COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXX 1996 FASC. 2

THÉORÈMES DE FACTORISATION DANS LES ALGÈBRES NORMÉES COMPLÈTES NON ASSOCIATIVES

PAR

M. AKKAR ET M. LAAYOUNI (TALENCE)

Introduction. Il est connu que si A est une algèbre de Banach ayant une unité approchée bornée à gauche (i.e., il existe une famille d'éléments de A, $F = \{e_i : i \in I\}$, telle que :

(α) $\sup\{\|e_i\| : i \in I\}$ est fini,

(β) I est filtrant à droite,

(γ) pour tout $a \in A$, $\lim_i e_i a = a$,

alors pour tout $z \in A$, il existe a et y dans A tels que $z = ay$ (théorème de Cohen–Hewitt).

La démonstration de ce théorème, donnée par Cohen–Hewitt, utilise le fait que si x et y sont inversibles dans une algèbre associative alors xy est inversible. Ceci n'est pas en général vrai dans le cas Jordan : Considérons l'algèbre des matrices $\mathcal{M}(2,\mathbb{C})$ munie du produit de Jordan $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Soient a et b tels que

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors a et b sont inversibles mais $a \circ b = 0$.

Les travaux de K. McCrimmon [5]–[7] et ceux de N. Jacobson [4] mettent en évidence l'importance, dans le cas d'une algèbre de Jordan J, d'un opérateur qui est défini par

$$\forall a, b \in J, \qquad U_a(b) = 2a(ab) - a^2 b.$$

On s'est alors posé la question si, dans une algèbre de Jordan–Banach possédant une unité approchée bornée, chaque élément z se factorise sous la forme

$$(\mathcal{F}) \qquad z = U_a(b).$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 46H70, 46J05, 17A15.

Key words and phrases: Jordan–Banach algebras, factorization.

La réponse est affirmative (théorème II.2) si on ajoute à la définition d'une unité approchée bornée (α)–(γ) la condition

(ξ) pour tout $a \in J$, $\lim_i U_{e_i}(a) = a$

(qui est une conséquence de (α) et (γ) dans le cas associatif).

La démonstration qu'on donne pour $(\mathcal{F})$ est une adaptation de celle faite dans [2], pp. 100–104, pour prouver le théorème de Cohen–Hewitt pour une algèbre de Banach.

Le théorème de factorisation multiple II.3 permet de conclure que si Z est une partie compacte d'une algèbre de Jordan–Banach J ayant une u.a.b., alors il existe $a \in J$ et une partie Y de J tels que

$$\forall z \in Z, \ \exists y_z \in Y \quad \text{tel que} \quad z = U_a(y_z).$$

Un résultat analogue à $(\mathcal{F})$ est valable pour les algèbres de Jordan–Banach non commutatives (théorème III.7), en remarquant que si A est une algèbre de Jordan–Banach non commutative, alors A^+ est une algèbre de Jordan–Banach et la factorisation dans A par l'opérateur

$$U_a : \quad x \mapsto a(ax + xa) - a^2 x$$

se ramène à celle de A^+ par l'opérateur

$$U_a^{(\circ)} : \quad x \mapsto 2a \circ (a \circ x) - a^2 \circ x$$

(où $\circ$ est le produit de Jordan).

Ensuite on donne des applications :

(i) Si J est associative, la factorisation $z = U_a(y)$ se réduit à $z = a^2 y$, ainsi on retrouve le théorème de Cohen–Hewitt. Et si une algèbre de Banach A admet une unité approchée bornée à gauche et à droite, alors

$$\forall z \in A, \ \exists a, y \in A \quad \text{tel que} \quad z = aya.$$

(ii) Pour tout élément z d'une JB^*-algèbre J il existe $a, y \in J$ tels que $z = U_a(y)$.

(iii) Si $(z_n)_{n\ge1}$ est une suite convergeant vers z dans une algèbre de Jordan–Banach ayant une unité approchée bornée, alors il existe a et une suite $(y_n)_{n\ge1}$ convergeant vers y dans J tels que $z_n = U_a(y_n)$ pour tout $n \ge 1$ et $z = U_a(y)$.

I. Unité approchée

I.1. Définition. Soit J une algèbre de Jordan normée. On dit que J admet une *unité approchée bornée* (notée u.a.b.) s'il existe une constante $k > 0$ et une famille $F = \{e_i : i \in I\}$ telle que :

(1) pour tout $i \in I$, $\|e_i\| \le k$,

(2) I est filtrant à droite,

(3) pour tout $x \in J$, $\lim_i \|e_i x - x\| = 0$ (la limite est selon I),

(4) pour tout $x \in J$, $\lim_i \|U_{e_i}(x) - x\| = 0$.

Si une telle constante k n'existe pas alors que (2)–(4) sont vérifiées, on parle d'*unité approchée* (notée u.a.).

I.2. Remarques. (1) Dans la définition d'une unité approchée bornée la condition (4) peut être remplacée par la condition

(4′) pour tout $x \in J$, $\lim_i \|e_i^2 x - x\| = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}\|(U_{e_i}(x) - x) - (x - e_i^2 x)\| &= \|2e_i(e_i x) - 2x\| \\ &\le 2\|e_i(e_i x - x)\| + \|e_i x - x\| \\ &\le 2(k+1)\|e_i x - x\|,\end{aligned}$$

qui tend vers zéro selon I.

(2)(α) Dans le cas où J est associative la condition (3) implique (4) car

$$\begin{aligned}\|U_{e_i}(a) - a\| &= \|2e_i(e_i a) - e_i^2 a - a\| = \|e_i^2 a - a\| \\ &\le \|e_i^2 a - e_i a\| + \|e_i a - a\| \le (k+1)\|e_i a - a\|\end{aligned}$$

qui tend vers 0 selon I.

(β) L'une des conditions (3) ou (4) suffit pour définir la notion d'u.a.b. dans le cas associatif.

I.3. Exemples. (1) Si A est une algèbre de Banach commutative ayant une u.a.b. au sens classique, alors A est une algèbre de Jordan–Banach ayant une u.a.b. au sens de la définition I.1 (c'est une conséquence de la remarque I.2(2)(α)).

(2) Si A est une algèbre de Banach ayant une u.a.b. à gauche et à droite alors l'algèbre de Jordan spéciale $J = A^+$ associée à A admet une u.a.b. au sens de la définition I.1.

(3) Soit J une algèbre de Jordan–Banach unitaire. Alors l'ensemble $c_0(J) = \{(x_n)_{n\ge1} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ muni des opérations naturelles et de la norme sup est une algèbre de Jordan–Banach ayant une u.a.b. $\{e_n\}_{n\ge1}$ où $e_n = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ avec n composantes égales à 1 et les autres nulles.

(4) Dans [3] on montre que si J est une JB^*-algèbre, alors $\Lambda = \{e \in J : e^* = e,\ e \ge 0$ et $\|e\| < 1\}$ est filtrant à droite et $\lim_e \|ex - x\| = 0$ pour tout x de J. De même, on montre que $\Lambda = \{e^2 : e \in J$ et $e^* = e\}$. Donc $\lim_e \|e^2 x - x\| = 0$ et donc Λ est une u.a.b. de J.

Comme dans le cas associatif (voir [2]), on montre les propriétés suivantes :

I.4. Proposition. *Soit J une algèbre de Jordan normée. Alors J admet une u.a.b. si, et seulement si, il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de J et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe e dans J avec :*

(i) $\|e\| \le k$,
(ii) $\|ex_p - x_p\| \le \varepsilon$, $p = 1, \ldots, n$,
(iii) $\|U_e(x_p) - x_p\| \le \varepsilon$, $p = 1, \ldots, n$.

I.5. Proposition. *Soient J une algèbre de Jordan normée et $\widetilde{J}$ l'algèbre complétée. Si $F = \{e_i : i \in I\}$ est une u.a.b. de J, alors F est une u.a.b. de $\widetilde{J}$.*

I.6. Remarque. Dans le cas où l'unité approchée n'est pas bornée la proposition I.5 n'est pas en général vraie. En effet, dans [1] P. G. Dixon donne une algèbre normée commutative qui admet une unité approchée sans que sa complétée en ait une.

II. Factorisation dans les algèbres de Jordan–Banach

II.1. Lemme. *Soit J admettant une u.a.b. $F = \{e_i : i \in I\}$ telle que $\sup\{\|e_i\| : i \in I\} \le k$. Soient $c \in]0,1[$ et $e \in F$. On a les propriétés suivantes :*

(1) $U_{1-c+ce}(x) = x + c^2(U_e(x) - x) + 2c(c-1)(1-e)x$ *pour tout* $x \in J'$,
(2) U_{1-c+ce} *est un opérateur inversible de* J' *pour* c *assez petit*,
(3) $\lim_i U_{1-c+ce_i}(x) = x$ *pour tout* $x \in J$,
(4) $\{\|U^{-1}_{1-c+ce}\| : e \in F\}$ *est borné*,
(5) $\lim_i U^{-1}_{1-c+ce_i}(x) = x$ *pour tout* $x \in J$.

Preuve. (1) On a

$$\begin{aligned}
U_{1-c+ce}(x) &= U_1(x) + U_{-c+ce}(x) + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2U_{1-e}(x) + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2[2(1-e)((1-e)x) - (1-e)^2x] + 2c(e-1)x \\
&= x + c^2[2x - 2ex - 2ex + 2e(ex) - x + 2ex - e^2x] + 2c(e-1)x, \\
&= x + c^2[(2e(ex) - e^2x) - x] + 2c^2(x - ex) + 2c(e-1)x, \\
&= x + c^2(U_e(x) - x) + 2c(c-1)(1-e)x.
\end{aligned}$$

(Le produit du dernier terme a un sens puisque c est une constante réelle.)

(2) On a

$$\begin{aligned}
\|U_{1-c+ce} - \mathrm{Id}\| &= \sup\{\|U_{1-c+ce}(x) - \mathrm{Id}(x)\| : \|x\| \le 1\}, \\
&\le c[c(3k^2+1) + 2(c+1)(k+1)].
\end{aligned}$$

Donc si c est suffisamment petit, on aura $\|U_{1-c+ce} - \mathrm{Id}\| < 1$. Or dans l'algèbre de Banach unitaire $L(J')$ la boule ouverte de centre Id et de rayon 1 est contenue dans l'ensemble des éléments inversibles de $L(J')$, d'où (2).

(3) est une conséquence de (1) et de la définition d'une u.a.b.

(4) On sait que J' est à puissances associatives et si $a \in J'$ est inversible, alors U_a est inversible dans $L(J')$ et $\|U_a^{-1}\| \le 3\|a^{-1}\|^2$. Donc pour $c < 1/(k+1)$ on a, pour tout $i \in I$,

$$\|U_{1-c+ce_i}^{-1}\| \le 3\|[1-c+ce_i]^{-1}\|^2 \le 3\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}[c(1-e_i)]^n\Big\|^2$$
$$\le 3\Big[\sum_{n=0}^{\infty}[c(1+k)]^n\Big]^2, \qquad \text{qui est fini.}$$

(5) découle de (3) et (4).

II.2. Théorème. *Soit J une algèbre de Jordan–Banach admettant une u.a.b. $F = \{e_i\}_{i\in I}$ telle que $\|e_i\| \le k$ pour tout $i \in I$. Alors il existe une constante $M(k)$ telle que pour tout élément z de J et tout $\delta > 0$, il existe $a, y \in J$ vérifiant :*

(1) $z = U_a(y)$,
(2) $\|a\| \le M(k)$,
(3) $\|z - y\| \le \delta$,
(4) $y \in \overline{U_{J'}(z)}$.

P r e u v e. En se basant sur les techniques de la factorisation dans le cas associatif (voir [2], pp. 97–100), on va construire une suite $(a_n)_{n\ge0}$ d'éléments inversibles dans J' qui converge vers un élément a de J, et telle que la suite $(U_{a_n}^{-1}(z))_{n\ge0}$ converge vers un élément y de J de sorte que $z = U_a(y)$.

Soient $z \in J$ et $\delta > 0$. On garde les hypothèses du lemme II.1. Posons $a_0 = 1$; soient $e_1 \in F$ et $a_1 = U_{1-c+ce_1}(a_0)$.

Par récurrence on construit une suite $(e_n)_{n\ge1} \subset F$ et une suite $(a_n)_{n\ge0} \subset J'$. On suppose que $e_1, \ldots, e_n$ sont construits, et on considère un élément e_{n+1} de F tel que les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ ci-dessous soient vérifiées.

On pose $a_{n+1} = U_{1-c+ce_{n+1}}(a_n) \in J'$. Remarquons que $a_n = (1-c)^{2n} + a'_n$ avec $a'_n \in J$. En effet, $a_0 = 1 = (1-c)^0 + 0$ et si $a_n = (1-c)^{2n} + a'_n$ alors

$$(*)\quad \begin{aligned} a_{n+1} &= U_{1-c+ce_{n+1}}((1-c)^{2n} + a'_n) \\ &= (1-c)^{2n}[(1-c)^2 + 2c(1-c)e_{n+1} + c^2e_{n+1}^2] + U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) \\ &= (1-c)^{2(n+1)} + a'_{n+1} \quad \text{avec } a'_{n+1} \in J \text{ (car } J \text{ est un idéal de } J'). \end{aligned}$$

De $(*)$ on déduit que

$$\begin{aligned}\|a_{n+1}-a_n\| &= \|(1-c)^{2n}[(1-c)^2+2c(1-c)e_{n+1}+c^2e_{n+1}^2]\\ &\quad + U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n)-(1-c)^{2n}-a'_n\|\\ &\le (1-c)^{2n}(1+(1+c)^2+2c(1+c)k+c^2k^2)\\ &\quad + \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n)-a'_n\|.\end{aligned}$$

On impose à e_{n+1} de vérifier la condition

$$(\mathcal{C}_1)\qquad \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n)-a'_n\| \le 1/2^n.$$

Puisque $c \in]0,1[$ on a ainsi imposé à la série $\sum_{n\ge 0}\|a_{n+1}-a_n\|$ de converger. D'où la suite $(a_n)_{n\ge 0}$ est de Cauchy dans J'. Soit a sa limite dans J'. Comme $a_n=(1-c)^{2n}+a'_n$ (avec $a'_n \in J$), donc $(a'_n)_{n\ge 0}$ converge vers a et $a \in J$.

Pour tout $n \ge 0$, posons $y_n = U_{a_n}^{-1}(z) \in J$. On construit e_{n+1} de sorte que $(y_n)_{n\ge 0}$ soit de Cauchy par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-y_n\| &= \|U_{a_{n+1}}^{-1}(z)-U_{a_n}^{-1}(z)\|\\ &= \|U^{-1}_{U_{1-c+ce_{n+1}}(a_n)}(z)-U_{a_n}^{-1}(z)\|\\ &= \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z)-U^{-1}_{a_n}(z)\|\\ &\qquad\qquad\text{(d'après l'identité } U_{U_x(y)}=U_xU_yU_x)\\ &\le \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z)-U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}(z)\|\\ &\quad + \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}U^{-1}_{a_n}(z)-U^{-1}_{a_n}(z)\|\\ &\le \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}\|\cdot\|U^{-1}_{a_n}\|\cdot\|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z)-z\|\\ &\quad + \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(Z)-Z\|,\end{aligned}$$

où $Z=U_{a_n}^{-1}(z)$ est un élément de J qui ne dépend pas de e_{n+1}.

D'après le lemme II.1(4), $\|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}\| \le \sup\{\|U^{-1}_{1-c+ce}\| : e \in F\} \le R < \infty$. De même II.1(5) montre qu'on peut choisir e_{n+1} tel que

$$(\mathcal{C}_2)\qquad \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(z)-z\| \le \frac{2^{-(n+2)}\delta}{R\|U^{-1}_{a_n}\|},$$

$$(\mathcal{C}_3)\qquad \|U^{-1}_{1-c+ce_{n+1}}(Z)-Z\| \le \delta/2^{n+2}.$$

Ainsi $\|y_{n+1}-y_n\| \le \delta/2^{n+1}$ et $(y_n)_{n\ge 0}$ converge vers y dans J.

Puisque pour tout $n \ge 0$, $z = U_{a_n}(y_n)$, on a $z = U_a(y)$. De plus, $y = \lim_{n\to\infty} U_{a_n}^{-1}(z) \in \overline{U_{J'}(z)}$. Ceci prouve les conditions (1) et (4) du théorème.

On a $\|z-y\| = \lim_{n\to\infty}\|y_0-y_n\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|y_{n+1}-y_n\| < \delta$, d'où (3).

Finalement,

$$\begin{aligned}
\|a\| &= \lim_{n\to\infty} \|a_n\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) + a_0\| \\
&\le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_{n+1} - a_n\| \\
&\le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(1-c)^{2n}(1 + (1+c)^2 + 2c(1+c)k + c^2k^2) \\
&\quad + \|U_{1-c+ce_{n+1}}(a'_n) - a'_n\|] \\
&\quad \text{(d'après une majoration des } \|a_{n+1} - a_n\|,\ n \ge 0, \text{ calculée ci-dessus)} \\
&\le 1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(1-c)^{2n}(1 + (1+c)^2 + 2c(1+c)k + c^2k^2)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = M(k).
\end{aligned}$$

Ainsi $\|a\| \le M(k)$, constante indépendante de z et de δ, ce qui est la conclusion (2).

Le théorème suivant permet de généraliser la factorisation individuelle de II.2 à une partie compacte de J.

II.3. Théorème de factorisation multiple. *Soit J une algèbre de Jordan–Banach ayant une u.a.b. Alors il existe une constante M telle que pour tout $\delta > 0$ et toute partie compacte Z de J, il existe $a \in J$ et une partie Y de J tels que :*

(i) $\|a\| \le M$,
(ii) *pour tout $z \in Z$, il existe $y_z \in Y$ tel que $z = U_a(y_z)$ et*
(iii) $\|z - y_z\| \le \delta$,
(iv) $y_z \in \overline{U_{J'}(z)}$.

Preuve. Puisque Z est un compact, si $F = \{e_i : i \in I\}$ est une u.a.b. de J, on a $\lim_i e_i z = z$ et $\lim_i U_{e_i}(z) = z$ uniformément sur Z. On reprend la preuve de II.2.

II.4. Corollaire. *Si une algèbre de Jordan–Banach J admet une u.a.b. et si $(z_n)_{n\ge1}$ est une suite convergeant dans J vers z alors il existe $a \in J$ et une suite $(y_n)_{n\ge1}$ convergeant vers un élément y dans J telle que*

$$\forall n \ge 1, \quad z_n = U_a(y_n), \quad \textit{et} \quad z = U_a(y).$$

Preuve. On applique le théorème précédent à $Z = \{z_n : n \ge 1\} \cup \{z\}$.

En particulier, toute JB^*-algèbre vérifie les théorèmes II.2 et II.3.

Quelques applications de la factorisation dans le cas Jordan

Unité approchée bornée dénombrable. Une u.a.b. $F = \{e_i : i \in I\}$ de J est *dénombrable* si l'ensemble des indices I est dénombrable.

II.5. EXEMPLE. Soit J une algèbre de Jordan–Banach unitaire. L'algèbre $c_0(J)$ des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ qui convergent vers zéro admet une u.a.b. dénombrable : $F = \{e_n : n \geq 1\}$, où $e_n = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ a n composantes égales à 1 et les autres toutes nulles.

II.6. PROPOSITION. *Si une algèbre de Jordan–Banach séparable admet une u.a.b., alors elle en admet une dénombrable.*

Preuve. Notons $F = \{e_i : i \in I\}$ une u.a.b. de J. Soit $D = \{d_n : n \geq 1\}$ une partie dense dans J. Par récurrence on construit une suite $(i_n)_{n\geq 1}$ dans I telle que pour tout $n \geq 1$, $i_{n+1} \geq i_n$ et $\|e_{i_n} d_p - d_p\| \leq 1/n$, $\|U_{e_{i_n}}(d_p) - d_p\| \leq 1/n$, pour $p \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $F' = \{e_{i_n} : n \geq 1\}$ est une u.a.b. de J.

II.7. COROLLAIRE. *Si une algèbre de Jordan–Banach J de dimension finie admet une u.a.b., alors elle est unitaire.*

Preuve. D'après la proposition II.6, J admet une u.a.b. dénombrable F. Or F est une suite bornée dans J de dimension finie, donc F contient une sous-suite convergente $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Soit e sa limite dans J. Pour tout $x \in J$, $ex = xe = \lim_{n\to\infty} \xi_n x = x$.

II.8. PROPOSITION. *Soit J une algèbre de Jordan–Banach. Si J admet une u.a.b. dénombrable alors il existe un élément a de J tel que $J = \overline{U_a(J)}$.*

Preuve. Notons $F = \{e_n : n \geq 1\}$ une u.a.b. de J. Pour tout $n \geq 1$, posons $z_n = (1/n)e_n$. La suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge vers zéro, donc il existe $a \in J$ et une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers zéro dans J tels que $z_n = U_a(y_n)$ pour tout $n \geq 1$. Soit $z \in J$. On a

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n\to\infty} U_{e_n}(z) = \lim_{n\to\infty} U_{z_n}(n^2 z), \\ &= \lim_{n\to\infty} U_a U_{y_n} U_a(n^2 z) \qquad (\text{car } U_{U_a(y_n)} = U_a U_{y_n} U_a) \\ &= \lim_{n\to\infty} U_a(U_{y_n} U_a(n^2 z)), \qquad \text{donc } z \in \overline{[U_a(J)]}. \end{aligned}$$

II.9. COROLLAIRE. *Soit J une JB^*-algèbre. Si J est séparable, alors il existe x dans J tel que $J = \overline{U_x(J)}$.*

Preuve. On a vu que J admet une u.a.b. Il suffit d'appliquer II.8.

III. Factorisation dans les algèbres de Jordan–Banach non commutatives

III.1. *Rappels*. Dans ce paragraphe J est une algèbre de Jordan–Banach non commutative sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, J est munie :

(i) d'un produit vérifiant

$$\forall x, y \in J, \qquad x(yx) = (xy)x \quad \text{et} \quad x^2(yx) = (x^2y)x;$$

(ii) d'une norme d'espace de Banach qui vérifie $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ pour tous $x, y \in J$.

Alors $J' = J \oplus \mathbb{C}$ est une algèbre de Jordan–Banach non commutative unitaire. Un élément x de J' est inversible s'il existe un y dans J' tel que $xy = yx = 1$ et $x^2y = yx^2 = x$.

III.2. PROPRIÉTÉ [5]. *Si on note* $\operatorname{Inv}(J)$ *l'ensemble des éléments inversibles de* J *et* J^+ *l'espace vectoriel* J *muni du produit de Jordan*, *alors* J^+ *est une algèbre de Jordan et on a* $\operatorname{Inv}(J) = \operatorname{Inv}(J^+)$.

Une conséquence de cette propriété est que l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Jordan–Banach n.c. unitaire est un ouvert de J.

McCrimmon a défini les applications linéaires suivantes :

III.3. DÉFINITION [5]. Soit J une algèbre de Jordan n.c. Pour tout $x \in J$ on considère l'application $U_x : J \to J$ telle que

$$y \mapsto U_x(y) = x(xy + yx) - x^2y = (xy + yx)x - yx^2.$$

Si on note $L_x(y) = xy, R_x(y) = yx$ et $V_x = L_x + R_x$, alors

$$U_x = L_xV_x - L_{x^2} = R_xV_x - R_{x^2}.$$

Posons $U_{a,b} = U_{a+b} - U_a - U_b$.

III.4. LEMME. *Soit* J *une algèbre de Jordan n.c. Alors les opérateurs* U_x *et* $U_x^{(\circ)}$ *définis respectivement dans* J *et* J^+ *par*

$$U_x = L_xV_x - L_{x^2} = R_xV_x - R_{x^2} \quad \textit{et} \quad U_x^{(\circ)} = 2(L_x^{(\circ)})^2 - L_{x^2}^{(\circ)}$$

coïncident.

Preuve. Soient $x, y \in J$. On a

$$\begin{aligned} U_x^{(\circ)}(y) &= 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y = [x(x \circ y) + (y \circ x)x] - \tfrac{1}{2}[x^2y + yx^2] \\ &= xyx + \tfrac{1}{2}[x(xy) - x^2y] + \tfrac{1}{2}[(yx)x - yx^2] \\ &= \tfrac{1}{2}[(xyx + x(xy) - x^2y) + (xyx + (yx)x - yx^2)] = U_x(y). \end{aligned}$$

III.5. DÉFINITION. On dit qu'une famille d'éléments de J, $F = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, est une *unité approchée bornée* de J, si $\{\|e_i\| : i \in I\}$ est bornée, Λ est filtrant à droite et pour tout $x \in J$ on a :

(i) $\lim_\lambda \|e_\lambda x + xe_\lambda - 2x\| = 0$,
(ii) $\lim_\lambda [U_{e_\lambda}(x)] = x$.

III.6. Exemples. (1) Soit A est une algèbre de Banach ayant une unité approchée bornée, à gauche et à droite, $F = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Alors A est une algèbre de Jordan–Banach n.c. et F est une unité approchée bornée au sens de la définition III.5. En effet, par hypothèse on a (i) et

$$\begin{aligned}\|U_{e_\lambda}(x) - x\| &= \|e_\lambda(e_\lambda x) + e_\lambda x e_\lambda - e_\lambda^2 x - x\| \\ &= \|e_\lambda x e_\lambda - x\| \quad \text{(car } A \text{ est associative)} \\ &\le \|e_\lambda x e_\lambda - x e_\lambda\| + \|x e_\lambda - x\|, \\ &\le \|e_\lambda\|(\|e_\lambda x - x\| + \|x e_\lambda - x\|)\end{aligned}$$

et le dernier membre converge vers zéro selon Λ.

(2) Soit A une algèbre de Jordan–Banach n.c. On note J l'ensemble des suites convergeant vers zéro dans A. On munit J des opérations naturelles et de la norme sup. Pour tout $n \ge 1$, soit $e_n = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ à n premières composantes égales à 1 et les autres toutes nulles. Alors $\{e_n : n \ge 1\}$ est une u.a.b. de J.

(3) On rappelle qu'une C^*-algèbre de Jordan non commutative est une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan Banach n.c. munie d'une involution multiplicative vérifiant :

(α) $\|x^*\| = \|x\|$,
(β) $\|U_x(x^*)\| = \|x\|^3$.

Un exemple intéressant de telles algèbres est celui des B^*-algèbres alternatives : ce sont les algèbres alternatives normées complètes munies d'une involution multiplicative telle que $\|x^*x\| = \|x\|^2$ (condition équivalente à (α) et (β) ci-dessus).

Remarquons que si A est une C^*-algèbre de Jordan n.c. alors A^+ est une JB^*-algèbre pour la même norme et la même involution. En effet, $U_x^{(0)} = U_x$. Donc si $\Lambda = \{e \in A : e^* = e,\ e \ge 0 \text{ et } \|e\| < 1\}$, alors Λ est une u.a.b. de A^+, c'est-à-dire, $\lim_e \|ex + xe - 2x\| = 0$ et $\lim_e \|U_e^{(\circ)}(x) - x\| = 0$. Donc Λ est une u.a.b. de A.

III.7. Théorème. *Soit J une algèbre de Jordan–Banach non commutative ayant une u.a.b. Alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $z \in J$ et tout $\delta > 0$, il existe $a, y \in J$ tels que* :

(i) $z = U_a(y)$,
(ii) $\|z - y\| < \delta$,
(iii) $\|a\| \le M$,
(iv) $y \in \overline{U_{J'}(z)}$.

Preuve. Considérons l'algèbre J^+ égale à J munie du produit de Jordan. Soit $F = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une u.a.b. de J. Alors F est une u.a.b. pour J^+, au sens de la définition III.5. En effet,

$$\begin{aligned}\|e_\lambda \circ x - x\| &= \tfrac{1}{2}\|e_\lambda x + xe_\lambda - 2x\| \\ &\le \tfrac{1}{2}(\|e_\lambda x - x\| + \|xe_\lambda - x\|) \to 0 \quad \text{selon } \Lambda.\end{aligned}$$

D'après le lemme III.4, on a

$$\|U_{e_\lambda}^{(\circ)} - x\| = \|U_{e_\lambda}(x) - x\| \to 0 \quad \text{selon } \Lambda.$$

Donc F est une u.a.b. pour l'algèbre de Jordan–Banach J^+. Le théorème II.2 implique qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour $\delta > 0$ et $z \in A$ il existe $a, y \in J^+$ qui satisfont les relations suivantes :

(i) $z = U_a^{(\circ)}(y) = U_a(y)$,
(ii) $\|y - z\| < \delta$,
(iii) $\|a\| \le M$,
(iv) $y \in \overline{U_{J'}^{(\circ)}(z)} = \overline{U_{J'}(z)}$.

III.8. Proposition. *Si A est une algèbre de Banach ayant une u.a.b. à gauche et à droite, alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$ et tout $z \in A$, il existe $a, y \in A$ tels que* :

(i) $z = aya$,
(ii) $\|z - y\| < \delta$,
(iii) $\|a\| \le M$,
(iv) $y \in \overline{A'zA'}$, $A' = A \oplus \mathbb{C}$.

Preuve. A est une algèbre de Jordan–Banach n.c. admettant une u.a.b. Il suffit d'appliquer le théorème.

De même, on a le théorème suivant :

III.9. Théorème. *Soit J une algèbre de Jordan–Banach n.c. ayant une u.a.b. Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ et pour toute partie compacte Z de J il existe $a \in J$ et une partie Y de J avec* :

(i) *pour tout $z \in Z$, il existe $y_z \in Y$ tel que $z = U_a(y_z)$*,
(ii) *pour tout $z \in Z$, $\|y_z - z\| < \delta$*,
(iii) *pour tout $z \in Z$, $y_z \in \overline{U_{J'}(z)}$*,
(iv) *$\|a\| \le M$.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme III.4 et du théorème II.2.

III.11. Remarques. (1) Si une algèbre de Jordan–Banach J admet une u.a.b. alors J est une algèbre de Jordan–Banach n.c. ayant une u.a.b. et les deux factorisations II.2 et III.7. coïncident. Et si une algèbre de Jordan–Banach non commutative A admet une u.a.b. F, alors F est une u.a.b. de l'algèbre de Jordan–Banach $J = A^+$ et les factorisations dans A et J coïncident.

(2) Soit A une algèbre alternative normée complète contenant une famille $F = \{e_i : i \in I\}$ telle que :

(i) I est filtrant à droite,
(ii) $\sup\{\|e_i\| : i \in I\} \leq k < \infty$,
(iii) $\lim_i \|e_i x - x\| = 0$ et $\lim_i \|x e_i - x\| = 0$.

Alors A est une algèbre de Jordan–Banach n.c. ayant une u.a.b. au sens de la définition III.5. Donc A vérifie le théorème III.7, c'est-à-dire,

$$\forall z \in J,\ \exists a, y \in J \quad \text{tels que} \quad z = a(ya + ay) - a^2 y = aya.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. G. Dixon, *Unbounded approximate identity in normed algebras*, Glasgow Math. J. 34 (1992), 189–192.
[2] S. Doran and J. Wichman, *Approximate Identities and Factorization in Banach Modules*, Lecture Notes in Math. 768, Springer, 1979.
[3] H. Hanche-Olsen and E. Størmer, *Jordan Operator Algebras*, Pitman Adv. Publ. Program, 1984.
[4] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 39, Providence, R.I., 1968.
[5] K. McCrimmon, *Noncommutative Jordan rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 158 (1971), 1–33.
[6] —, *Norms and noncommutative Jordan algebras*, Pacific J. Math. 15 (1965), 925–956.
[7] —, *The radical of a Jordan algebra*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 62 (1969), 671–678.
[8] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, 1966.
[9] A. M. Sinclair, *Bounded approximate identities, factorization and a convolution algebra*, J. Funct. Anal. 29 (1978), 308–318.
[10] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov and A. I. Shirshov, *Rings That are Nearly Associative*, Academic Press, New York, 1982.

Université de Bordeaux I
U.F.R. de Mathématiques et Informatique
33405 Talence Cedex, France

Reçu par la Rédaction le 3.1.1995;
en version modifiée le 30.8.1995