|g\|_{L^{p'}(E)}, \tag{17}$$

où p' *est l'exposant conjugué à* p, *et* $a > 0$ *ne dépend que de* n *et de* α *dans* (15).

Pour démontrer ce corollaire, on s'appuie sur une inégalité de Caccioppoli parabolique. Soit $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ supportée dans E et supposons que $\|g\|_{p'} = 1$. Posons $u_z = S_z^* g$. Soit $\widetilde{F} = F + B(0, d/2)$, où $B(x,r)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon r. Comme $d(E, \widetilde{F}) = d/2 > 0$, il vient

$$\|u_t\|_{L^2(\widetilde{F})} + \left\| t\frac{\partial u_t}{\partial t}\right\|_{L^2(\widetilde{F})} \le ct^{-\beta} e^{-ad^2/t}, \qquad t > 0. \tag{18}$$

L'inégalité pour u_t se déduit de (16) avec $t = z$ par dualité et celle pour $t\partial u_t/\partial t$ est une conséquence de (16) et de la formule de Cauchy

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon t} u_{t+z} \frac{dz}{z^2},$$

$\varepsilon > 0$ étant choisi convenablement, où l'on regarde u_z comme une fonction holomorphe. Les constantes c et a vont changer de ligne en ligne mais ne dépendent que des constantes dans (18), et de la dimension.

De l'équation parabolique $\partial u_t/\partial t + L^* u_t = 0$, on tire

$$\langle A^*\nabla u_t, \nabla u_t \varphi^2\rangle = -\langle \partial u_t/\partial t, u_t\varphi^2\rangle - 2\langle A^*\nabla u_t\, \varphi, \nabla\varphi\, u_t\rangle, \tag{19}$$

où φ est une fonction régulière, supportée par $\widetilde{F}$, constante sur F et telle que $\|\varphi\|_\infty \le 1$ et $\|\nabla\varphi\|_\infty \le 1/d$. Posons $M = (\int t|\nabla u_t|^2\varphi^2)^{1/2}$ et remarquons que

$$M^2 \le \int t|\nabla u_t|^2 < \infty$$

puisque $u_t \in \mathcal{D}(L^*) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$. Après multiplication par t dans (19), on tire de (1)–(2) et de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$M^2 \le cM\|t^{1/2} u_t \nabla\varphi\|_2 + c\|u_t\varphi\|_2 \|t\partial_t u_t \varphi\|_2,$$

d'où

$$M^2 \le c\|t^{1/2}u_t\nabla\varphi\|_2^2 + c\|u_t\varphi\|_2\|t\partial_t u_t\varphi\|_2,$$

qui est l'inégalité de Caccioppoli recherchée.

Les propriétés de φ et (18) impliquent

$$\|u_t\varphi\|_2 + \|t\partial_t u_t\varphi\|_2 \le c\|\varphi\|_\infty t^{-\beta}e^{-ad^2/t}$$

et

$$\begin{aligned}\|t^{1/2}u_t\nabla\varphi\|_2 &\le ct^{1/2}\|\nabla\varphi\|_\infty t^{-\beta}e^{-ad^2/t}\\ &\le ct^{-\beta}(t^{1/2}/d)e^{-ad^2/t} \le ct^{-\beta}e^{-ad^2/t},\end{aligned}$$

puisque $t \le d^2$, ce qui entraîne $M^2 \le ct^{-\beta}e^{-ad^2/t}$ et démontre le corollaire.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème 2.

Soit u une solution faible de L. Par changement de variable affine, quitte à modifier L dans la classe des opérateurs vérifiant (1)–(2), on peut se ramener à $u \in H^1(B(0,4))$ vérifiant $Lu = 0$ sur $B(0,4)$. On estime $\langle u, \varphi\rangle$, où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $E = B(0,1)$, en fonction de $\|\varphi\|_{p'}$, où p' apparaît dans (17). On pose $\widetilde{E} = B(0,4)$.

On appelle $F = B(0,4) \setminus B(0,2)$ et on choisit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0,4)$ et égale à 1 sur $B(0,2)$. Observons que $d(E,F) = 1$.

Remarquons que $S_t^*\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Comme $u\chi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, à support compact, il vient

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u\chi, \varphi\rangle = \langle u\chi, S_1^*\varphi\rangle + \int_0^1 \langle A\nabla(u\chi), \nabla S_s^*\varphi\rangle\, ds$$

après une intégration par parties. D'une part,

$$|\langle u\chi, S_1^*\varphi\rangle| \le \|\chi\|_\infty\|u\|_{L^2(\widetilde{E})}\|S_1^*\varphi\|_2 \le c\|\chi\|_\infty\|u\|_{L^2(\widetilde{E})}\|\varphi\|_{p'},$$

d'après (14). D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle A\nabla(u\chi), \nabla S_s^*\varphi\rangle &= \langle A\nabla u, \nabla(\chi S_s^*\varphi)\rangle + \langle A\nabla\chi\, u, \nabla S_s^*\varphi\rangle - \langle A\nabla u, \nabla\chi\, S_s^*\varphi\rangle\\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Le terme I est nul car u est une solution faible de L et $\chi S_s^*\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, à support dans $B(0,4)$ (il suffit d'approximer $\chi S_s^*\varphi$ par des fonctions C^∞ pour appliquer la définition d'une solution faible, puis de passer à la limite).

Ensuite, les propriétés de support de χ et φ impliquent

$$|II| \le \|A\|_\infty\|\nabla\chi\|_\infty\|u\|_{L^2(F)}\|\nabla S_s^*\varphi\|_{L^2(F)}$$

et de (17) on tire $|II| \le cs^{-1/2}\theta(s)\|\varphi\|_{p'}$, avec $\theta(s) = s^{-\beta}e^{-a/s}$.

Enfin, on tire de la forme duale de (16) que

$$|III| \le \|A\|_\infty\|\chi\|_\infty\|\nabla u\|_{L^2(F)}\|S_s^*\varphi\|_{L^2(F)} \le c\theta(s)\|\varphi\|_{p'}.$$

Comme $\int_0^1 (s^{-1/2}+1)\theta(s)\,ds = c < \infty$, on a donc $\int_0^1 |I+II+III|\,ds \le c\|\varphi\|_{p'}$. Donc

$$|\langle u,\varphi\rangle| \le c\|\varphi\|_{p'}, \qquad \operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1),\ c = c(n,p,q,\delta,M,\|u\|_{H^1(B(0,4))}),$$

ce qui entraîne que $u \in L^p(B(0,1))$. En remplaçant $B(0,1)$ par une boule arbitraire contenue dans $B(0,4)$, une adaptation immédiate de l'argument montre que $u \in L^p_{\text{loc}}(B(0,4))$. Ceci termine la preuve du théorème 2.

REFERENCES

[Ar1] D. Aronson, *Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 890–896.

[Ar2] —, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), 607–694.

[AS] D. Aronson and J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 25 (1967), 81–122.

[A] P. Auscher, *Regularity theorems and heat kernels for elliptic operators*, J. London Math. Soc. (1995), à paraître.

[AMcT] P. Auscher, A. McIntosh et Ph. Tchamitchian, *Noyau de la chaleur d'opérateurs elliptiques complexes*, Math. Res. Lett. 1 (1994), 35–43.

[AT1] P. Auscher et Ph. Tchamitchian, *Calcul fonctionnel précisé pour des opérateurs différentiels complexes en dimension un* (*et applications à certaines équations elliptiques complexes en dimension deux*), Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (3) (1995), 721–778.

[AT2] —, —, *Sur un contre-exemple aux estimations gaussiennes pour les opérateurs elliptiques complexes*, manuscrit non publié.

[C1] T. Coulhon, *Itération de Moser et estimation gaussienne du noyau de la chaleur*, J. Operator Theory 29 (1993), 157–165.

[C2] —, *Inégalités de Gagliardo–Nirenberg pour les semi-groupes d'opérateurs et applications*, Potential Anal. 1 (1992), 343–353.

[Da] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge Univ. Press, 1989.

[Da1] —, *Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property*, J. Anal. Math. 58 (1992), 99–119.

[K] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1966.

[Ke] C. Kenig, *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 83, Amer. Math. Soc., 1994.

[MNP] V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskiĭ, *Absence of the De Giorgi-type theorems for strongly elliptic equations with complex coefficients*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 115 (1982), 156–168 (en russe); traduction angl.: J. Soviet Math. 28 (1985), 726–739.

[O] E.-M. Ouhabaz, *L^∞-contractivity of semigroups generated by sectorial forms*, J. London Math. Soc. 46 (1992), 529–542.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

[Y] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1980.

Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Université de Picardie–Jules Verne
33, rue Saint Leu
F-80039 Amiens Cedex, France
E-mail: auscher@mathinfo.u-picardie.fr

Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
2, rue Adolphe Chauvin
F-95302 Cergy, France
E-mail: coulhon@u-cergy.fr

Faculté des Sciences et Techniques
de Saint Jérôme
Avenue Escadrille Normandie-Niemen
F-13397 Marseille Cedex 13
E-mail: tchamphi@vmesa11.u-3mrs.fr

Received 11 July 1995;
revised 17 October 1995