[5] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин,* Москва-Ленинград 1949.

[6] R. G. Laha, *An example of a non-normal distribution where the quotient follows the Cauchy law*, Proceedings of the National Academy of Sciences 44 (1958), No 2, p. 222-223.

[7] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики,* Том III, часть 2, Ленинград-Москва 1949.

[7a] G. P. Steck, *A uniqueness property not enjoyed by the normal distribution*, Annals of Mathematical Statistics 29 (1958), p. 604-606.

[8] В. М. Золотарев, *Преобразования Меллина-Стильтьеса в теории вероятностей,* Теория вероятностей и ее применения 2 (1957), No 4, p. 444-469.

Reçu par la Rédaction le 16. 5. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ХИНЧИНА ИЗ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ

Ю. ЛУКАШЕВИЧ (ВРОЦЛАВ)

В монографии [1] по теории массового обслуживания А. Я. Хинчин доказывает следующую теорему:

Теорема. *Для потока Пальма (стационарного ординарного потока с ограниченным последействием) законы распределения $F_k(x)$ расстояний $z_k = t_k - t_{k-1}$ $(z_1 = t_1)$ между последовательными вызовами даются формулами*

$$F_1(x) = \lambda \int_0^x \varphi_0(u)\,du, \qquad F_k(x) = 1 - \varphi_0(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

где интенсивность λ определяется из условия, что $F_1(\infty) = \lambda \int_0^\infty \varphi_0(u)\,du = 1$, а $\varphi_0(x)$ означает нулевую функцию Пальма, т. е. условную вероятность того, что в промежутке времени длины x не будет вызовов, если вызов имел место в начале этого промежутка.

В доказательстве этой теоремы существенную роль играет следующая лемма:

Лемма. *Для любого потока Пальма и любого $r = 1, 2, \ldots$*

$$\lim_{u\to 0} \frac{\psi_{r+1}(u)}{\psi_r(u)} = 0, \tag{1}$$

где $\psi_r(u)$ вероятность того, что в промежутке времени длины u будет не менее r вызовов.

Но предел (1) не всегда существует. Можно указать такие потоки Пальма, для которых $\psi_r(u) \equiv 0$ в некотором интервале $[0, a]$ $(a > 0)$ и вследствие этого отношение $\psi_{r+1}(u)/\psi_r(u)$ вблизи нуля не имеет смысла. Примером такого потока служит поток, в котором рас-

[1] А. Я. Хинчин, *Математические методы теории массового обслуживания,* Труды Математического Института им. В. А. Стеклова 49 (1955), стр. 43.

стояния между соседними вызовами постоянны и равны например единице времени, но начало времени наблюдения выбирается случайно. Таким образом случайная переменная $z_1 = t_1$ имеет равномерное распределение в интервале $(0, 1)$ и $z_k = 1$ с вероятностью равной единице для $k = 2, 3, \ldots$ Такой поток является повидимому потоком Пальма, так как он стационарный, ординарный и с ограниченным последействием. Но функции $\psi_r(u)$ для этого потока даются формулами $(r = 1, 2, \ldots)$

$$\psi_r(u) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant r-1, \\ u-r+1 & \text{для} \quad r-1 \leqslant u \leqslant r, \\ 1 & \text{для} \quad u \geqslant r \end{cases}$$

и поэтому предел (1), начиная с $r = 2$, не существует.

Таким образом, в книге Хинчина доказательство вышеуказанной теоремы верно лишь в случае, когда для всех $r = 2, 3, \ldots$ имеем $\psi_r(u) > 0$ для $u > 0$. Этот недостаток легко устранить, вводя вместо леммы Хинчина несколько видоизмененную лемму 1.

Лемма 1. *Для любого потока Пальма и любого $r = 1, 2, \ldots$*

$$\lim_{u \to a_r + 0} \frac{\psi_{r+1}(u)}{\psi_r(u)} = 0, \tag{2}$$

где a_r есть верхний предел тех значений аргумента u, для которых $\psi_r(u) = 0$:

$$a_r = \sup\{u: \psi_r(u) = 0\}.$$

Легко заметить, что за исключением тривиального случая, когда интенсивность потока равна нулю, числа a_r существуют при всяком $r = 1, 2, \ldots$ и составляют неубывающую последовательность $(a_r \leqslant a_{r+1})$, причем $a_1 = 0$. Из непрерывности функций $\psi_r(u)$ для потока Пальма с конечной интенсивностью следует кроме того, что $\psi_r(a_r) = 0$.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы Хинчина. Пусть $u > a_r$ и, следовательно, $\psi_r(u) > 0$. Если через t_i обозначить момент i-го вызова и принять $z_i = t_i - t_{i-1}$, то

$$\psi_{r+1}(u) \leqslant P(t_r < a_r) + P(a_r \leqslant t_r < u, z_{r+1} < u - a_r).$$

Но $P(t_r < a_r) = \psi_r(a_r) = 0$ и случайные переменные $t_r = z_1 + z_2 + \ldots + z_r$ и z_{r+1} независимы вследствие ограниченного последействия потока. Следовательно

$$\psi_{r+1}(u) \leqslant P(a_r \leqslant t_r < u) P(z_{r+1} < u - a_r) \leqslant P(t_r < u) \cdot P(z_{r+1} < u - a_r)$$

и наконец

$$\psi_{r+1}(u) \leqslant \psi_r(u) F_{r+1}(u - a_r).$$

Таким образом, так же, как и в доказательстве леммы Хинчина, для доказательства леммы 1 достаточно установить, что $\lim\limits_{x \to 0+0} F_{r+1}(x) = 0$ для всех $r = 1, 2, \ldots$ Всё дальнейшее доказательство леммы и теоремы такое же, как в книге Хинчина, с тем лишь изменением, что в том месте, где Хинчин вводит произвольную постоянную a, нужно предполагать, что $a > a_r$, а в конце доказательства предельный переход $a \to 0$ нужно заменить предельным переходом $a \to a_r + 0$.

ВРОЦЛАВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Reçu par la Rédaction le 3. 8. 1959