C O L L O Q U I U M   M A T H E M A T I C U M

VOL. LXX | 1996 | FASC. 1

ÉTUDE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL NON LINÉAIRE RÉGISSANT UN PHÉNOMÈNE GYROSCOPIQUE FORCÉ

PAR

MOURAD BENABAS (ROUEN)

I. Introduction. Dans cet article, on se propose d'illustrer la théorie de la dualité formulée par F. Clarke et I. Ekeland (voir [3]) et la théorie de l'index de Morse pour l'étude du système différentiel du second ordre

$$\text{(e)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + 2K\dot{x}(t) + V'(t, x(t)) = f(t), \\ x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T), \end{cases}$$

où K est un opérateur antisymétrique sur $\mathbb{R}^{2n}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ une fonction de $L_0^r(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2n})$, $1 < r < \infty$ et $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un potentiel qui dépend T-périodiquement du temps et est strictement convexe, de classe C^1 par rapport à x et tel que

$$\text{(0)} \qquad V(t, x) > V(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}.$$

La méthode de dualité de Clarke–Ekeland consiste à résoudre des systèmes différentiels par la recherche de points critiques de fonctionnelles dites d'action duales dans des espaces bien définis. La théorie de l'index de Morse nous permet d'obtenir des solutions (voir [6]) et des propriétés qualitatives des solutions par les relations de Morse (voir [4]). La première application de ces deux théories a été pour les systèmes hamiltoniens généraux du premier ordre

$$\dot{x}(t) = JH'(t, x(t)), \quad x(0) = x(T)$$

(voir [3]). Dans le cas où H est sous-quadratique, Ekeland et Clarke ont montré que le système hamiltonien admet au moins une solution de période minimale T. Dans le cas H sur-quadratique, Rabinowitz (1978) et Ekeland (1980) ont montré l'existence d'une solution non triviale. Par la suite Ekeland et Hofer ont montré l'existence de solutions à période minimale T (1984) (voir [8]) et l'existence de sous-harmoniques géométriquement distinctes (1986) (voir [9]). Ambrosetti et Coti Zelati se sont intéressés par la

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 34C25, 58F05.

suite au système du second ordre avec potentiel

$$\ddot{x}(t) + V'(x(t)) = 0, \quad x(0) = x(T),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T),$$

et ont montré l'existence d'au moins une solution T-périodique non triviale à période minimale T (voir [1]). Enfin, Assem a montré dans [2] que le système autonome

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha J\dot{x}(t) + V'(x(t)) = 0, \quad x(0) = x(T),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T),$$

admet dans le cas sur-quadratique au moins une solution qui est pour α très petit à période minimale T et dans le cas sous-quadratique au moins une solution non triviale.

Notre système différentiel (e) est dit de *type gyroscopique non autonome*. On étudie le cas où $K = \alpha J$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$$

une matrice de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ avec 0_n et I_n matrices nulle et identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas la solution de (e) décrit le mouvement d'un pendule de Foucault par rapport à la rotation de la terre. Parmi les chercheurs qui ont travaillé sur ce genre de système je citerai Mme Truc qui a étudié un système gyroscopique avec la dualité Ekeland–Lasry et MM Girardi et Matzeu avec l'opérateur différentiel $L_T = J\frac{d}{dt} + Q$, Q une matrice différentiable. Quant à nous, nous considérons deux cas, le premier suppose V sur-quadratique et le second V sous-quadratique.

II. Formulation variationnelle. On définit l'espace

$$W^{2,r}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n}) = \Big\{x \in W^{2,r}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n}) : \int_0^T x(t)\,dt = 0\Big\}$$

et notons r^* le conjugué de r, i.e. $1/r + 1/r^* = 1$.

Proposition II.1. *L'opérateur $A_{T,\alpha} = d^2/dt^2 + 2\alpha J d/dt$ défini sur $W^{2,r}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ et à valeurs dans $L^r_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ est linéaire, continu, inversible pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha T \notin \pi\mathbb{Z}$ et d'inverse $L_{T,\alpha}$. De plus, $L_{T,\alpha} : L^r_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \to L^{r^*}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ est linéaire, continu, compact et auto-adjoint.*

Démonstration. Il est clair que $A_{T,\alpha}$ est linéaire. De plus, il est continu : $\|A_{T,\alpha}x\|_r \le \min\{1, 2\alpha\}\|x\|_{2,r}$, où $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{2,r}$ désignent les normes dans L^r et $W^{2,r}$ respectivement.

Montrons que $A_{T,\alpha}$ est surjectif. Soit $y \in L^r_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$ et considérons la série de Fourier associée $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} y_k e^{2i\pi kt/T}$ avec $y_{-k} = \overline{y}_k$. On cherche x dans $W^{2,r}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ tel que $A_{T,\alpha}x = y$. On cherche x sous la forme

$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} e^{2i\pi kt/T} x_k$. Alors $A_{T,\alpha}x = y$ nous donne

$$x_k = -\frac{T^2}{4k\pi(k\pi + \alpha T)} y_k, \qquad k \in \mathbb{Z}^*,$$

et

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} -\frac{T^2}{4k\pi(k\pi + \alpha T)} y_k e^{2i\pi kt/T}$$

existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$. De plus, $x \in W^{2,r}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ par suite d'une version du lemme d'Abel sur les séries et car $y \in L^r(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

On aurait pu montrer la surjectivité en ramenant le système du second ordre $A_{T,\alpha}x = y$ à un système du premier ordre.

Montrons que $A_{T,\alpha}$ est injectif. Si $A_{T,\alpha}x = 0$, on a $\dot{x}(t) + 2\alpha Jx(t) = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$. Les conditions aux limites impliquent que $\xi = 0$ et

$$\dot{x}(t) + 2\alpha Jx(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ (voir [12], Chap. 3). D'où $A_{T,\alpha}$ est injectif, donc bijectif pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$.

$L_{T,\alpha}$ est linéaire et continu d'après le théorème de l'application ouverte. Il est compact grâce à l'injection compacte du type Rellich–Kondrachov $W^{2,r}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \subset W^{1,r}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ et à l'injection continue $W^{1,r}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \subset L^{r^*}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Enfin, on vérifie facilement que

$$\int_0^T (L_{T,\alpha}y(t), y(t))\, dt = \int_0^T (y(t), L_{T,\alpha}y(t))\, dt,$$

i.e. $L_{T,\alpha}$ est auto-adjoint. ∎

On définit une fonctionnelle duale ϕ de $L^r(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par

$$\phi(y) = \int_0^T \left\{ \tfrac{1}{2}(L_{T,\alpha}y, y) + V^*(t, y + f) \right\} dt,$$

où V^* est la transformée de Fenchel qui dans notre cas (convexe et différentiable) devient la transformée de Legendre de V définie par

$$\begin{aligned} V^*(t,y) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}} \{(x,y) - V(t,x)\} \\ &= \{(x,y) - V(t,x) : y = V'(t,x)\}, \qquad y \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses sur V et au principe de la dualité de F. Clarke–I. Ekeland la résolution du problème (e) revient à la recherche des points critiques de ϕ. La relation entre points critiques de ϕ et solutions de (e) est donnée par : y_0 est un point critique de ϕ dans $L^r_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ si et seulement si $x_0 = -L_{T,\alpha}y_0 + \xi$, $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, est une solution de (e) dans $W^{2,r}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Comme x_0 et $L_{T,\alpha}y_0$ sont de moyenne nulle alors $\xi = 0$.

III. Cas où le potentiel V est sur-quadratique

III.1. *L'existence de solutions.* On dira que V est *sur-quadratique* si et seulement si

$$\exists q > 2,\ \forall x \in \mathbb{R}^{2n} \qquad (V'(x), x) \geq qV(x). \tag{1}$$

(1) est appelée *hypothèse de sur-quadraticité d'Ambrosetti–Rabinowitz*. On supposera de plus que V vérifie l'estimation

$$\exists l > 0, \qquad V(x) \leq \frac{l^q}{q}\|x\|^q. \tag{2}$$

Si $C^q/q = \min_{\|x\|=1} V(x)$ alors

$$V(x) \geq \frac{C^q}{q}(\|x\|^q - 1), \tag{3}$$

$$\|x\| \geq 1 \Rightarrow \|V'(x)\| \leq \frac{1}{q}(l^q 2^q - C^q)\|x\|^{q-1}. \tag{4}$$

En utilisant des résultats d'analyse convexe et la définition de V^* on montre que V^* est strictement convexe, de classe C^1 et si p est le conjugué de q, i.e. $1/p + 1/q = 1$, on a les propriétés suivantes :

Lemme III.1.1. *Pour tout $y \in \mathbb{R}^{2n}$, $V^*(y) > V^*(0) = 0$ et*

$$\forall y \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad (y, V^{*\prime}(y)) \leq pV^*(y), \tag{5}$$

$$V^*(y) \geq \frac{1}{pl^p}\|y\|^p, \tag{6}$$

$$V^*(y) \leq \frac{1}{pC^p}\|y\|^p + \frac{C^q}{q}, \tag{7}$$

$$\|V^{*\prime}(y)\| \leq \frac{1}{p}(2^p C^{-p} - l^{-p})\|y\|^{p-1} + \frac{C^q}{q}. \tag{8}$$

(5)–(8) se déduisent de (1)–(4) respectivement. Voir [10] pour une démonstration détaillée.

Comme $q > 2$ alors $p \in (1, 2)$ et on établit le résultat suivant :

Théorème III.1.1. *Si le potentiel V est strictement convexe, de classe C^1 et vérifie* (0), (1) *et* (2) *alors pour $\|f\|$ assez petit dans $L_0^p(0,T)$, $f \not\equiv 0$, et pour tout $T > 0$, $T \notin \frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$, le système différentiel* (e) *admet au moins deux solutions non triviales dans $W_{=}^{2,p}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$.*

Démonstration. Une solution est trouvée grâce au théorème du col dû à Ambrosetti et Rabinowitz (1973).

Définitions III.1.1. Soit E un espace de Banach et $\phi : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction Gateaux différentiable. On dit que ϕ satisfait la *condition $P.S._c$* si de toute suite $(x_n)_n$ vérifiant $|\phi(x_n)| \leq c$ et $\phi'(x_n) \to 0$ dans E^*, on peut extraire une sous-suite convergente.

On dit que la fonction ϕ satisfait la *condition weak-P.S.$_c$* si pour toute suite $(x_n)_n$ vérifiant $|\phi(x_n)| \le c$ et $\phi'(x_n) \to 0$ dans E^* il existe $x_1 \in E$ tel que $\phi'(x_1) = 0$ et $\liminf_n \phi(x_n) \le \phi(x_1) \le \limsup_n \phi(x_n)$.

THÉORÈME DU COL. *Soit E un espace de Banach et ϕ une fonction de E dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de classe C^1. Supposons que*

(i) *il existe a, $s_0 > 0$ tels que $\|x\|_E = s_0 \Rightarrow \phi(x) \ge a > 0$,*
(ii) *$\phi(0) = 0$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\|_E > s_0 \Rightarrow \phi(x_0) < 0$,*
(iii) *ϕ satisfait la condition weak-P.S.$_c$.*

Alors pour $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x_0\}$ et

$$d = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t))$$

on a $d > 0$ et il existe $\overline{x} \in E$ tel que $\phi'(\overline{x}) = 0$ et $\phi(\overline{x}) = d$.

Voir la démonstration dans [3].

Pour $z = y + f$, on a

$$\phi(y) = \int_0^T \tfrac{1}{2}(L_{T,\alpha} f, f)\, dt + \overline{\phi}(z), \tag{9}$$

où

$$\overline{\phi}(z) = \tfrac{1}{2}\langle L_{T,\alpha} z, z\rangle - \langle L_{T,\alpha} f, z\rangle + \int_0^T V^*(z(t))\, dt.$$

Remarques III.1.1. Si $f \equiv 0$ alors $z = y$ et $\phi = \overline{\phi}$.

Si $y, f \in L_0^r(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ alors $y + f \in L_0^r(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

z est un point critique de $\overline{\phi}$ si et seulement si $y = z - f$ est un point critique de ϕ.

z est un minimum local (resp. global) de $\overline{\phi}$ si et seulement si $y = z - f$ est un minimum local (resp. global) de ϕ.

z est un point critique de $\overline{\phi}$ si et seulement si $\overline{x} = -L_{T,\alpha}\overline{y} + L_{T,\alpha} f$ est une solution de (e).

On montrera que $\overline{\phi}$ vérifie les hypothèses du théorème du col sur $L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ (voir [5]).

LEMME III.1.2. *La fonctionnelle $\overline{\phi}$ définie de $L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par*

$$\overline{\phi}(z) = \int_0^T \tfrac{1}{2}(L_{T,\alpha} z, z)\, dt - \int_0^T (L_{T,\alpha} f, z)\, dt + \int_0^T V^*(z(t))\, dt$$

est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est de classe C^1.

En effet, (7) implique que $\overline{\phi} : L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'hypothèse (8) et le fait que V^* soit de classe C^1 entraînent d'après un théorème de Krasnosel'skiĭ (voir [10], p. 75) que $\overline{\phi}$ est de classe C^1 (voir [5]). ■

Notons $\varrho(T,\alpha) = \|L_{T,\alpha}\|$. Alors on a

Lemme III.1.3. *Si*

$$\|f\|_p < \frac{2-p}{\varrho(T,\alpha)pl^p}\left(\frac{\varrho(T,\alpha)pl^p}{2p-2}\right)^{(p-1)/(p-2)},$$

alors il existe a et s_0 strictement positifs tels que

$$\|z\|_p = s_0 \Rightarrow \overline{\phi}(z) \geq a.$$

En effet, par Cauchy–Schwarz et (6) on a $\overline{\phi}(z) \geq \varphi(\|z\|_p)$, où φ est une fonction définie par

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2}\varrho(T,\alpha)s^2 - \varrho(T,\alpha)\|f\|_p s + \frac{1}{pl^p}s^p, \qquad s \in \mathbb{R},$$

et pour

$$s_0 = \left(\frac{\varrho(T,\alpha)pl^p}{2p-2}\right)^{1/(p-2)} \quad \text{et} \quad a = \varphi(s_0),$$

$\overline{\phi}$ vérifie (i) du théorème du col pour

$$\|f\|_p < \frac{2-p}{\varrho(T,\alpha)pl^p}s_0^{p-1}.$$

Lemme III.1.4. *$\overline{\phi}(0) = 0$ et il existe $x_0 = sz_k$ ($s > 0$ assez grand, k tel que $\lambda_k < 0$, λ_k et z_k étant la valeur et le vecteur propres de $L_{T,\alpha}$) tel que $\|x_0\|_p > s_0$ et $\overline{\phi}(x_0) < 0$.*

Ici, s est pris assez grand pour que $\|x_0\|_p > s_0$ et on a $\overline{\phi}(x_0) \leq 0$ grâce à la propriété (7) et au fait que $p \in (1,2)$.

Lemme III.1.5. *$\overline{\phi}$ vérifie la condition weak-P.S.$_c$.*

Démonstration. Soit $(z_n)_n \subset L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $K > 0$ avec $|\overline{\phi}(z_n)| \leq K$ et $\overline{\phi}'(z_n) \to 0$ dans $L^q(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, i.e.

$$\frac{1}{2}\langle L_{T,\alpha}z_n, z_n\rangle - \langle L_{T,\alpha}f, z_n\rangle + \int_0^T V^*(z_n(t))\,dt \leq K, \tag{10}$$

$$L_{T,\alpha}z_n - L_{T,\alpha}f + V^{*\prime}(z_n) = \xi_n \to 0. \tag{11}$$

Alors en introduisant (11) dans (10) et en utilisant (9), (6) puis Cauchy–Schwarz on tire que

$$\left(1 - \frac{p}{2}\right)\frac{1}{pl^p}\|z_n\|_p^p - \frac{1}{2}\|\xi_n\| \cdot \|z_n\|_p - \frac{1}{2}\|L_{T,\alpha}f\| \cdot \|z_n\|_p \leq K.$$

Comme $p \in (1,2)$ et $\|\xi_n\|_q \to 0$ alors $(z_n)_n$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ qui est réflexif. D'où modulo une sous-suite $z_n \rightharpoonup \overline{z}$ dans $L^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. D'autre part, (11) implique

$$z_n = V'(\xi_n - L_{T,\alpha} z_n + L_{T,\alpha} f) \tag{12}$$

et la compacité de l'opérateur $L_{T,\alpha}$ entraîne que $\xi_n - L_{T,\alpha} z_n + L_{T,\alpha} f$ converge vers $-L_{T,\alpha}\overline{z} + L_{T,\alpha} f$. Par ailleurs, la continuité de V', la propriété (4) et le théorème de Krasnosel'skiĭ (voir [10], p. 75) impliquent la continuité de l'application $u \mapsto V'(u)$ définie de $L^q_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ dans $L^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Par suite, $z_n = V'(\xi_n + L_{T,\alpha} f - L_{T,\alpha} z_n)$ converge dans $L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ et alors modulo une sous-suite $(z_n)_n$ converge fortement dans $L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ d'après (12). Ainsi $\overline{\phi}$ vérifie la condition P.S.$_c$ et comme elle est de classe C^1 alors elle vérifie weak-P.S.$_c$.

En utilisant l'inégalité de convexité de V^*, on peut continuer directement par montrer que $\overline{\phi}$ vérifie la condition weak-P.S.$_c$ en montrant que $\overline{\phi}'(\overline{z}) = 0$ et $\lim_n \overline{\phi}(z_n) = \overline{\phi}(\overline{z})$. ■

Ainsi $\overline{\phi}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème du col et alors

$$\exists z_1 \in L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}), \qquad \overline{\phi}'(z_1) = 0 \text{ et } \overline{\phi}(z_1) = d^* > 0$$

avec

$$d^* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \overline{\phi}(\gamma(t))$$

et

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})) : \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = x_0\};$$

cela donne un point critique

$$y_1 = z_1 - f \in L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}), \qquad \phi'(y_1) = 0,$$

et

$$\phi(y_1) = d^* + \frac{1}{2}\langle L_{T,\alpha} f, f\rangle = d > \frac{1}{2}\langle L_{T,\alpha} f, f\rangle \qquad (\in \mathbb{R}).$$

Au point critique y_1 de ϕ dans $L^p_0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ correspond une solution $x_1 = -L_{T,\alpha} y_1 = -L_{T,\alpha} z_1 + L_{T,\alpha} f$ de (e) dans $W^{2,p}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Estimation a priori. Soit

$$\overline{\gamma}(s) = s \exp\Big(-\frac{2k_0\pi}{T} Jt\Big)\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On a $\overline{\gamma} \in \Gamma$ et

$$\phi(\overline{\gamma}(s)) \le -\frac{s^2}{2} \cdot \frac{T^3}{4\pi k_0(k_0\pi - \alpha T)} \|\xi\|^2 + \frac{s^p 2^p}{pC^p}\|\xi\|^p T + \frac{2^p}{pC^p}\|f\|_p^p + \frac{C^q}{q} T = g(s),$$

ce qui implique que pour $T < k_0\pi/\alpha$, $\phi(\overline{\gamma}(s)) \to -\infty$ quand $s \to \infty$. On choisit alors $\overline{s}$ assez grand de telle sorte que $\phi(\overline{\gamma}(\overline{s})) < 0$ et on montre que le maximum de g sur $[0,\overline{s}]$ est atteint en un point s_1 tel que

$$\begin{aligned} g(s_1) &= T\left(\frac{4\pi k_0(k_0\pi-\alpha T)}{T^2}\right)^{q/(q-2)}\left(\frac{2}{c}\right)^{2q/(q-2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right) \\ &\quad+\frac{C^q}{q}T+\frac{2^p}{p}\cdot\frac{\|f\|_p^p}{C^q} \\ &= c(T,\alpha). \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ borné inférieurement par une constante, on a $c(T,\alpha) \le c(T) = c$, constante qui dépend uniquement de T. Ainsi

$$d = \phi(y_1) \le \max_{s\in[0,\overline{s}]} \phi(\overline{\gamma}(s)) \le g(s_1) = c(T,\alpha) \le c(T) = c.$$

On revient maintenant à l'expression de ϕ avec $f \equiv 0$; alors sachant que y_1 est un point critique de ϕ et que V^* vérifie (5) et (6) on tire que $\|y_1\|_p \le c' = lp^{1/p}c(T)^{1/p}(1-p/2)^{-1/p}$, i.e. le point critique y_1 est borné indépendamment du réel α lorsque ce dernier est borné inférieurement par une constante et supérieurement par $k_0\pi/T$.

L'autre solution est donnée par minimisation (voir [5] pour les détails). En effet, $\overline{\phi}$ est bornée inférieurement sur une boule fermée $\overline{B}(0,s_0)$, par conséquent admet une suite minimisante $(z_n)_n$ dans $\overline{B}(0,s_0) \subset L^p$. L^p étant réflexif puisque $p>1$, alors modulo une sous-suite $z_n \rightharpoonup z_2$ dans L^p et $z_2 \in \overline{B}(0,s_0)$. Le lemme de Fatou et la compacité de $L_{T,\alpha}$ entraînent que

$$\overline{\phi}(z_2) \ge \lim_n \overline{\phi}(z_n) = \inf_{z\in\overline{B}(0,s_0)} \overline{\phi}(z) \ge \overline{\phi}(z_2).$$

z_2 est donc un minimum local de $\overline{\phi}$, donc un point critique de $\overline{\phi}$ dans $L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Il lui correspond un point critique $y_2 = z_2 - f$ de ϕ qui est aussi un minimum local de ϕ dans $\overline{B}(-f,s_0)$ et une solution $x_2 = -L_{T,\alpha}y_2$ du problème (e) dans $W_{=}^{2,p}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Les solutions x_1 et x_2 sont distinctes. En effet, si $x_1 = x_2$ alors $-L_{T,\alpha}y_1 = -L_{T,\alpha}y_2$, c'est-à-dire que $y_1 = y_2$ puisque $L_{T,\alpha}$ est bijectif. Or $\phi(y_1) > \frac{1}{2}\langle L_{T,\alpha}f,f\rangle$ d'après le théorème du col et $\phi(y_2) = \inf_{y\in\overline{B}(-f,s_0)}\phi(y) \le \phi(-f) = \frac{1}{2}\langle L_{T,\alpha}f,f\rangle$; impossible.

On montre que pour tout f, la solution x_1 n'est pas triviale, que pour tout $f \not\equiv 0$ la solution x_2 n'est pas triviale et on établit, sous l'hypothèse

$$\|V'(x(t))\| \ge c\|x(t)\|^{q-1} \quad \text{p.p. pour un certain } c>0, \tag{13}$$

que

$$\|x_2\| \le \left(\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{q-2}\|f\|_p\right)^{1/(q-1)}$$

et donc pour $f \equiv 0, x_2 \equiv 0$ (voir [5]).

Le théorème III.1.1 sur l'existence de solution de (e) est ainsi établi.

Remarques III.1.2. Lorsque V est défini de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ (i.e. $V = V(t, x(t))$) alors si en plus des hypothèses du théorème III.1.1, V est mesurable et T-périodique par rapport à la première variable t on tire par le même raisonnement l'existence de deux solutions non triviales x_1 et x_2 du problème (e) dans $W^{2,p}_{=}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ (x_1 obtenue par le théorème du col et x_2 par minimisation).

Dans le cadre de l'existence de la solution x_2, on peut supprimer (voir [5]) l'hypothèse auxiliaire (2) en supposant de plus que V est de classe C^2 dans un voisinage de l'origine et $V''(x)$ défini-positif dans un voisinage de l'origine à l'exception de zéro. Ces deux dernières hypothèses nous permettent d'avoir (13).

On pose $\mathrm{Cr}(\phi, d) = \{y \in L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : \phi'(y) = 0 \text{ et } \phi(y) = d\}$.

DÉFINITION III.1.2. $y_0 \in \mathrm{Cr}(\phi, d)$ est dit de *type mountain pass* (en abrégé m.p.) si et seulement si pour tout voisinage ouvert U de y_0, $\{y \in U : \phi(y) < d\}$ n'est ni vide ni connexe par arcs.

Le théorème suivant (voir [11]) représente la plus forte version du théorème du col.

THÉORÈME III.1.2. *Soient e_0 et e_1 deux éléments distincts de $L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Définissons*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})) : \gamma(0) = e_0,\ \gamma(1) = e_1\},$$
$$d = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t))$$

et $c = \max\{\phi(e_0), \phi(e_1)\}$. Alors si $\phi \in C^1(L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}), \mathbb{R})$ vérifie la condition P.S.$_c$ et si $d > c$, on a $\mathrm{Cr}(\phi, d) \neq \emptyset$ et contient au moins un élément y_0 qui est un minimum local ou de type m.p. De plus, si les points de $\mathrm{Cr}(\phi, d)$ sont isolés alors l'ensemble a au moins un point critique de type m.p.

Dans notre cas précis on a ce résultat pour f assez petit dans $L_0^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. En effet, les hypothèses sur V impliquent que ϕ est de classe C^1 et vérifie la condition P.S.$_c$ et on a $d > c$ pour $\|f\|$ assez petit (voir lemme III.1.3).

III.2. *Minimalité de la période dans le cas autonome.* On s'intéresse maintenant à l'index d'une solution x_0 de (e), dit *index de Morse*, c'est-à-dire, l'index qui nous permet d'établir l'existence de solutions et leurs propriétés qualitatives grâce aux relations de Morse.

DÉFINITION III.2.1. La solution x_0 de (e) est dite *admissible* si x_0 est non constante et si $V^{*\prime\prime}(t, y_0(t) + f(t))$ est inversible pour tout $t \in [0, T]$, y_0 étant le point critique de ϕ associé à la solution x_0 de (e).

Pour $\tau > 0$ tel que $\tau\alpha \neq k\pi/T$, $k \in \mathbb{Z}$, on considère la forme quadratique

Q_τ définie sur $L^2(0,\tau T)$ par

$$Q_\tau(z) = \int_0^{\tau T} \{(L_{\tau T,\alpha} z, z) + (V^{*\prime\prime}(t, y_0 + f)z, z)\}\, dt,$$

où y_0 est le point critique de ϕ correspondant à la solution admissible x_0 de (e).

Définitions III.2.2. On appelle *index de* Q_τ, noté i_τ, la dimension maximale d'un sous-espace de $L^2(0,\tau T)$ sur lequel Q_τ est définie-négative.

On appelle *nullité de* Q_τ, notée n_τ, la dimension du noyau de la forme quadratique Q_τ.

L'*index* et la *nullité de la solution* x_0 de (e) sont i_1 et n_1.

L'index d'une solution x_0 nous donne le comportement du point critique y_0 associé à cette solution.

Théorème III.2.1. (a) *Si y_0 est un minimum local, alors $i_1 = 0$.*

(b) *Si y_0 est de type m.p., alors $i_1 \le 1$. Si $i_1 = 1$ alors il existe un voisinage ouvert W de y_0 tel que $\{y \in W : \phi(y) < \phi(y_0)\}$ a au plus deux composantes connexes par arcs. S'il y en a exactement deux, P_1 et P_2, et si λ_1 est la valeur propre négative de Q_1 et y_1 le vecteur propre associé, alors pour tout $\eta > 0$ assez petit, $y_0 - \eta y_1 \in P_1$ et $y_0 + \eta y_1 \in P_2$.*

Pour la démonstration voir [8].

Définition III.2.3. Pour x_0 une solution admissible de (e), $x_0(s)$ (resp. s) est dit *point conjugué* à $x_0(s)$ (resp. 0), où $s > 0$, si le système linéaire

$$(*) \qquad A_{T,\alpha} y = -V''(t, x_0(t))y, \quad y(0) = y(s),\ \dot{y}(0) = \dot{y}(s),$$

admet une solution non triviale.

On montre que la multiplicité ν_s du point conjugué s, qui n'est autre que la dimension de l'espace vectoriel des solutions du système $(*)$, est la nullité n_s de la forme quadratique Q_s.

On note par $O(x_0)$ le plus grand entier k tel que x_0 soit T/k-périodique et on montre facilement (voir [8]) que

$$\sharp\{s \in (0,T) : x_0(s) \text{ conjugué à } x_0(0)\} \ge O(x_0) - 1.$$

Le problème (e) est un système hamiltonien. L'hamiltonien correspondant est

$$H(t,x,y) = \tfrac{1}{2} y^2 + V(t, x(t)) + \alpha(Jy, x) + \tfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 - fx$$

avec $y = \alpha J x + \dot{x}$. Par conséquent, x est une solution de (e) si et seulement si $z = (x,y)$ est une solution de

$$(\mathrm{E}) \qquad \dot{z} = JH'(t,z), \quad z(0) = z(T).$$

De plus, la multiplicité ν_s du point conjugué s est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(R(sT)-I)$, où R est la résolvante du système linéaire

$$\text{(L)} \qquad \dot u = JH''(t,z_0)u, \qquad u(0)=u(T)$$

obtenu par linéarisation du système (E) autour de la solution $z_0=(x_0,y_0)$.

L'admissibilité de la solution x_0 de (e) entraîne que V est de classe C^2 le long de x_0 et la matrice $\mathbb{R}^{4n}\times\mathbb{R}^{4n}$

$$H''(t,x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\alpha^2\mathrm{I}_{2n}+V''(t,x_0(t)) & \alpha J\\ -\alpha J & \mathrm{I}_{2n}\end{pmatrix}$$

est donc symétrique. La résolvante R associée au système (L) est donc symplectique, c'est-à-dire vérifie $R^*JR=J$. De plus, $V''(t,x_0(t))$ étant définie-positive, il en est de même de $H''(t,x_0,y_0)$ et ceci pour tout α.

Proposition III.2.1. *Pour tout α l'application $\tau\mapsto i_\tau$ définie sur $\mathbb{R}$ est constante par morceaux, continue à gauche en tout point $\tau\in\mathbb{R}$ et le saut aux points de discontinuité est donné par $i_{\tau^{+0}}-i_{\tau^{-0}}=\nu_\tau$ pour tout $\tau\in\mathbb{R}$.*

Démonstration. L'application $\tau\mapsto i_\tau$ est par définition à valeurs entières, donc constante par morceaux. On montre que $\tau^2\lambda_i^\tau+1$ sont les carrés de la forme quadratique Q_τ obtenus par diagonalisation de cette dernière, où $(\lambda_i^\tau)_i$ sont les valeurs propres d'un certain opérateur de $L^2(0,T)$ auto-adjoint et compact. Alors pour $\sigma<\tau_0$ assez voisin de τ_0 on a par définition de l'index, $i_\sigma\ge i_{\tau_0}$. D'autre part, $\sigma<\tau_0$ implique

$$(*) \qquad i_\sigma\le i_{\tau_0},$$

(voir [5], chap. II.4). D'où $i_\sigma=i_{\tau_0}$, i.e. l'index est continu à gauche en tout point $\tau\in\mathbb{R}$.

Supposons maintenant $i_\tau=m$. Alors il existe τ_0 proche de τ tel que $i_\sigma=m$ pour tout $\sigma\in(\tau_0,\tau)$ et on a m valeurs propres telles que $1+\sigma^2\lambda_i^\sigma<0$, $i=1,\dots,m$. Soit $(\sigma_k)_k\subset\,]\tau_0,\tau]$ avec $\sigma_k\to\tau_0$ quand $k\to\infty$. On montre (voir [5], p. 49) que la suite de vecteurs propres $(e_i^{\sigma_k})$ associée aux valeurs propres $\lambda_i^{\sigma_k}$ converge vers (e_i) dans l'espace constant $L^2(0,T)$, où (e_i) est une famille libre qui vérifie $U_{\tau_0}e_i=\lambda_ie_i$. Comme $1+\tau_0^2\lambda_i=\lim_k(1+\sigma_k^2\lambda_i^{\sigma_k})\le 0$, $i=1,\dots,m$, alors la forme quadratique Q_{τ_0} est semi-définie négative sur un sous-espace de dimension m et $i_{\tau_0}+\nu_{\tau_0}\ge i_{\tau_0^{+0}}=m$.

D'autre part, on montre que $i_{\tau_0^{+0}}=m\ge i_{\tau_0}+\nu_{\tau_0}$. En effet, si $\nu_{\tau_0}=0$ alors le résultat est évident (voir $(*)$). Sinon $\lambda=1$ est une valeur propre de la résolvante $R(\tau_0T)$ et par l'absurde, sachant que la résolvante R est symplectique et définie-positive, on montre (voir [7], chap. 1.3) qu'il existe un voisinage W de τ_0 tel que pour $\tau\in W$ la matrice $R(\tau T)-I$ est inversible, i.e. $\nu_\tau=0$ et alors $i_\tau+\nu_\tau=i_\tau=i_{\tau_0^{+0}}\ge i_{\tau_0}+\nu_{\tau_0}$ (d'après [5], chap. II.4).

D'où $i_{\tau_0^{+0}} = i_{\tau_0} + \nu_{\tau_0}$. L'application index étant continue à gauche, i.e. $i_{\tau_0^{-0}} = i_{\tau_0}$, on déduit alors que $i_{\tau_0^{+0}} - i_{\tau_0^{-0}} = \nu_{\tau_0}$. ∎

Proposition III.2.2 (voir [5]). *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$, *l'index* $i_\tau = 0$ *pour* $\tau > 0$ *voisin de zéro.*

La démonstration repose sur le lemme important suivant où on arrive à établir une estimation de la norme de l'opérateur $L_{T,\alpha}$ représentant l'inverse de la partie linéaire du problème (e) et qui est l'analogue de l'inégalité de Wirtinger (voir [7]). Dans ce lemme, on écrira s au lieu de τt.

Lemme III.2.1. *Pour* $\alpha \in (-\pi/s, \pi/s)$,

$$\varrho(s,\alpha) = \|L_{s,\alpha}\|_{2,2} \leq \frac{s^2}{4\pi(\pi - |\alpha| s)}.$$

Démonstration. L'égalité de Parseval nous donne

$$\|L_{s,\alpha} y\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{s^4}{16k^2\pi^2(k\pi+\alpha s)^2}|y_k|^2 s \leq \frac{s^4}{16\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{(k\pi+\alpha s)^2}|y_k|^2 s.$$

D'autre part, pour $k \in \mathbb{Z}^*$ et $\alpha \in (-\pi/s, \pi/s)$ on a $(k\pi + \alpha s)^2 \geq (\pi - |\alpha| s)^2$, ce qui implique

$$\frac{1}{(k\pi+\alpha s)^2} \leq \frac{1}{(\pi - |\alpha| s)^2}.$$

D'où

$$\|L_{s,\alpha} y\|_2^2 \leq \frac{s^4}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{(\pi-|\alpha|s)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}|y_k|^2 s = \frac{s^4}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{(\pi-|\alpha|s)^2}\|y\|_2$$

d'après l'égalité de Parseval, donc $\|L_{s,\alpha}\|_{2,2} \leq s^2/(4\pi(\pi - |\alpha|s))$. ∎

Démonstration de la proposition III.2.2. On prend pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ un τ suffisamment petit de sorte que $\alpha \in (-\pi/(\tau T), \pi/(\tau T))$ et en utilisant le lemme précédent, on montre que la forme quadratique Q_τ est définie positive et donc $i_\tau = 0$. ∎

Les propositions III.2.1 et III.2.2 nous permettent d'avoir pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ la relation

$$i_\tau = \sum_{0<s<\tau T}(i_{s^{+0}} - i_{s^{-0}}) = \sum_{0<s<\tau T}\nu_s.$$

Enfin les relations $\sharp\{s \in (0,T) : x_0(s)$ conjugué à $x_0(0)\} \geq O(x_0) - 1$ et $i_\tau = \sum_{0<s<\tau T}\nu_s$ nous donnent

$$O(x_0) \leq i_1 + 1.$$

Dans le cas autonome ($f \equiv 0$ et $V(t, x(t)) = V(x(t))$) on prouve la minimalité de la période de la solution x_1 (1) pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$, et ce en utilisant une autre méthode que celle établie dans [2] laquelle nous donnait le résultat pour α très petit.

THÉORÈME III.2.2. *Si le potentiel V est strictement convexe, vérifie les hypothèses* (0), (1) *et* (2) *et si la solution x_1 donnée par le théorème du col est admissible alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ la solution x_1 est de période minimale T.*

Démonstration. La solution x_1 est donnée par le théorème du col, elle est donc d'après le théorème III.1.2 de type minimum local ou m.p., par conséquent d'après le théorème III.2.1 d'index $i_1 \leq 1$. Si $i_1 = 0$ alors $O(x_1) \leq i_1 + 1 = 1$ et x_1 est de période minimale T. Si $i_1 = 1$ alors $O(x_1) \leq i_1 + 1 = 2$ et donc x_1 est de période minimale T ou $T/2$. Si la période minimale est $T/2$ alors il existe, d'après le théorème III.2.1, un voisinage ouvert W de y_1 (y_1 étant le point critique associé) tel que $\mathcal{P} = \{y \in W : \phi(y) < \phi(y_1)\}$ a au plus deux composantes connexes par arcs. Comme y_1 est de type m.p. alors $\mathcal{P}$ n'est ni vide ni connexe par arcs et a donc exactement deux composantes connexes par arcs, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, telles que $y_1 + \eta\overline{y} \in \mathcal{P}_1$ et $y_1 - \eta\overline{y} \in \mathcal{P}_2$, où $\overline{y}$ est le vecteur propre associé à l'unique valeur propre de Q_1. On considère l'action de S^1 sur $L_0^2(0, T)$ donnée par $(\theta, y) \mapsto a_\theta(y)$, où $a_\theta y(t) = y(t + \theta T)$. Alors ϕ est invariante par cette action, i.e. $\phi(a_\theta y) = \phi(y)$ pour $\theta \in S^1$. Par suite,

$$(**) \qquad \{y \in a(S^1, W) : \phi(y) < \phi(y_1)\} = a(S^1, \mathcal{P}).$$

Sachant que les $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$, sont connexes par arcs, on montre (voir [8], p. 180) que $a(S^1, \mathcal{P}_1)$ et $a(S^1, \mathcal{P}_2)$ sont aussi connexes par arcs. D'autre part, on arrive (voir [8], p. 180, notamment le lemme 10) à lier $a(S^1, \mathcal{P}_1)$ et $a(S^1, \mathcal{P}_2)$ par un chemin continu; puis sachant que $a(S^1, \mathcal{P}) = a(S^1, \mathcal{P}_1) \cup a(S^1, \mathcal{P}_2)$ on tire que $a(S^1, \mathcal{P})$ est connexe par arcs, ce qui n'est pas le cas car $a(S^1, W)$ est un voisinage ouvert de y_1 qui est un point critique de ϕ de type m.p. et car on a $(**)$. D'où T est bien la période minimale de x_1. ∎

Le problème de ce qui se passe quand $\alpha \in \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ reste ouvert. Rappelons que l'hypothèse $\alpha \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$ assure l'inversibilité de la partie linéaire du problème qu'on introduit dans la fonctionnelle ϕ.

IV. Étude des sous-harmoniques. On s'intéresse à l'étude du système différentiel

$$(\mathrm{e}_k) \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\alpha J\dot{x}(t) + V'(t, x(t)) = f(t), \\ x(0) = x(kT), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(kT), \quad k \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

(1) On ne s'intéressera pas à la solution x_2 puisque pour $f \equiv 0$, $x_2 \equiv 0$. Dans le cas non autonome il n'y a pas lieu d'étudier la minimalité de la période des solutions.

avec f et V qui peuvent dépendre de t, c'est-à-dire que le système (e_k) n'est pas nécessairement autonome.

DÉFINITION IV.1. Les solutions de (e_k) sont appelées *sous-harmoniques*.

DÉFINITION IV.2. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note par j^*x_k le changement de phase défini par $j^*x_k(t) = x_k(t + jT)$, et par $\mathbb{Z}x_k$ le groupe d'isotropie de x_k, c'est-à-dire l'ensemble $\{j \in \mathbb{Z} : j^*x_k = x_k\}$.

DÉFINITION IV.3. Les solutions x_k de (e_k) et x_h de (e_h) sont dites *géométriquement distinctes* si $j^*x_k \neq i^*x_h$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, en d'autres termes si $\mathbb{Z}x_k \cap \mathbb{Z}x_h = \emptyset$.

Dans [9], on s'est intéressé aux systèmes hamiltoniens généraux du premier ordre $\dot{x}(t) = JH'(t, x(t))$; on a établi l'existence d'une infinité de sous-harmoniques géométriquement distinctes, i.e. qui ne se ramènent pas l'une à l'autre par changement de phase. Le système (e_k) est bien sûr un système hamiltonien à $2n$ degrés de liberté (voir paragraphe précédent). Il s'avère que l'hamiltonien correspondant ne satisfait pas toutes les hypothèses formulées dans [9], notamment la sur-quadraticité du hamiltonien, et on ne peut donc conclure sur notre système à partir de [9]. On fait autrement en adaptant tout simplement la méthode développée dans [9] à notre problème en faisant jouer au potentiel V le rôle joué par l'hamiltonien H et en tenant compte des propriétés de la partie linéaire du problème. La méthode développée ici est un raffinement de celle developpée dans le paragraphe précédent où on s'intéressait au système autonome.

On se place donc sous les mêmes hypothèses qu'au théorème III.2.2. Sur l'espace de Banach réel $E(p)_k = L_0^p(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$, $k \in \mathbb{N}^*$, on définit pour $\alpha \neq l\pi/(kT)$, $l \in \mathbb{Z}$, la fonctionnelle duale

$$\phi_k(y) = \frac{1}{kT} \int_0^{kT} \left\{ \tfrac{1}{2}(L_{T,\alpha} y, y) + V^*(t, y + f) \right\} dt.$$

De la même manière que précédemment on montre que ϕ_k est de classe C^1, que si x_k résout (e_k) alors $y_k = -A_{T,\alpha} x_k$ est un point critique de ϕ_k dans $E(p)_k$ et que si $\phi_k'(y_k) = 0$ avec $y_k \in E(p)_k$ alors $x_k = -L_{T,\alpha} y_k$ résout (e_k).

DÉFINITION IV.4. On appelle *caractérisation de mountain pass*, notée par m.p.c., le triplet $(e_0, e_1, d) \in E(p)_k \times E(p)_k \times \mathbb{R}$ tel que

$$d = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,T]} \phi_k(\gamma(t)) > \max\{\phi_k(e_0), \phi_k(e_1)\},$$
$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E(p)_k) : \gamma(0) = e_0,\ \gamma(1) = e_1\}$$

et ϕ_k satisfait la condition P.S.$_c$ au niveau d.

DÉFINITIONS IV.5. $P \subset \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ a la *propriété de mountain pass* (en abrégé m.p.) si P est connexe et si pour tout voisinage ouvert U de P dans

$E(p)_k$, l'ensemble $\{y \in U : \phi_k(y) < d\}$ n'est ni vide ni connexe par arcs. P est une *composante de m.p.* s'il a la propriété de m.p. et s'il n'existe pas de $P' \subset \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$, $P' \supset P$ et P' ayant la propriété de m.p.

DÉFINITION IV.6. Si $e \in E(p)_k$ et $A \subset \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$, on écrit $e \to_{\phi_k} A$ lorsque $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ où B est une composante connexe par arcs de e dans $\{y \in E : \phi_k(y) < d\}$. Si $A = \{y\}$ on écrit $e \to_{\phi_k} y$.

Cette série de définitions nous permet d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION IV.7. $y_0 \in \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ est dit de type *mountain pass essentiel* (en abrégé m.p.e.) s'il existe une m.p.c. (e_0, e_1, d) et une composante de m.p. $P \subset \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ telles que $y_0 \in P$ et

(a) $e_0 \to_{\phi_k} y_0$,
(b) y_0 a la propriété de m.p. ou bien $y_0 \in \overline{P}_M \setminus P_M$, où

$$P_M = \{y \in P : y \text{ minimum local pour } \phi_k \text{ dans } E(p)_k\}.$$

En d'autres termes, si y_0 n'a pas la propriété de m.p. alors il n'est pas un minimum local mais est limite d'une suite de minima locaux dans P.

On sait que si (e_0, e_1, d) est une m.p.c. pour ϕ_k alors le théorème d'Ambrosetti–Rabinowitz entraîne que d est valeur critique. De plus, il existe (voir théorème III.1.3 ou [11]) dans $\mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ un minimum local ou un point qui a la propriété de m.p. On arrive maintenant à améliorer ce résultat dans le théorème qui suit en montrant l'existence dans $\mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ d'un point critique de type m.p.e.

THÉORÈME IV.1 (voir [9]). *Soit (e_0, e_1, d) une m.p.c. pour $\phi_k \in C^1(E(p)_k, \mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ contient pour f suffisamment petit dans $E(p)_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{kT}\mathbb{Z}$, un point y_0 de type m.p.e. tel que $e_0 \to_{\phi_k} y_0$.*

Le théorème suivant nous renseigne sur la géométrie au voisinage d'un point critique de type m.p.e. Rappelons d'abord que i_k et n_k désignent l'index et la nullité de la forme quadratique Q_k, définie sur $E(2)_k$, associée au hessien de ϕ_k.

THÉORÈME IV.2. *Si y est un point critique admissible de ϕ_k de type m.p.e. alors*

(i) *$i_k(y) \leq 1 \leq i_k(y) + n_k(y)$. En d'autres termes, l'index est 1 si y est non dégénéré ($n_k = 0$) et peut être nul sinon.*

(ii) *Si $i_k(y) = 1$ alors il existe un voisinage W de y dans $E(p)_k$ tel que $y \in \overline{P}$ pour toute composante connexe par arcs P dans $\dot{\phi}^d$ intersectant W. De plus, on a exactement deux composantes connexes par arcs différentes, P^- et P^+, dans $\dot{\phi}^d$ ayant y dans leur fermetures et représentées respectivement par $y - z_1$ et $y + z_1$, où z_1 est la fonction propre de Q_k associée à l'unique valeur propre $\lambda_1 < 0$.*

Le théorème suivant est basé sur un lemme de décomposition de Bott (voir [5], [9]).

THÉORÈME IV.3. *Si* $i_k = 1$ *et* z_1 *est la fonction propre de* Q_k *associée à la valeur propre négative alors on a*

(a) $k = 1$ *et* z_1 *est* T*-périodique, ou bien*
(b) $k = 2$ *et* z_1 *est* T*-antipériodique, i.e.* $z_1(t+T) = -z_1(t)$ *p.p.*

En ce qui concerne le groupe d'isotropie d'un point critique de type m.p.e. on a

THÉORÈME IV.4 (voir [9]). *Soit* (e_0, e_1, d) *une m.p.c. pour* ϕ_k *avec* k *pair et* $\mathbb{Z}e_0 \supset \frac{k}{2}\mathbb{Z}$ *telle que tous les points de* $\mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ *soient admissibles. Alors si* $y_0 \in \mathrm{Cr}(\phi_k, d)$ *est de type m.p.e. tel que* $e_0 \to_{\phi_k} y_0$ *et si* $i_k(y_0) = 1$*, on a* $\mathbb{Z}y_0 = k\mathbb{Z}$.

Pour l'admissibilité d'un point critique ou d'une solution, voir la définition III.2.1 avec kT au lieu de T.

Les théorèmes IV.2–IV.4 nous permettent d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME IV.5. *Si* y_0 *est point critique de* ϕ_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{N}^*$, *tel que tous les points de* $\mathrm{Cr}(\phi_{k_0}, \phi_{k_0}(y_0))$ *soient admissibles alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{kT}\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$, *et* f *suffisamment petit dans* $E(p)_1$ *il existe au plus un* $j \in \mathbb{N}^*$ *tel que* y_0 *soit de type m.p.e. pour* ϕ_j.

Enfin le théorème IV.1 (résultat d'existence) et le théorème IV.5 (résultat d'unicité) nous donnent le résultat principal suivant :

THÉORÈME IV.6. *Sous les hypothèses du potentiel* V *et* f *suffisamment petit dans* $E(p)_1$, *il existe, pour tous* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{kT}\mathbb{Z}$, *une solution* x_k *de* (e_k) *telle que les* x_k, $k \in \mathbb{N}^*$, *soient deux à deux géométriquement distinctes.*

En effet, ces solutions correspondent aux points critiques donnés par le théorème IV.1 et le théorème IV.5 nous montre que ces dernières sont géométriquement distinctes.

V. Cas où le potentiel V est sous-quadratique

V.1. *Existence de solution.* On travaillera avec $r = 2$. Le potentiel V est dit *sous-quadratique* si et seulement si

$$(14) \qquad \exists \beta > 0 \text{ et } c : \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad V(t,x) \le \frac{\beta}{2}\|x\|^2 + c.$$

Notons $\mu = T/\varrho(T,\alpha)$ avec $\varrho(T,\alpha) = \|L_{T,\alpha}\|_{2,2}$.

THÉORÈME V.1.1. *Sous les hypothèses* (0) *et* (14) *le problème* (e) *admet au moins une solution pour tout* $T \in (0, \mu/\beta)$.

D é m o n s t r a t i o n. On procède de la même manière que dans le cas sur-quadratique en faisant la transformation (9) (voir [5]). On montre que $\overline{\phi}$ est coercive pour tout $T \in (0, \mu/\beta)$ et admet donc une suite minimisante $(z_n)_n$. On montre comme dans le cas du minimum local avec potentiel sur-quadratique que $\overline{\phi}(\overline{z}) = \inf_{z \in L_0^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})} \overline{\phi}(z)$ avec $\overline{z} \in L_0^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. Par suite, $\overline{z}$ est un minimum global de $\overline{\phi}$ et donc un point critique de $\overline{\phi}$ dans $L_0^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$; il lui correspond un minimum global, donc un point critique $\overline{y} = \overline{z} - f$ de ϕ dans $L_0^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ et une solution $\overline{x} = -L_{T,\alpha}\overline{y}$ de (e) dans $W^{2,2}_{\equiv}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ avec $T \in (0, \mu/\beta)$. Ainsi sous les hypothèses de V le problème (e) admet au moins une solution pour tout $T \in (0, \mu/\beta)$. ∎

Dans le cas où $f \equiv 0$ et V vérifie, en plus des hypothèses précédentes,

$$(15) \qquad V(t,x) \geq \frac{\gamma}{2}\|x\|^2 \quad \text{pour } x \text{ assez petit et } \gamma \text{ constante} > 0$$

(resp. $f \not\equiv 0$ et $V(t,x(t)) = V(x(t))$) on montre (voir [2]) que la solution $\overline{x}$ n'est pas triviale pour tout $T \in \big(\frac{2\pi}{\gamma}(\sqrt{\gamma+\alpha^2}-\alpha), \mu/\beta\big)$ (resp. $T \in (0, \mu/\beta)$, voir [5]).

Dans le cas où $\alpha \in (-\pi/T, \pi/T)$, on a l'estimation

$$\varrho(T,\alpha) \leq T^2/(4\pi(\pi - |\alpha|T)),$$

ce qui nous permet d'avoir des expressions plus explicites des intervalles trouvés ci-dessus (voir [5]). En effet, on a pour tout $T \in \big(0, \frac{2\pi}{\beta}(\sqrt{\alpha^2+\beta} - |\alpha|)\big)$ l'existence d'une solution pour le problème (e) et d'une solution non triviale pour le problème (e) avec $f \not\equiv 0$ et $V(t,x(t)) \equiv V(x(t))$, et on a pour tout $T \in \big(\frac{2\pi}{\gamma}(\sqrt{\gamma+\alpha^2}-\alpha), \frac{2\pi}{\beta}(\sqrt{\beta+\alpha^2}-|\alpha|)\big)$ l'existence d'une solution non triviale du problème (e) avec $f \equiv 0$ et V qui vérifie (0), (14) et (15).

On peut exprimer les résultats ci-dessus en terme de α (il suffit d'exprimer α en fonction de T, voir [5]).

R e m a r q u e V.1.1. Les résultats établis dans ce cas sont aussi vrais dans le cas où V est seulement continu; dans ce cas, on parlera de l'inclusion hamiltonienne $\ddot{x}(t) + 2\alpha J\dot{x}(t) + \partial V(t,x(t)) \ni f(t)$, où ∂V est le sous-gradient de V au sens de l'analyse convexe.

V.2. *Existence de solution de période minimale.* De la même manière on étudie dans ce cas de sous-quadraticité la minimalité de la période de la solution $\overline{x}$ trouvée. On suppose alors que $V(t,x(t)) = V(x(t))$ et $f \equiv 0$ et dans ce cas on sait que la solution $\overline{x}$ n'est pas triviale. On établit le théorème suivant :

THÉORÈME V.2.1. *Si V est strictement convexe, vérifie* (0), (14) *et* (15) *et si la solution $\overline{x}$ est admissible alors pour tout $\alpha \in (\pi/T - T\gamma/(4\pi), \pi/T - T\beta/(4\pi))$ avec $0 < \beta < \gamma \leq \omega^2$ la solution $\overline{x}$ est de période minimale T.*

En effet, pour $\alpha \in (\pi/T - T\gamma/(4\pi), \pi/T - T\beta/(4\pi))$, on arrive à avoir de la même manière que précédemment la relation $1 \leq O(\overline{x}) \leq i_1 + 1$. Or $i_1 = 0$ puisque $\overline{x}$ correspond à un minimum global, donc $O(\overline{x}) = 1$ et $\overline{x}$ est de période minimale T.

Remerciements. Je remercie le Professeur A. Assem pour m'avoir introduit dans ce domaine et les Professeurs I. Ekeland et C. Viterbo pour les discussions fructueuses que j'ai eu avec eux. Je remercie également les Professeurs C. Dellacherie, J. M. Strelcyn et G. Grancher pour leur accueil chaleureux au laboratoire d'Analyse et Modèles Stochastiques de Rouen. Enfin, je remercie beaucoup le Rapporteur Anonyme dont les remarques ont contribué substantiellement à l'amélioration de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, *Solutions with minimal period for Hamiltonian systems in potential well*, ISAS, 1985.
[2] A. Assem, Thèse de docteur en science, Paris-Dauphine, 1987.
[3] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, New York, 1984.
[4] A. Bahri and P. L. Lions, *Solutions of superlinear elliptic equations and their Morse indices*, Ceremade, no. 9003.
[5] M. Benabas, Thèse de magister, U.S.T.H.B.-Alger, 1992.
[6] I. Ekeland, *Une théorie de Morse pour les systèmes Hamiltoniens convexes*, Ann. Inst. H. Poincaré 1 (1984), 19–78.
[7] —, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer, 1989.
[8] I. Ekeland and H. Hofer, *Periodic solutions with prescribed minimal period for convex autonomous Hamiltonian systems*, Invent. Math. 81 (1985), 155–188.
[9] —, —, *Subharmonics for convex nonautonomous Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. 40 (1987), 1–36.
[10] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod et Gauthier-Villars, 1972.
[11] H. Hofer, *A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain-pass theorem*, J. London Math. Soc. 31 (1985), 556–570.
[12] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer, 1989.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE ROUEN
URA CNRS 1378
F-76821 MONT-SAINT-AIGNAN CEDEX, FRANCE
E-mail: MOURAD.BENABAS@UNIV-ROUEN.FR

Reçu par la Rédaction le 4.5.1994;
en version modifiée le 3.4.1995