COROLLARY. *If S is a locally compact Hausdorff space of $\aleph_1$ elements, then the first countability axiom holds true at each point of a dense subset of S.*

REFERENCES

[1] A. Hulanicki, *On locally compact topological groups of power of continuum*, Fundamenta Mathematicae 44 (1957), p. 156-158.

[2] — *On cardinal numbers related with locally compact groups*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques 6 (1958), p. 67-70.

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

SUR LES GROUPES MÉTRIQUES COMPLETS

PAR

Z. SEMADENI (POZNAŃ)

Le but de cette note consiste à présenter une méthode de la théorie des groupes; on y trouve certains théorèmes, en partie connus, qui résultent facilement du théorème suivant de Mazur et Sternbach ([13], p. 50): *tout sous-groupe G_δ d'un groupe métrique complet est fermé.* Ce théorème est une conséquence immédiate de deux théorèmes connus, d'après lesquels chaque ensemble G_δ est de 2^e catégorie relativement à sa fermeture (voir [12], p. 49) et chaque sous-groupe borelien non-fermé est de 1^e catégorie relativement à sa fermeture (voir [2], p. 21). Remarquons qu'il peut être exprimé comme il suit: tout sous-groupe dense G_δ d'un groupe topologique de 2^e catégorie est fermé (cf. [11], p. 486).

Les théorèmes énoncés dans ce travail peuvent être prouvés par une méthode différente et plus directe; toutefois, la méthode s'appuyant sur le théorème de Mazur et Sternbach sert en même temps à illustrer des relations existant entre les théorèmes. Celle-ci fut appliquée par V. L. Klee pour démontrer que *tout groupe métrisable, qui est un G_δ absolu, est complet par rapport à la métrique invariante* (dans le cas où une telle métrique existe). L'existence d'une métrique invariante (c'est-à-dire invariante des deux côtés) est équivalente au „Metrisierungsaxiom" de van Dantzig: *$x_n \to e$ entraîne $y_n^{-1}x_ny_n \to e$ quels que soient les y_n*, e désignant l'unité du groupe (voir [5], p. 616). On connaît des exemples qui ne satisfont pas à cet axiome (voir [9], p. 84, [6] et [10], p. 210).

Voici une généralisation de ce théorème de Klee (cf. [10], p. 212), exprimée d'une manière modifiée:

THÉORÈME 1. *$\mathfrak{G}$ étant un groupe topologique, métrisable et topologiquement complet (c'est-à-dire homéomorphe à un espace métrique complet), pour que $\mathfrak{G}$ satisfasse au „Komplettierungsaxiom" de van Dantzig*

$$x_n \to e \text{ et } y_ny_m^{-1} \to e \text{ entraînent } y_n^{-1}x_ny_n \to e,$$

il faut et il suffit que $\mathfrak{G}$ soit complet par rapport à toute métrique gauche-invariante (ou bien, par rapport à toute métrique droite-invariante).

La suffisance étant évidente, admettons que $\varrho(x, y)$ est droite-invariante. Alors, $\varrho(x_n, x_m) \to 0$ est équivalente à $x_n x_m^{-1} \to e$; donc, d'après le théorème de van Dantzig ([5], p. 614), le complètement $\tilde{\mathfrak{G}}$ de $\mathfrak{G}$ par rapport à ϱ est un sur-groupe de $\mathfrak{G}$. D'autre part, $\mathfrak{G}$ (étant homéomorphe à un espace complet) est un G_δ absolu (voir [12], p. 337), d'où $\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{G}}$.

Si l'on admet seulement que $\varrho(x, y)$ est une métrique déterminant la topologie de $\mathfrak{G}$, le théorème n'est pas vrai; par exemple, le groupe des nombres réels n'est pas complet par rapport à la métrique

$$\varrho^*(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

D'autre part, J. Dieudonné a démontré que le groupe $\mathfrak{G}_D$ des homéomorphies de l'intervalle fermé $\langle 0, 1 \rangle$, muni de la convergence uniforme, n'est pas isomorphe (au sens algébrique et topologique) avec un sous-groupe d'un groupe complet par rapport à une métrique gauche-invariante; cependent, $\mathfrak{G}_D$ est G_δ dans l'espace complet composé de *toutes* les transformations continues de $\langle 0, 1 \rangle$ en soi même, muni de la métrique $\varrho(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, ce qui veut dire que $\mathfrak{G}_D$ peut être métrisé de façon complète.

Autrement dit, tous les groupes topologiques, métrisables et topologiquement complets peuvent être divisés en deux classes disjointes comme il suit:

1° Les groupes satisfaisant au „Komplettierungsaxiom" (ou bien, les groupes complets par rapport à une métrique gauche-invariante),

2° Les autres (ou bien, les groupes non-complets par rapport à n'importe quelle métrique gauche-invariante).

Pour les groupes de la classe 2° le complètement cantorien par rapport à une métrique gauche-invariante quelconque n'est pas un groupe.

LEMME. *Si $\mathfrak{H}_0$ est un sous-groupe métrisable d'un groupe topologique $\mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{H}}_0$ est aussi métrisable.*

Ceci résulte du théorème de v. Dantzig-Birkhoff-Kakutani, d'après lequel la métrisabilité d'un groupe est équivalente à l'existence d'une base dénombrable de l'unité (voir [5], p. 616, [4] et [9]).

THÉORÈME 2. *Si $\mathfrak{G}$ est un groupe métrisable et topologiquement complet, isomorphe avec un sous-groupe $\mathfrak{H}_0$ d'un groupe topologique $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_0$ est fermé dans $\mathfrak{H}$.*

Ce théorème résulte du théorème de Raïkov que voici (voir [14], p. 254, et [7], p. 27): la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit absolument fermé, c'est-à-dire fermé dans tout groupe topologique qui le contient, est qu'il soit complet au sens de Raïkov, c'est-à-dire que chaque suite de Moore et Smith satisfaisant à la condition de Cauchy à la fois de droite et de gauche soit convergente. Évidemment, pour les groupes métrisables cela revient à ce que le groupe soit complet par rapport à la métrique

$$\varrho^*(x, y) = \varrho(x, y) + \varrho(x^{-1}, y^{-1}),$$

ϱ désignant une métrique gauche-invariante. Cette condition étant équivalente à celle que le groupe métrisable en question soit topologiquement complet (cf. [10], p. 212), la thèse du théorème 2 apparaît, si l'on se sert du théorème de Raïkov dans le cas du groupe $\mathfrak{H}_0$.

Voici à présent une démonstration immédiate du théorème 2: $\mathfrak{H}_0$ étant métrisable, $\bar{\mathfrak{H}}_0$ l'est aussi en vertu du lemme. De plus, $\mathfrak{H}_0$ est de 2^e catégorie relativement à soi-même, donc $\bar{\mathfrak{H}}_0$ l'est aussi (voir [12], p. 50). Comme le sous-groupe $\mathfrak{H}_0$ est un G_δ dans $\bar{\mathfrak{H}}_0$, il est fermé d'après le théorème de Mazur-Sternbach.

Remarquons que dans le cas où $\mathfrak{H}_0$ est complet par rapport à une métrique gauche-invariante, le théorème 2 est trivial (cf. [10], p. 210).

THÉORÈME 3. *Aucun groupe métrisable et topologiquement complet, non localement compact, n'est isomorphe avec un sous-groupe d'un groupe topologique localement compact.*

En particulier, *aucun espace de Banach de dimension infinie n'est contenu dans un groupe topologique localement compact* (1).

THÉORÈME 4. *Aucun groupe métrisable, topologiquement complet et non-compact n'est isomorphe avec un sous-groupe d'un groupe topologique compact.*

En particulier, ceci entraîne le théorème connu d'après lequel *la transformation (continue) compactifiante de Bohr d'un tel groupe n'est pas bicontinue.*

Les théorèmes 3 et 4 résultent immédiatement du théorème 2.

THÉORÈME 5. *Toute isomorphie h entre deux sous-groupes denses $\mathfrak{G}_0$ et $\mathfrak{H}_0$ situés dans deux groupes métriques complets $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ se laisse prolonger d'une façon bicontinue sur $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ tout entiers* (2).

Démonstration. D'après le théorème de Lavrentieff h peut être prolongé sur deux ensembles G_δ situés dans $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$, respectivement (cf.

(1) Ce théorème fut démontré (de manière différente) par M. S. Hartman [8].

(2) Ce théorème n'est qu'une généralisation d'un théorème de M. S. Mazur (non-publié) concernant des opérations linéaires dans les espaces métriques linéaires.

[12], p. 335). Puisque ces G_δ sont les ensembles de prolongement maximum de h (c'est-à-dire l'homéomorphie h est prolongée sur l'ensemble des points $x_0 \in \mathfrak{G}$ tels que les limites

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\mathfrak{G}_0}} h(x) \underset{\mathrm{df}}{=} \bar{h}(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y\to \bar{h}(x_0) \\ y\in\mathfrak{H}_0}} h^{-1}(y)$$

existent), ils sont des sous-groupes, donc ils sont fermés; de plus, la fonction prolongée est aussi une isomorphie.

Le théorème sur le prolongement des homomorphies (lorsque les valeurs appartiennent à un groupe $\mathfrak{H}$ complet) est aussi vrai; cependant, la démonstration bien connue de ce théorème (s'appuyant sur la continuité uniforme de h) n'exige pas d'hypothèse de métrisabilité de $\mathfrak{G}$, et la méthode s'appuyant sur le théorème de Mazur-Sternbach n'est pas avantageuse.

Remarquons que si h est une homomorphie biunivoque et non bicontinue entre deux sous-groupes denses $\mathfrak{G}_0$ et $\mathfrak{H}_0$ situés dans deux groupes métriques complets et séparables $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$, respectivement, et si $\bar{h}$ est une extension continue de h sur $\mathfrak{G}$ tout entier, alors ou (α) $\bar{h}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{H}$ ou bien (β) $\bar{h}$ n'est pas biunivoque. Ceci résulte du théorème de Banach sur l'inversion des homomorphies biunivoques (voir [3]). On connaît des exemples établissant que tous les deux cas (α) et (β) sont possibles.

S. Hartman a remarqué qu'il y a des groupes métriques *compacts* $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ qui ne sont pas isomorphes (au sens algébro-topologique), quoiqu'ils contiennent des sous-groupes denses $\mathfrak{G}_0$ et $\mathfrak{H}_0$, respectivement, dont le premier admet une transformation continue et isomorphe *au sens algébrique* sur le second. En voici un exemple: soit $\mathfrak{G}$ le groupe dual au groupe additif R^+ des nombres rationnels et $\mathfrak{H}$ le groupe dual au groupe R_p^+ des nombres rationnels, dont les dénominateurs ne sont pas divisibles par p, p étant un nombre premier. $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ ne sont pas isomorphes (même au sens algébrique); néanmoins, ils contiennent des sous-groupes denses $\mathfrak{G}_0$ et $\mathfrak{H}_0$, respectivement, qui sont algébriquement isomorphes au groupe additif des nombres réels, et l'homomorphie naturelle $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ désignant l'annulateur de R_p^+) transforme $\mathfrak{G}_0$ en $\mathfrak{H}_0$ de façon biunivoque et continue.

L'extension des homomorphies dans des groupes munis d'une convergence $\mathcal{L}^*$ de Fréchet n'est pas toujours possible. A. Alexiewicz en a donné l'exemple suivant: soit X un espace linéaire $\mathcal{L}^*$ de Fréchet et soit X_0 un sous-ensemble linéaire de X tel que l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de X_0 n'est pas fermé, c'est-à-dire que $\overline{\overline{X}}_0 \neq \overline{X}_0$ (cf. [12], pp. 23 et 85). Soit $y_0 \in \overline{\overline{X}}_0 \setminus \overline{X}_0$ et soit X_1 l'ensemble des éléments de la forme $x+\lambda y_0$, où $x \in X_0$. Posons $\xi(x+\lambda y_0) = \lambda$; puisque l'ensemble $\{y \in X_1 \colon \xi(y) = 0\} = X_0$ est fermé dans X_1, ξ est continue dans X_1; cependent, ξ (n'étant pas indentiquement zéro) n'admet pas d'extension continue sur $\overline{\overline{X}}_0$ tout entier (cf. [1], p. 129).

Qu'il me soit permi de remercier M. Stanisław Hartman pour ses conseils utils au cours de ce travail.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Alexiewicz and Z. Semadeni, *Linear functionals in two-norm spaces*, Studia Mathematica 17 (1958), p. 117-136.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[3] — *Über metrische Gruppen*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 101-113.

[4] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Compositio Mathematica 3 (1936), p. 427-430.

[5] D. van Dantzig, *Zur topologischen Algebra I*, Mathematische Annalen 107 (1932), p. 587-616.

[6] J. Dieudonné, *Sur la complétion des groupes topologiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 218 (1944), p. 774-776.

[7] М. И. Граев, *Теория топологических групп I*, Успехи Математических Наук 5 (1950), p. 3-56.

[8] S. Hartman, *Remarques sur le plongement des groupes abéliens dans ceux localement compacts*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 127-128.

[9] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo, 12 (1936), p. 82-84.

[10] J. L. Kelley, *General topology*, New York 1955.

[11] V. L. Klee, *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)*, Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1952), p. 484-487.

[12] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1948.

[13] S. Mazur und L. Sternbach, *Über die Borelschen Typen von linearen Mengen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 48-53.

[14] Д. А. Райков, *О пополнении топологических групп*, Известия Академии Наук СССР, серия математическая, 10 (1946), p. 513-528.

UNIVERSITÉ DE POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1958