hence

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n^2} z(\nu, t) \right|^4 dt = O(n^{4\varepsilon-2}).$$

For $4\varepsilon < 1$ the last estimate implies our theorem.

REFERENCES

[1] P. Erdős, *Some unsolved problems*, Michigan Mathematical Journal 4 (1957), p. 293-294.

[2] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935.

[3] A. Wintner, *The theory of measure in arithmetical semi-groups*, Baltimore 1944.

[4] — *Random factorizations and Riemann's hypothesis*, Duke Mathematical Journal 11 (1944), p. 267-275.

INSTITUTE OF MATHEMATICS,
A. MICKIEWICZ UNIVERSITY, POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE T. WAŻEWSKI

PAR

Z. OPIAL (CRACOVIE)

1. T. Ważewski a posé le problème suivant (Nouveau Livre Écossais, Problème 29 du 14. XII. 1946):

Le cercle D est contenu dans un ensemble ouvert Ω dans lequel un champ vectoriel dépendant du temps est défini. Ce champ vectoriel définit le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(t, x, y) \tag{1}$$

à seconds membres continus. Le vecteur $\mathbf{v}(t, x, y) = \{P(t, x, y), Q(t, x, y)\}$ ne s'annule en aucun point de la circonférence du cercle D. Lorsque le point (x, y) parcourt, pour un t fixe, cette circonférence, l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}$ (attaché à l'origine du système des coordonnées) décrit une courbe fermée C_t. Pour tout t, l'index de cette courbe par rapport au point $(0, 0)$ est supposé différent de zéro.

Dans ces hypothèses, existe-t-il au moins une solution du système (1) *qui soit située dans le cercle D pour tout t?*

Le but de la présente note est de démontrer que la réponse à cette question est négative.

2. Le champ vectoriel considéré ne s'annule pas sur la circonférence du cercle D; l'index de la courbe C_t ne peut donc pas dépendre de t. Pour démontrer que la réponse à la question envisagée est négative, il suffirait évidemment de construire un système d'équations différentielles (1) d'index bien déterminé, par exemple égal à l'unité, de telle manière que ses solutions ne jouissent pas de la propriété voulue. Pour $k=1$, c'est bien simple. Il suffit par exemple d'envisager le système

$$\frac{dx}{dt} = -y + \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = x + \sin t,$$

dont les solutions sont

$$x = (t+C)\cos t, \qquad y = (t+C)\sin t,$$

où C est une constante arbitraire. Or aucune de ces solutions n'est bornée pour $t \geqslant 0$, tandis que l'index de ce système, compté sur une circonférence de centre à l'origine des coordonnées et de rayon suffisamment grand, est égal à l'unité [1].

Mais nous allons démontrer davantage: *la réponse au problème est négative au sens fort*, c'est-à-dire, *quel que soit un entier k, il est possible de construire un système d'équations différentielles* (1) *d'index égal à k, de manière qu'aucune solution de ce système ne reste dans le cercle D pour tout $t \geqslant 0$.*

Nous nous bornerons à montrer la construction d'un tel système dans un cas particulier, pour $k = 4$, la construction pour d'autres valeurs de l'index étant tout à fait analogue.

3. Désignons par C_0 le cercle-unité sur le plan (x, y) et par $C_1, \ldots, C_6$ les six cercles assez petits situés comme dans la figure 1 (les points $P_1, \ldots, P_6$ de tangence de ces cercles avec C_0 formant un hexagone inscrit sur C_0).

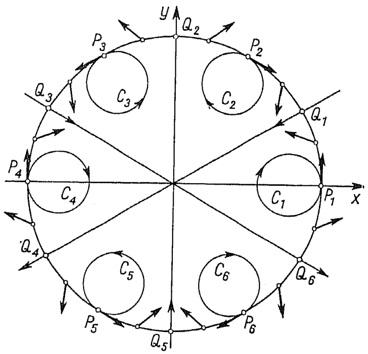

Fig. 1

Envisageons sur le plan (x, y) un système dynamique (I) tel que:

1° le point $(0, 0)$ est un point singulier;

2° les intégrales entrent dans le cercle C_0 par les arcs P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 et en sortent par P_2P_3, P_4P_5 et P_6P_1;

3° les intégrales issues des points Q_1, Q_3 et Q_5 sont les seules qui aboutissent au point singulier $(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$; de même les intégrales issues des points Q_2, Q_4 et Q_6 sont les seules qui aboutissent à ce point singulier lorsque $t \to -\infty$;

4° chacun des cercles $C_1, \ldots, C_6$ est une courbe intégrale;

5° l'index de ce système compté sur la circonférence du cercle C_0 est égal à 4;

6° par tout point du plan (x, y) passe une et une seule courbe intégrale.

---

[1] Je dois cette remarque à M. C. Olech.

Toute intégrale qui, dans tout l'intervalle $[t_1, t_2]$, reste dans le cercle C_0 sera appelée *intégrale du type* (W) relativement à cet intervalle.

Il est immédiat que pour un $T_1 > 0$ suffisamment grand, les points finals de toutes les intégrales du système (I) du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_1]$ sont situés dans un ensemble composé des cercles $C_1, \ldots, C_6$ et d'un voisinage aussi petit que l'on veut des courbes intégrales passant per les points Q_2, Q_4 et Q_6.

Pour $t > T_1$, remplaçons le système (I) par un nouveau système dynamique (II) qui s'obtient du système (I) par rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'origine des coordonnées. On obtient ainsi un système d'équations différentielles (II') qui est identique au système (I) dans l'intervalle $[0, T_1]$ et au système (II) pour $t > T_1$. Par intégrale de ce système nous entendrons une courbe continue qui est pour $0 \leqslant t < T_1$ une intégrale du système (I) et pour $t > T_1$ une intégrale du système (II).

Pour un $T_2 > T_1$ suffisamment grand, les points finals de toutes les courbes intégrales du système (II') qui sont du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_2]$ se trouvent dans un ensemble composé de cercles $C_1, \ldots, C_6$ et d'un voisinage V de $(0, 0)$ aussi petit que l'on veut.

Pour $t > T_2$, remplaçons de nouveau le système (II) par un système dynamique (III) qui ne diffère de (II) que par la position du point singulier. Plaçons-le non pas à l'origine des coordonnées, mais en un point en dehors du voisinage V, de sorte qu'aucune des trois courbes intégrales du système (III) qui aboutissent pour $t \to +\infty$ à ce point singulier ne passe par V. On peut évidemment construire un tel système sans altérer le système (II) sur la circonférence du cercle C_0. On obtient ainsi un système d'équations différentielles (III'), identique au système (II') dans l'intervalle $[0, T_2]$ et au système (III) pour $t > T_2$.

De même que précédemment, pour un $T_3 > T_2$ suffisamment grand, les points finals des courbes intégrales du type (W) du système (III') relativement à l'intervalle $[0, T_3]$ se trouveront dans les cercles $C_1, \ldots, C_6$.

Afin d'achever la construction, il suffit évidemment d'introduire pour $t > T_3$ un nouveau système dynamique d'index égal à 4 choisi de façon que toutes les courbes intégrales de ce système qui ont pour $t = T_3$ leurs points initiaux dans un des cercles $C_1, \ldots, C_6$ sortent après quelque instant du cercle C_0. On peut procéder en deux étapes. On introduira d'abord le système dynamique (IV), qui s'obtient du système (I) par une rotation d'angle $\pi/6$ autour de l'origine du système des coordonnées, ce qui garantit que, pour un $T_4 > T_3$ suffisamment grand, aucune intégrale du système (IV) issue pour $t = T_3$ d'un point des cercles C_1, C_3 et C_5 ne sera du type (W) relativement à l'intervalle $[T_3, T_4]$. Les points finals, pour $t = T_4$, des courbes intégrales du système (IV) issues pour $t = T_3$ des points des cercles C_2, C_4 et C_6 seront alors situés dans trois ensembles disjoints E_1, E_2 et E_3. Ensuite, pour $t > T_4$, on remplacera le système (IV) par un système dynamique (V) qui s'obtient du système (I) par rotation d'angle $\pi/2$ autour du point $(0,0)$. Il est facile de voir que toutes les courbes intégrales de ce système, issues pour $t = T_4$ des points de l'ensemble $E = E_1 + E_2 + E_3$ dans un intervalle $[T_4, T_5]$ suffisamment grand, sortiront du cercle C_0.

4. Considérons maintenant le système d'équations différentielles (S) identique dans chacun des intervalles $[0, T_1], (T_1, T_2], \ldots, (T_4, T_5]$ au système (I), (II), ..., (V) respectivement. D'après ce que nous avons dit précédemment, aucune intégrale de ce système n'est du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_5]$. Pour tout $t \in [0, T_5]$, l'index du système (S) compté sur la circonférence du cercle C_0 est égal à 4. Le système (S) nous fournit donc un exemple montrant que la réponse à la question de Ważewski est négative.

Les seconds membres des équations du système (S) sont discontinus pour $t = T_1, \ldots, T_4$, mais il est facile de modifier le système (S) de manière à en obtenir un système jouissant des mêmes propriétés et ayant les seconds membres continus. Désignons à cet effet par (S_n) le système d'équations différentielles défini comme suit: dans les intervalles $[T_p + p/n, T_{p+1} + p/n]$ $(p = 0, 1, \ldots, 4;\ T_0 = 0)$ le système (S_n) est identique aux systèmes (I), (II), ..., (V) respectivement; dans l'intervalle $[T_1, T_1 + 1/n]$, (S_n) s'obtient du système (I) par une rotation continue autour de l'origine des coordonnées et de vitesse constante, égale à $n\pi/3$; aux points $T_2 + 1/n$, $T_2 + 2/n$, (S_n) est égal aux systèmes (II) et (III) respectivement et dans l'intervalle $[T_2 + 1/n, T_2 + 2/n]$, les seconds membres de (S_n) sont des fonctions linéaires de la variable t; aux points $T_3 + 2/n$, $T_3 + 5/2n$ et $T_3 + 3/n$, (S_n) est égal aux systèmes (III), (II) et (IV) respectivement; dans l'intervalle $[T_3 + 2/n, T_3 + 5/2n]$, les seconds membres de (S_n) sont linéaires par rapport à la variable t, tandis que, dans l'intervalle $[T_3 + 5/2n, T_3 + 3/n]$, (S_n) s'obtient du système (II) par une rotation continue de vitesse constante, égale à $-n\pi/3$ autour du point $(0,0)$; enfin, dans l'intervalle $[T_4 + 3/n, T_4 + 4/n]$, on obtient (S_n) du système (IV) par une rotation continue autour de l'origine, de vitesse constante égale à $n\pi/3$.

On vérifie sans difficulté que les seconds membres du système d'équations différentielles (S_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions continues. De même, il est facile de vérifier que pour tout $t \in [0, T_5 + 4/n]$, l'index de ce système compté sur la circonférence du cercle C_0 est égal à 4.

Or, pour un nombre entier N suffisamment grand, aucun des systèmes (S_n) $(n = N+1, N+2, \ldots)$ ne peut admettre d'intégrales du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_5]$. En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite de nombres entiers $\{n_s\}$ et une suite d'intégrales des systèmes (S_{n_s}) dont chacune serait du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_5]$. On pourrait extraire de cette suite d'intégrales une suite partielle uniformément convergente dans tout l'intervalle $[0, T_5]$ vers une intégrale du système (S). Mais cette intégrale devrait être du type (W) relativement à l'intervalle $[0, T_5]$, ce qui est impossible.

5. Supposons maintenant que k soit un entier positif donné à l'avance. Comme nous l'avons déjà dit, la construction des n^{os} 3 et 4 se laisse répéter à des modifications inessentielles près de manière à fournir un système d'équations différentielles d'index égal à k et dont aucune intégrale ne reste dans le cercle C_0 pour tout $t \geqslant 0$. Au lieu des six cercles $C_1, \ldots, C_6$, on doit en prendre $2k-2$.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1959