genre étant évidemment fermé, soit x le „plus petit" point du type envisagé. Il y a au moins deux ensembles E_i et E_j $(i \neq j)$ tels que chaque voisinage de x rencontre une infinité de composantes de E_i et de E_j (car entre deux composantes quelconques d'un ensemble E_i il y a toujour s au moins une composante d'un autre E_j). Or, si $a_{ij} > 0$, les composantes de E_i et celles de E_j si $a_{ij} < 0$, devraient posséder un point d'accumulation situé à gauche de x; il y aurait contradiction.

Considérons le cas $I = (0, 1)$ et choisissons la notation de sorte qu'on ait $0 = \inf E_1$. On voit aisément que E_1 possède une composante de la forme $(0, \varepsilon\rangle$. De même, si $1 = \sup E_n$, E_n possède une composante de la forme $\langle 1-\eta, 1)$ $(0 < \varepsilon < 1-\eta < 1)$. Considérons toutes les composantes des E_i fermées de gauche et soit a la plus petite des extrémités gauches de ces composantes. On a évidemment $0 \neq a \in E_1$, donc un ensemble E_i $(i \neq 1)$ possède une composante de la forme (a', a), d'où E_1 en possède une de la forme $(a'+a_{i1}, a+a_{i1})$, où $a+a_{i1} < a$, ce qui est impossible, puisque $a+a_{i1}$ ne peut pas être extrémité gauche d'une composante fermée de gauche.

On raisonne de même si $I = \langle 0, 1\rangle$. En ce cas E_1 possède une composante de la forme $\langle 0, \varepsilon)$, E_n une de la forme $(1-\eta, 1\rangle$. On désigne par a la plus petite extrémité gauche des composantes ouvertes de gauche, on a $0 \neq a \in E_1$, donc un E_i $(i \neq 1)$ possède une composante $\langle a', a\rangle$, E_1 en possède une $\langle a'+a_{i1}, a+a_{i1}\rangle$, quoique $a+a_{i1} < a$ ne peut pas être extrémité gauche d'une composante ouverte de gauche.

Nos hypothèses aboutissent donc à une contradiction.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Gustin, *Partitioning an interval into finitely many congruent parts*, Annals of Mathematics 54 (1951), p. 250-261.

[2] Jan Mycielski, *On the decomposition of a segment into congruent sets and related problems*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 24-27.

Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

ÜBER UMORDNUNG VON REIHEN

VON

B. JASEK (WROCŁAW)

Eine Folge $\{N_n\}$ natürlicher Zahlen, in der jede natürliche Zahl genau einmal vorkommt, werden wir kurz eine *Permutation* nennen. Das Ziel dieser Arbeit ist für eine Klasse von Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Gliedern, eine Klasse von *summentreuen* Permutationen auszusondern, d. h. von solchen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n}$ gilt.

SATZ. *Hat man für die Glieder einer konvergenten Reihe*

$$\lim_n n\cdot a_n = 0, \tag{1}$$

und erfüllt eine Permutation $\{N_n\}$ *die Bedingung*

$$\lim_n n\cdot a_{N_n} = 0, \tag{2}$$

so ist $\{N_n\}$ *summentreu.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot z^n \tag{3}$$

und

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n}\cdot z^{N_n} \tag{4}$$

für $z = 1$ endliche Werte haben und $f(1) = g(1)$ gilt. Es sei R der Konvergenzradius von (3). Da $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $R \geqslant 1$. Da die Reihe (3) für $|z| < R$ absolut konvergiert, so hat man

$$f(z) = g(z) \quad \text{für} \quad |z| < R. \tag{5}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1), \tag{6}$$

was im Fall $R = 1$ durch den Abelschen Satz gewährleistet ist. Daher folgt aus (5)

$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1). \tag{7}$$

Mithin genügt es die Gleichheit

$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = g(1) \tag{8}$$

zu beweisen. Zu diesem Zweck schreiben wir für $k = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqslant x < 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_{N_n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n}\cdot x^{N_n}\right| = \left|\sum_{n=1}^{k} a_{N_n}(1-x^{N_n}) - \sum_{n=k+1}^{\infty} a_{N_n}\cdot x^{N_n}\right| \tag{9}$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{k} a_{N_n}\cdot(1-x)\cdot(1+x+\ldots+x^{N_n-1}) + \sum_{n=k+1}^{\infty} n\cdot a_{N_n}\cdot\frac{x^{N_n}}{n}\right|$$

$$\leqslant (1-x)\cdot\sum_{n=1}^{k} |a_{N_n}|\cdot N_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} n\cdot|a_{N_n}|\cdot\frac{x^{N_n}}{k+1}.$$

Die Folge $\{|a_{N_n}|\cdot N_n\}$ entsteht aus der Folge $\{n|a_n|\}$ durch eine Umordnung, und daher, auf Grund von (1), hat man $|a_{N_n}|\cdot N_n \to 0$. Somit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl K_1, daß für alle $k > K_1$ $\sum_{n=1}^{k} N_n\cdot|a_{N_n}| \leqslant \varepsilon\cdot k$ ist. Nach (1) gilt $n\cdot|a_{N_n}| < \varepsilon$ für $n > K_2$. Setzen wir $k \geqslant K = \max(K_1, K_2)$, so schließen wir aus (9)

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_{N_n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n}\cdot x^{N_n}\right| \leqslant (1-x)\cdot\varepsilon\cdot k + \varepsilon\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{x^{N_n}}{k+1} \tag{10}$$

$$\leqslant (1-x)\,\varepsilon k + \frac{\varepsilon}{k+1}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Wird hier $x = 1-1/k$ gesetzt, so kommt die Abschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_{N_n} - g\left(1-\frac{1}{k}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

woraus (8) folgt.

Beispiel. Die bedingt konvergente Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = (-1)^n\frac{1}{n\log_2 n} \tag{11}$$

transformieren wir folgenderweise: wir bilden die Reihe

$$(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\ldots+(a_{2^k}+\ldots+a_{2^{k+1}-1})+\ldots,$$

ordnen die Summanden in einzelnen Klammern beliebig um und beseitigen nachher die Klammern. Die erhaltene Permutation $\{N_n\}$ von (11) erfüllt folgende Bedingung:

$$n+1-2^k \leqslant N_n \leqslant n-1+2^k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad 2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$$

oder, anders geschrieben,

$$\frac{n}{(n-1+2^k)\log_2 N_n} \leqslant \frac{n}{N_n\log_2 N_n} \leqslant \frac{n}{(n+1-2^k)\log_2 N_n}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt $n\cdot a_{N_n} \to 0$. Also sind alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und daher ist die Permutation $\{N_n\}$ der Reihe (11) summentreu.

Die Umkehrung des bewiesenen Satzes wäre falsch, wie es das folgende Beispiel zeigt: es sei für die Reihe (11)

$$N_n = \begin{cases} n, & \text{wenn } n \neq 2^{2^k} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, \\ 2^{2^{2l}}, & \text{wenn } n = 2^{2^{2l+1}} \quad \text{für } l = 0, 1, 2, \ldots, \\ 2^{2^{2l+1}}, & \text{wenn } n = 2^{2^{2l}} \quad \text{für } l = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Die von dieser Permutation betroffenen Glieder bilden eine absolut konvergente Reihe. Daraus schließt man mühelos, daß die Summe von (11) unverändert bleibt. Dennoch ist die Bedingung $n\cdot a_{N_n} \to 0$ nicht erfüllt, weil die durch $n = 2^{2^{2l+1}}$ bestimmte Teilfolge von $\{na_{N_n}\}$ nach Unendlich strebt.

Folgende Probleme liegen nahe:

P 300. *Es sei* $na_n \to 0$ *und* $na_{N_n} \to 0$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sei divergent. Gilt dann*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{a_{N_1}+\ldots+a_{N_n}} = 1\,?$$

P 301. *Man soll die Klasse aller Permutationen charakterisieren, die für jede Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $n\cdot a_n \to 0$ *summentreu sind.*

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1959