COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE J. SZARSKI ET T. WAŻEWSKI

PAR

Z. OPIAL (CRACOVIE)

1. J. Szarski et T. Ważewski ont posé le problème suivant [1]:

Le système d'équations différentielles

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions continues, est défini dans un domaine ouvert Ω de l'espace à $n+1$ dimensions. Par tout point de Ω passe une solution du système (1) *et elle est un segment rectiligne. Est-il possible que le système* (1) *ait d'autres solutions, non rectilignes?*

Dans le présente note je me propose de donner une réponse affirmative à cette question en construisant dans un domaine ouvert de l'espace à trois dimensions (x, y, z) un système de deux équations différentielles jouissant de la propriété requise.

2. Considérons sur le plan $y = 0$ une famille de courbes C_λs $(0 < \lambda < +\infty)$ dont chacune est donnée par les équations paramétriques

$$x = \frac{\lambda}{\cos t}, \quad y = 0, \quad z = t - \operatorname{tg} t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

On démontre sans peine que la courbe C_λ est symétrique par rapport à l'axe des x et que le point $(\lambda, 0, 0)$ est un point de rebroussement de C_λ. On vérifie de même que pour deux λ_1 et λ_2 différents les courbes C_{λ_1} et C_{λ_2} n'ont pas de points communs, ce qui résulte immédiatement du fait que la fonction $t - \operatorname{tg} t$, envisagée dans l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$, est décroissante. L'ensemble des courbes C_λ $(0 < \lambda < +\infty)$ remplit tout le demi-plan Π: $x > 0$, $y = 0$.

Imaginons maintenant que le demi-plan Π se meuve d'un mouvement composé d'une rotation autour de l'axe des z et d'une translation

[1] Cf. „Nouveau Livre Ecossais", problème 15 du 13. XII. 1946; voir aussi T. Ważewski et J. Szarski, *Sur l'unicité des intégrales de l'équation de Clairaut modifiée*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 157-160.

parallèle au même axe. Supposons que la vitesse angulaire de rotation et la vitesse de translation soient constantes et égales à l'unité.

Au cours de ce mouvement, envisagé dans un voisinage suffisamment petit de la position initiale du plan Π, chaque point $(\lambda, 0, 0)$ décrit une hélice

$$H_\lambda: \quad x = \lambda\cos\tau, \quad y = \lambda\sin\tau, \quad z = \tau \quad \left(0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

tandis que chacune des courbes C_λ décrit une surface

$$S_\lambda: \quad x = \frac{\lambda}{\cos t}\cdot\cos\tau, \quad y = \frac{\lambda}{\cos t}\cdot\sin\tau,$$

$$z = t - \operatorname{tg} t + \tau \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

En posant $u = t+\tau$ et $\sigma = -\operatorname{tg} t$, on peut écrire les équations de la surface S_λ sous la forme

$$x = \lambda(\cos u - \sigma\sin u), \quad y = \lambda(\sin u + \sigma\cos u), \quad z = u+\sigma.$$

Il en résulte que S_λ est une partie de la surface réglée engendrée par les tangentes à l'hélice H_λ.

Par chaque point du domaine Ω: $x > 0$, $y > 0$ et $-\infty < z < +\infty$ passe une et une seule des surfaces S_λ. Par conséquent, tout point de ce domaine est situé sur une génératrice d'une surface S_λ. L'ensemble de ces droites définit dans le domaine envisagé un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dy} = f_1(y, x, z), \quad \frac{dz}{dy} = f_2(y, x, z), \tag{2}$$

où les fonctions $f_1(y, x, z)$ et $f_2(y, x, z)$ peuvent être choisies de façon qu'elles soient continues.

Par tout point de Ω passe une intégrale rectiligne du système (2), à savoir une génératrice d'une des surfaces S_λ. Mais, en outre, chacune des hélices H_λ constitue aussi une courbe intégrale de ce système.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

ON RANDOM VARIABLES WHOSE QUOTIENT FOLLOWS THE CAUCHY LAW

BY

I. KOTLARSKI (WARSAW)

1. Introduction. Let the random variable X with frequency function $f(x)$ have the following property: the quotient of two independent random variables having the same frequency function $f(x)$ follows the Cauchy law, with the frequency function

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2} \quad (-\infty < y < +\infty). \tag{1}$$

Denote by $\mathcal{X}$ the set of the random variables X having the above-mentioned property. It has been supposed that only the variable with the normal frequency

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

belongs to $\mathcal{X}$. Laha [6] proved this conjecture to be false, showing that the variable with the frequency

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^4} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{3}$$

also belongs to $\mathcal{X}$.

In this paper we shall give a method of construction of an arbitrary number of random variables belonging to $\mathcal{X}$, and some conditions necessary and sufficient for belonging to $\mathcal{X}$.

I am greatly indebted to professor M. Fisz for his suggestions and remarks.

2. The Mellin transform of a symmetrical random variable. It is known that for X to belong to $\mathcal{X}$ it is necessary and sufficient that its frequency $f(x)$ satisfy the integral equation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(yx)f(x)\,|x|\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2} \quad (-\infty < y < +\infty) \tag{4}$$

(see [3], formula (2.9.16')).