On the other hand,

$$\sigma_{n,k} = \mathcal{C}_n^a f + \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{\nu - n}{k}\right) \frac{1}{\nu} \mathcal{K}_\nu \mathcal{C}^a f,$$

or

$$\sigma_{n,k} = \mathcal{C}_{n+k-1}^a f - \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \frac{\nu - n}{k\nu} \mathcal{K}_\nu \mathcal{C}^a f.$$

By lemma 2 and the hypothesis $\mathcal{K}f \leqslant M$

$$\mathcal{K}\mathcal{C}^a f = \mathcal{C}^a \mathcal{K} f \leqslant M,$$

and therefore

$$\sigma_{n,k} - \mathcal{C}_n^a f \leqslant M \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \frac{1}{\nu} \leqslant M \frac{k-1}{n}$$

and

$$\mathcal{C}_{n+k-1}^a f - \sigma_{n,k} \leqslant M \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \frac{1}{\nu} \leqslant M \frac{k-1}{n}.$$

Now, if $k = [n\varepsilon]+1$, where ε is an arbitrary positive real number, then

$$\frac{n}{k} = \frac{n}{[n\varepsilon]+1} < \frac{n}{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \frac{k-1}{n} = \frac{[n\varepsilon]}{n} < \frac{n\varepsilon+1}{n} = \varepsilon + \frac{1}{n},$$

whence

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,k} = s, \qquad s - \underline{\lim}\, \mathcal{C}^a f \leqslant M\varepsilon, \qquad \overline{\lim}\, \mathcal{C}^a f - s \leqslant M\varepsilon.$$

Thus

$$s - M\varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, \mathcal{C}^a f \leqslant \overline{\lim}\, \mathcal{C}^a f \leqslant s + M\varepsilon$$

and the theorem is established.

COROLLARY. *If $\mathcal{K}f \leqslant M$ for some real M and $\lim \mathcal{C}^{a+1} f = s$ for $a \geqslant 0$, then $\lim f = s$.*

Proof. From $\lim \mathcal{C}^{a+1} f = s$ follows $\lim \mathcal{C}^{k+1} f = s$ for any integer $k \geqslant a$. Applying the theorem $k+1$ times, we obtain $\lim \mathcal{C}^0 f = \lim f = s$.

REFERENCES

[1] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford 1949.

[2] M. E. Kogbetliantz, *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 51, Paris 1931.

[3] A. Zygmund, *Two notes on the summability of infinite series*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 225-229.

Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

ON MULTIPLICATIVE SEQUENCES

BY

Z. CIESIELSKI (POZNAŃ)

1. Let $\{x(n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, denote a sequence satisfying the followong conditions:

1° $x(n) = 1$ or -1 for $n = 1, 2, \ldots$,

2° $x(nm) = x(n)x(m)$ for $n, m = 1, 2, \ldots$

P. Erdős has asked (see [1], problem 9): if the limit

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x(1)+\ldots+x(n)}{n}$$

exists for every sequence $\{x(n)\}$ satisfying conditions 1° and 2°.

The theorem proved in this section (*) concerns this problem but gives no final answer.

Now let $\{p_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, denote the sequence of all consecutive prime numbers. Let us write

$$n = p_0^{a_0^{(n)}} \ldots p_{k_n}^{a_{k_n}^{(n)}},$$

where $a_i^{(n)}$, $i = 0, \ldots, k_n$, are non-negative integers and $a_{k_n}^{(n)} > 0$. We denote by $\{r_n(t)\}$, $n = 0, 1, \ldots$, the set of all Rademacher functions (see e. g. [2], p. 42). Let us put

$$x(n, t) = [r_0(t)]^{a_0^{(n)}} \ldots [r_{k_n}(t)]^{a_{k_n}^{(n)}}.$$

Obviously, for almost all $t \in \langle 0, 1\rangle$ conditions 1° and 2° for the sequences $\{x(n, t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, are satisfied.

THEOREM 1. *For almost all $t \in \langle 0, 1\rangle$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(1, t)+\ldots+x(n, t)}{n} = 0.$$

(*) (Added in proof.) After having written this note I learned that theorem 1 had been proved in another way by Wintner (see [4], p. 270, corollary).

Proof. Throughout this proof we assume $\nu_1 < \ldots < \nu_s$ and $\mu_1 < \ldots < \mu_r$. Let us remark that

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x(\nu, t) = \frac{1}{n}\sum_{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}\leqslant n} m^{(n)}_{\nu_1\ldots\nu_s} r_{\nu_1}(t)\ldots r_{\nu_s}(t),$$

where $m^{(n)}_{\nu_1\ldots\nu_s}$ denotes the number of all positive integers less than or equal to n which are of the form

$$(p_0^{a_0}\ldots p_k^{a_k})^2 p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s};$$

here a_i, $i = 1, \ldots, k$, are non-negative integers and $0 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_s \leqslant k$, k being the number of primes not exceeding n. It is easy to see that (1)

$$m^{(n)}_{\nu_1\ldots\nu_s} = \left[\sqrt{\frac{n}{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}}}\right].$$

Using the properties of Rademacher functions we obtain

$$I_n = \int_0^1 \Big\{\sum_{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}\leqslant n}\left[\sqrt{\frac{n}{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}}}\right] r_{\nu_1}(t)\ldots r_{\nu_s}(t)\Big\}^4 dt$$

$$= \sum_{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}\leqslant n}\left[\sqrt{\frac{n}{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}}}\right]^4 + 3\sum\left[\sqrt{\frac{n}{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}}}\right]^2\left[\sqrt{\frac{n}{p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_r}}}\right]^2,$$

where the last sum is extended over all pairs of systems $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ and $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ such that $p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s} \leqslant n$, $p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_r} \leqslant n$, and such that $r = s$, $\nu_i = \mu_i$, $i = 1, \ldots, s$, does not hold. Thus

$$I_n = O\Big(n^2 \sum_{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}\leqslant n}\frac{1}{(p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s})^2}\Big) + $$

$$+ O\Big\{\Big(n\sum_{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}\leqslant n}\frac{1}{p_{\nu_1}\ldots p_{\nu_s}}\Big)^2\Big\} = O(n^2\log^2 n).$$

Finally

$$\int_0^1\Big\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x(\nu, t)\Big\}^4 dt = O\Big(\frac{\log^2 n}{n^2}\Big);$$

hence, by the theorem of Lévy, theorem 1 follows.

(1) $[t]$ denotes the integral part of t.

2. In this section $\{z(n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, will denote a complex sequence satisfying the conditions

1′ $|z(n)| = 1$ for $n = 1, 2, \ldots$,

2′ $z(nm) = z(n)z(m)$ for $n, m = 1, 2, \ldots$

It has been shown by A. Wintner (see [3], p. 48) that there is a sequence $\{z(n)\}$ satisfying 1′ and 2′ for which the limit (*), with $z(n)$ in place of $x(n)$, does not exist.

Now let $\{\Theta_n(t)\}$, $n = 0, 1, \ldots$, denote the set of all Steinhaus functions (see [2], p. 134). The notation of section 1 will also be used throughout. Moreover, we put

$$z(n, t) = [\Theta_0(t)]^{a_0^{(n)}}\ldots[\Theta_{k_n}(t)]^{a_{k_n}^{(n)}}.$$

THEOREM 2. *For almost all $t \in \langle 0, 1\rangle$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z(1, t) + \ldots + z(n, t)}{n} = 0.$$

Proof. Let us remark that

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n} z(\nu, t)\Big|^4 = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho=1}^{n} z(\lambda\nu, t)\bar{z}(\mu\varrho, t).$$

Using the properties of Steinhaus functions we obtain (2)

$$\int_0^1 z(\mu, t)\bar{z}(\nu, t)\,dt = \delta_{\mu,\nu}.$$

In this way we get

$$J_n = \int_0^1\Big|\sum_{\nu=1}^{n} z(\nu, t)\Big|^4 dt = \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho=1}^{n}\delta_{\lambda\nu,\mu\varrho}$$

$$= \sum_{k=1}^{n^2}\Big(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}\delta_{\lambda\mu,k}\Big)^2 = O\Big(\sum_{k=1}^{n^2}\tau^2(k)\Big),$$

where $\tau(k)$ denotes the number of divisors of number k. Since it is known that, for every $\varepsilon > 0$, $\tau(k) = O(k^{\varepsilon})$ we have

$$J_n = O(n^{2(2\varepsilon+1)});$$

(2) As usual $\delta_{\mu,\nu}$ equals 0 for $\mu \neq \nu$ and 1 for $\mu = \nu$.

hence

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n^2} z(\nu, t) \right|^4 dt = O(n^{4\varepsilon-2}).$$

For $4\varepsilon < 1$ the last estimate implies our theorem.

REFERENCES

[1] P. Erdős, *Some unsolved problems*, Michigan Mathematical Journal 4 (1957), p. 293-294.

[2] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935.

[3] A. Wintner, *The theory of measure in arithmetical semi-groups*, Baltimore 1944.

[4] — *Random factorizations and Riemann's hypothesis*, Duke Mathematical Journal 11 (1944), p. 267-275.

INSTITUTE OF MATHEMATICS,
A. MICKIEWICZ UNIVERSITY, POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR UN PROBLÈME DE T. WAŻEWSKI

PAR

Z. OPIAL (CRACOVIE)

1. T. Ważewski a posé le problème suivant (Nouveau Livre Écossais, Problème 29 du 14. XII. 1946):

Le cercle D est contenu dans un ensemble ouvert Ω dans lequel un champ vectoriel dépendant du temps est défini. Ce champ vectoriel définit le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(t, x, y) \tag{1}$$

à seconds membres continus. Le vecteur $\mathbf{v}(t, x, y) = \{P(t, x, y), Q(t, x, y)\}$ ne s'annule en aucun point de la circonférence du cercle D. Lorsque le point (x, y) parcourt, pour un t fixe, cette circonférence, l'extrémité du vecteur $\mathbf{v}$ (attaché à l'origine du système des coordonnées) décrit une courbe fermée C_t. Pour tout t, l'index de cette courbe par rapport au point $(0, 0)$ *est supposé différent de zéro.*

Dans ces hypothèses, existe-t-il au moins une solution du système (1) *qui soit située dans le cercle D pour tout t?*

Le but de la présente note est de démontrer que la réponse à cette question est négative.

2. Le champ vectoriel considéré ne s'annule pas sur la circonférence du cercle D; l'index de la courbe C_t ne peut donc pas dépendre de t. Pour démontrer que la réponse à la question envisagée est négative, il suffirait évidemment de construire un système d'équations différentielles (1) d'index bien déterminé, par exemple égal à l'unité, de telle manière que ses solutions ne jouissent pas de la propriété voulue. Pour $k=1$, c'est bien simple. Il suffit par exemple d'envisager le système

$$\frac{dx}{dt} = -y + \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = x + \sin t,$$