C O M P T E S   R E N D U S

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

Les comptes rendus des communications faites aux Sections de la Société sont publiés par le périodique „Prace Matematyczne" (en polonais). Ici nous ne publions que les résumés des communications parvenus de leurs auteurs et dont les résultats ne seront pas publiés prochainement dans une autre forme.

SECTION DE TORUŃ

12. I. 1959. A. W. Mostowski (Varsovie), *Sur les groupes nilpotents.*

Désignons d'une façon générale par $[A, B]$ le groupe engendré par les éléments $a^{-1}b^{-1}ab$, où $a \in A$ et $b \in B$. On a le théorème:

Pour qu'un sous-groupe H d'un groupe nilpotent libre G d'ordre n soit nilpotent de même ordre, il faut et il suffit que l'on ait

$$[H, H] = [G, G] \frown H.$$

24. III. 1959. A. W. Mostowski (Varsovie), *Sur les groupes résolubles libres.*

Désignons par G_n le n-ième commutant du groupe G (ce qui revient à poser $G_0 = G$ et $G_{n+1} = [G_n, G_n]$ pour $n = 1, 2, \ldots$, le signe $[A, B]$ étant défini dans la communication qui précède). F étant un groupe libre, appelons l'image de l'ensemble de ses générateurs libres donnée par l'homomorphisme naturel de F en F/F_n *ensemble libre résoluble d'ordre n des générateurs du groupe F/F_n*. Enfin, appelons un sous-ensemble du groupe G *sous-ensemble libre résoluble d'ordre n* lorsqu'il est un ensemble libre résoluble d'ordre n des générateurs d'un sous-groupe de G. On a les théorèmes suivants pour Ω de puissance quelconque:

1. *Si un sous-ensemble $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ d'un groupe est libre résoluble d'ordre n, l'ensemble $(x_\lambda^{m_\lambda})_{\lambda\in\Omega}$ l'est également pour tout système $(m_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ d'entiers non-nuls.*

2. *Si* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *est l'ensemble libre résoluble d'ordre* n *des générateurs d'un groupe* G *et* $(a_\lambda)_{\lambda\in\Omega}\subset G_1$, *l'ensemble* $(x_\lambda a_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ *est un ensemble libre résoluble d'ordre* n.

24. III. 1959. A. W. Mostowski (Varsovie), *Sur les groupes d'automorphismes de groupes nilpotents libres.*

Soit $G_{[n]}$ le n-ième commutant nilpotent du groupe G (ce qui revient à poser $G_{[1]}=G$ et $G_{[n+1]}=[G,G_{[n]}]$, le signe $[A,B]$ ayant le même sens que dans les communications précédentes). F étant un groupe libre de dimension $\mathfrak{m}$, désignons par $A(n)$ le groupe des automorphismes du groupe $F(n)=F/F_{[n+1]}$, par φ l'homomorphisme du groupe $F(n+1)$ en groupe $F(n)$ tout entier de noyau $\varphi^{-1}(1)=F_{[n+1]}/F_{[n+2]}$, et par Φ l'homomorphisme de $A(n+1)$ en $A(n)$ induit par φ, c'est-à-dire tel que

$$[\Phi(a)](\varphi(g))=\varphi(a(g))\quad \text{pour}\quad a\in A(n+1)\ \text{et}\ g\in F_{[n+1]}.$$

On a alors les propositions suivants pour $\mathfrak{m}$ cardinal quelconque:

THÉORÈME. *L'image du groupe* $A(n+1)$ *par l'homomorphisme* Φ *est le groupe* $A(n)$ *tout entier et le noyau de* Φ *est isomorphe à la* $\mathfrak{m}$*-ième puissance cartésienne (au sens fort) de celui de* φ.

COROLLAIRE. *Le groupe* $A(n+1)$ *est une extension de la* $\mathfrak{m}$*-ième puissance cartésienne (au sens fort) d'un groupe abélien libre à l'aide du groupe* $A(n)$.

CONFÉRENCE SUR L'ALGÈBRE TOPOLOGIQUE

De 8 à 10 octobre 1959 a siégé à Wrocław une conférence sur l'algèbre topologique et l'analyse harmonique abstraite, convoquée par l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences. Certaines communications concernaient aussi l'algèbre abstraite et les espaces fonctionnels. Voici la liste complète des communications:

8. X. 1959.

S. Hartman (Wrocław), *Exposé général des travaux du séminaire sur l'algèbre topologique et l'analyse harmonique abstraite.*

E. Marczewski (Wrocław), *Indépendance et algèbres abstraites.*

J. Musielak et W. Orlicz (Poznań), *Quelques remarques sur les espaces modulaires.*

E. Sąsiada (Toruń), *Solution négative du problème de K. Borsuk sur les groupes de cohomologie.*

K. Maurin (Varsovie), *Développements généraux en fonctions propres et quelques exemples.*

W. Żelazko (Varsovie), *Les algèbres* L_p *sur les groupes localement compacts.*

S. Balcerzyk (Toruń) et J. Mycielski (Wrocław), *Sur le plongement des produits libres dans le groupe des rotations.*

B. Gleichgewicht (Wrocław), *Sur une classe d'anneaux non-associatifs.*

J. Mycielski (Wrocław), *Quelques problèmes.*

9. X. 1959.

M. Kac (Ithaca, N. Y.), *Intégration dans les espaces fonctionnels et théorie de potentiel.*

A. Kertész (Debrecen), *Une notion de radical dans les modules.*

Z. Semadeni (Poznań), *Propriétés limites des suites de groupes métriques.*

A. Hulanicki (Wrocław), *Sur les prolongements de la mesure de Haar.*

Z. Ciesielski (Poznań), *Sur l'ordre d'approximations de presque toutes les fonctions de l'espace de Wiener.*

10. X. 1959.

A. Suliński (Varsovie), *Sommes sous-directes d'anneaux simples avec élément unité.*

S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski (Wrocław), *Sur la décomposition des séries de Fourier de fonctions presque périodiques.*

W. Żelazko (Varsovie), *Sur les anneaux localement bornés et m-convexes.*

A. Goetz (Wrocław), *Sur les mesures et les métriques dans les espaces homogènes et dans les groupes de Lie.*

Voici le seul résumé de communication qui soit parvenu jusqu'à présent:

Z. Ciesielski (Poznań), *Sur l'ordre d'approximations de presque toutes les fonctions dans l'espace de Wiener* (voir Studia Mathematica, à paraître).

C étant l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues $x(t)$, définies pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et s'annulant pour $t=0$, soit m_W la mesure de Wiener [1] définie dans un certain corps dénombrablement additif de sous-ensembles de C. Considérons une fonction réelle bornée et non-décroissante $g(t)$, définie pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et prenant une infinité de valeurs.

[1] N. Wiener, *Generalized harmonic analysis*, Acta Mathematica 55 (1930), p. 214-224.

Etant donné un système $\{\varphi_n\}$ orthonormal, c'est-à-dire tel que

$$\int_0^1 \varphi_k \varphi_l \, dg = \delta_{kl} \text{ pour } k \text{ et } l \text{ naturels},$$

et complet dans l'espace $L_g^2\langle 0,1\rangle$, posons pour tout n naturel

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau)\,dg(\tau) - \int_0^1 \int_0^\tau \varphi_n(\sigma)\,dg(\sigma)\,d\tau,$$

$$\|f\| = \Big(\int_0^1 f^2(t)\,dt\Big)^{1/2}, \qquad \|f\|^* = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|,$$

$$\sigma_n(t) = c_n \int_0^t \chi_n(\tau)\,d\tau,$$

où $\{\chi_n\}$ est un système composé de fonctions de Haar et c_n est déterminé par la condition $\|\sigma_n\| = 1$.

En traitant C comme un espace de Banach avec les opérations usuelles et avec la norme $\|\ \|^*$, le système $\{\sigma_n\}$ y constitue une base de Schauder.

Considérons deux conditions suivantes:

(1) $$\|\Phi_n\| \sim 1/n,$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k,l=2^n+1}^{2^{n+1}} (\Phi_k, \Phi_l)^2\Big]\cdot\Big[\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \|\Phi_k\|^2\Big]^{-2} < \infty,$$

où $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

THÉORÈME 1. *En posant*

$$a_k[x] = \int_0^1 x(t)\varphi_n(t)\,dg(t) \quad \text{et} \quad s_n[x] = \sum_{k=1}^n a_k[x]\varphi_k,$$

on a pour tout système $\{\varphi_n\}$ *satisfaisant aux conditions* (1) *et* (2)

$$\|x - s_n[x]\| \sim 1/\sqrt{n}$$

en tout $x \in C$, *sauf en un ensemble des* x *de mesure* m_W *nulle.*

THÉORÈME 2. *En posant en outre*

$$H_n[x] = \sum_{k=1}^n b_k[x]\chi_k \quad \text{et} \quad S_n[x] = \sum_{k=1}^n c_k[x]\sigma_k,$$

où b_k *et* c_k *sont les coefficients du développement de la fonction* x *par rapport aux systèmes* $\{\chi_n\}$ *et* $\{\sigma_n\}$ *respectivement, on a*

$$\|x - H_n[x]\|^* = O\Big(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\Big), \qquad \|x - H_n[x]\|^* \neq o\Big(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\Big),$$

$$\|x - S_n[x]\|^* = O\Big(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\Big), \qquad \|x - S_n[x]\|^* \neq o\Big(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\Big)$$

pour tout $x \in C$, *sauf pour un ensemble des* x *de mesure* m_W *nulle.*

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites en particulier pour les systèmes orthonormaux suivants: trigonométrique, de Haar, de Walsh, des polynômes de Legendre, de ceux de Tchebycheff de première espèce et de ceux de Tchebycheff de seconde espèce.