For $k = n$ we obtain Lemma 1.

LEMMA 2. *If* $L, L_1, L_2, \ldots, L_n$ *are linear spaces over a field* K, $L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, $L \neq \bigcup_{i=1}^{j-1} L_i \cup \bigcup_{i=j+1}^{n} L_i$ $(1 \leqslant j \leqslant n, n \geqslant 2)$, *then* K *contains less than* n *elements.*

Proof. Let us suppose that there exist different elements $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Let $a \in L_1 - \bigcup_{i=2}^{n} L_i$, $b = L_2 - L_1$. Then $a_i a + b \notin L_1$, because otherwise it would be $b \in L_1$. One has $a_i a + b \neq a_j a + b$ for $i \neq j$, because $a \neq 0$. Among n elements $a_i a + b$ two at least must be contained in the same subspace L_k $(k > 1)$. E. g. let $a_{i_1} a + b \in L_k$, $a_{i_2} a + b \in L_k$. Consequently $(a_{i_1} - a_{i_2}) a \in L_k$, and $a \in L_k$, because $a_{i_1} \neq a_{i_2}$. This contradicts the definition of element a.

Proof of the theorem. For finite fields it follows from the fact that all such fields are generated by one element.

For infinite fields we give an inductive proof with respect to the number n of subfields. For $n = 1$ the theorem is trivial. Suppose that it holds for some $n-1$ and suppose that $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ is a decomposition of the field K. By the induction hypothesis $K \neq \bigcup_{i=1}^{j-1} K_i \cup \bigcup_{i=j+1}^{n} K_i$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. From lemma 1 it follows that $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ is an infinite set. But the fields K and K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ are linear spaces over the field $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$; thus we obtain a contradiction of lemma 2, which implies that $\bigcap_{i=1}^{n} K_i$ has less than n elements.

Remark. A ring of real numbers with the unity can be represented as a union of three proper subrings with the unity:

$$P = \{a + b\sqrt[3]{D} + c\sqrt[3]{D^2}\colon\ a \text{ is an integer, } b \equiv c \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$P_1 = \{a + b\sqrt[3]{D} + c\sqrt[3]{D^2}\colon\ a \text{ is an integer, } b \equiv 0 \pmod 4,\ c \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$P_2 = \{a + b\sqrt[3]{D} + c\sqrt[3]{D^2}\colon\ a \text{ is an integer, } b \equiv 0 \pmod 2,\ c \equiv 0 \pmod 4\},$$

$$P_3 = \{a + b\sqrt[3]{D} + c\sqrt[3]{D^2}\colon\ a \text{ is an integer, } b \equiv c \pmod 4,\ c \equiv 0 \pmod 2\},$$

where D is not a cube of an integer and $64 \nmid D$. It is easy to verify that P_i $(i = 1, 2, 3)$ are proper subrings of the ring P and $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

ON THE FIRST COUNTABILITY AXIOM FOR LOCALLY COMPACT HAUSDORFF SPACES

BY

F. B. JONES (PRINCETON, N. J. AND CHAPEL HILL, N. C.)

Recently A. Hulanicki [1 and 2] has shown that:

Every locally compact topological group of $\aleph_1$ *elements is metric.*

This theorem also follows from the Birkhoff-Kakutani theorem on the metrizability of groups, and the following lemma. Hulanicki's methods may be modified to prove this lemma, but the proof I outline below is somewhat more elementary.

If U *is an open subset of a compact (= bicompact) Hausdorff space* S *of* $\aleph_1$ *elements, then the first countability axiom holds true at some point of* U.

Indication of proof. Let $\alpha = \{a_z\}_{z<\omega_1}$ be a well-ordering of S. If the first countability axiom is false at every point of U, there exists a well-ordered sequence $\beta = \{U_z\}_{z<\omega_1}$ of non-vacuous open subsets of S such that

(1) $\overline{U}_1 \subset U - a_1$,

(2) if $z < \omega_1$ and $z-1$ exists, then $\overline{U}_z \subset U_{z-1}$ and U_z contains a point of $\bigcap \{\overline{U}_y\}_{y<z}$ but $\overline{U}_z$ does not contain a_z,

and

(3) if $z < \omega_1$ and $z-1$ does not exist, then U_z contains a point of $\bigcap \{\overline{U}_y\}_{y<z}$ but $\overline{U}_z$ does not contain a_z.

Now S is regular; so β exists because if $\bigcap \{\overline{U}_y\}_{y<z}$ contains only a_z, then, as is easily proved, $a_z = \bigcap \{U_y\}_{y<z}$ and the collection of intersections of finite subsequences of $\{U_y\}_{y<z}$ forms a countable basis for S at a_z. But $\bigcap \{\overline{U}_z\}_{z<\omega_1}$ is vacuous which contradicts the existence of β.

COROLLARY. *If S is a locally compact Hausdorff space of $\aleph_1$ elements, then the first countability axiom holds true at each point of a dense subset of S.*

REFERENCES

[1] A. Hulanicki, *On locally compact topological groups of power of continuum*, Fundamenta Mathematicae 44 (1957), p. 156-158.

[2] — *On cardinal numbers related with locally compact groups*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques 6 (1958), p. 67-70.

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

SUR LES GROUPES MÉTRIQUES COMPLETS

PAR

Z. SEMADENI (POZNAŃ)

Le but de cette note consiste à présenter une méthode de la théorie des groupes; on y trouve certains théorèmes, en partie connus, qui résultent facilement du théorème suivant de Mazur et Sternbach ([13], p. 50): *tout sous-groupe G_δ d'un groupe métrique complet est fermé.* Ce théorème est une conséquence immédiate de deux théorèmes connus, d'après lesquels chaque ensemble G_δ est de 2^e catégorie relativement à sa fermeture (voir [12], p. 49) et chaque sous-groupe borelien non-fermé est de 1^e catégorie relativement à sa fermeture (voir [2], p. 21). Remarquons qu'il peut être exprimé comme il suit: tout sous-groupe dense G_δ d'un groupe topologique de 2^e catégorie est fermé (cf. [11], p. 486).

Les théorèmes énoncés dans ce travail peuvent être prouvés par une méthode différente et plus directe; toutefois, la méthode s'appuyant sur le théorème de Mazur et Sternbach sert en même temps à illustrer des relations existant entre les théorèmes. Celle-ci fut appliquée par V. L. Klee pour démontrer que *tout groupe métrisable, qui est un G_δ absolu, est complet par rapport à la métrique invariante* (dans le cas où une telle métrique existe). L'existence d'une métrique invariante (c'est-à-dire invariante des deux côtés) est équivalente au „Metrisierungsaxiom" de van Dantzig: *$x_n \to e$ entraîne $y_n^{-1}x_ny_n \to e$ quels que soient les y_n*, e désignant l'unité du groupe (voir [5], p. 616). On connaît des exemples qui ne satisfont pas à cet axiome (voir [9], p. 84, [6] et [10], p. 210).

Voici une généralisation de ce théorème de Klee (cf. [10], p. 212), exprimée d'une manière modifiée:

THÉORÈME 1. *$\mathfrak{G}$ étant un groupe topologique, métrisable et topologiquement complet (c'est-à-dire homéomorphe à un espace métrique complet), pour que $\mathfrak{G}$ satisfasse au „Komplettierungsaxiom" de van Dantzig*

$$x_n \to e \text{ et } y_ny_m^{-1} \to e \text{ entraînent } y_n^{-1}x_ny_n \to e,$$

il faut et il suffit que $\mathfrak{G}$ soit complet par rapport à toute métrique gauche-invariante (ou bien, par rapport à toute métrique droite-invariante).