Proof of the Theorem. Let us assume that $a_I(f) < \infty$. For every positive integer N we set

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad |f(x)| \leqslant N, \\ N & \text{if} \quad f(x) > N, \\ -N & \text{if} \quad f(x) < -N. \end{cases}$$

Obviously, $a_I(f_N) \leqslant a_I(f)$. Further, by Lemma 2, f_N is equivalent in I to a function f_N^* of bounded variation. Moreover, we may suppose that f_N^* is continuous on the right. By Lemma 3, f_N^* has at most $[a_I(f)]$ points of jumps, in the interior of I. By Lemma 1, f_N^* is identically constant in every interval of continuity. Hence it follows that f_N $(N = 1, 2, \ldots)$ are equivalent in I to step functions with at most $[a_I(f)]$ jumps. Thus f is equivalent in I to a step function. It is easy to verify that for a step function its index of variability is equal to the number of jumps. Hence directly follows the assertion of our Theorem.

REFENCES

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals*, Mathematische Zeitschrift 27 (1928), p. 565-606.

[2] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lwów 1935.

Reçu par la Rédaction le 16. 3. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR LES THÉORÈMES DE J. MYCIELSKI ET W. GUSTIN CONCERNANT LES DÉCOMPOSITIONS DE L'INTERVALLE

PAR

Á. CSÁSZÁR (BUDAPEST) ET S. MARCUS (BUCAREST)

Dans un travail récent J. Mycielski a démontré le théorème suivant [2]:

Pour tout nombre transfini $\mathfrak{m}$, inférieur ou égal à la puissance du continu, chacun des intervalles $(0,1)$, $\langle 0,1)$, $\langle 0,1\rangle$ est une réunion de $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, superposables deux à deux par translation.

En ce qui concerne l'intervalle $\langle 0,1)$, il est évident que le théorème de J. Mycielski reste valable aussi dans le cas où $\mathfrak{m}$ est un nombre entier positif. Ce n'est pas le cas pour les intervalles $(0,1)$ et $\langle 0,1\rangle$, comme il résulte du théorème suivant, établi par W. Gustin [1]:

Pour tout nombre entier $n > 1$, aucun des intervalles $(0,1)$ et $\langle 0,1\rangle$ ne peut être décomposé en n ensembles disjoints superposables par translation ou par rotation.

La démonstration de ce théorème donnée par W. Gustin est assez compliquée et occupe dix pages (d'ailleurs on y démontre un résultat plus général). Il ne sera peut être pas dépourvu d'intérêt de montrer que le théorème de W. Gustin admet une démonstration simple et directe, dès qu'on supprime dans l'énoncé les derniers trois mots: „ou par rotation''. On obtiendra ainsi une démonstration rapide du fait que dans le théorème de J. Mycielski on ne peut pas remplacer $\mathfrak{m}$ par un entier supérieur à 1.

THÉORÈME. *Il n'existe aucune décomposition de l'intervalle* $(0,1)$ *ou* $\langle 0,1\rangle$ *en* $n > 1$ *ensembles disjoints, superposables, deux à deux, par translation.*

Démonstration. Soit $I = (0,1)$ ou $\langle 0,1\rangle$, $I = \bigcup_{1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = 0$ $(i \neq j)$, $E_i + a_{ij} = E_j$.

Le nombre des composantes des E_i est fini. En effet, si ce nombre était infini, il existerait dans $\langle 0,1\rangle$ un point dont chaque voisinage rencontre une infinité de ces composantes. L'ensemble des points de ce genre étant évidemment fermé, soit x le „plus petit" point du type envisagé. Il y a au moins deux ensembles E_i et E_j $(i \neq j)$ tels que chaque voisinage de x rencontre une infinité de composantes de E_i et de E_j (car entre deux composantes quelconques d'un ensemble E_i il y a toujour s au moins une composante d'un autre E_j). Or, si $a_{ij} > 0$, les composantes de E_i et celles de E_j si $a_{ij} < 0$, devraient posséder un point d'accumulation situé à gauche de x; il y aurait contradiction.

Considérons le cas $I = (0,1)$ et choisissons la notation de sorte qu'on ait $0 = \inf E_1$. On voit aisément que E_1 possède une composante de la forme $(0, \varepsilon\rangle$. De même, si $1 = \sup E_n$, E_n possède une composante de la forme $\langle 1-\eta, 1)$ $(0 < \varepsilon < 1-\eta < 1)$. Considérons toutes les composantes des E_i fermées de gauche et soit a la plus petite des extrémités gauches de ces composantes. On a évidemment $0 \neq a \,\epsilon E_1$, donc un ensemble E_i $(i \neq 1)$ possède une composante de la forme (a', a), d'où E_1 en possède une de la forme $(a'+a_{i1}, a+a_{i1})$, où $a+a_{i1} < a$, ce qui est impossible, puisque $a+a_{i1}$ ne peut pas être extrémité gauche d'une composante fermée de gauche.

On raisonne de même si $I = \langle 0, 1\rangle$. En ce cas E_1 possède une composante de la forme $\langle 0, \varepsilon)$, E_n une de la forme $(1-\eta, 1\rangle$. On désigne par a la plus petite extrémité gauche des composantes ouvertes de gauche, on a $0 \neq a \,\epsilon E_1$, donc un E_i $(i \neq 1)$ possède une composante $\langle a', a\rangle$, E_1 en possède une $\langle a'+a_{i1}, a+a_{i1}\rangle$, quoique $a+a_{i1} < a$ ne peut pas être extrémité gauche d'une composante ouverte de gauche.

Nos hypothèses aboutissent donc à une contradiction.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Gustin, *Partitioning an interval into finitely many congruent parts*, Annals of Mathematics 54 (1951), p. 250-261.

[2] Jan Mycielski, *On the decomposition of a segment into congruent sets and related problems*, Colloquium Mathematicum 5 (1957), p. 24-27.

Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

ÜBER UMORDNUNG VON REIHEN

VON

B. JASEK (WROCŁAW)

Eine Folge $\{N_n\}$ natürlicher Zahlen, in der jede natürliche Zahl genau einmal vorkommt, werden wir kurz eine *Permutation* nennen. Das Ziel dieser Arbeit ist für eine Klasse von Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit komplexen Gliedern, eine Klasse von *summentreuen* Permutationen auszusondern, d. h. von solchen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n}$ gilt.

SATZ. *Hat man für die Glieder einer konvergenten Reihe*

$$\lim_n n \cdot a_n = 0, \tag{1}$$

und erfüllt eine Permutation $\{N_n\}$ *die Bedingung*

$$\lim_n n \cdot a_{N_n} = 0, \tag{2}$$

so ist $\{N_n\}$ *summentreu.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Funktionen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n \tag{3}$$

und

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{N_n} \cdot z^{N_n} \tag{4}$$

für $z = 1$ endliche Werte haben und $f(1) = g(1)$ gilt. Es sei R der Konvergenzradius von (3). Da $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $R \geqslant 1$. Da die Reihe (3) für $|z| < R$ absolut konvergiert, so hat man

$$f(z) = g(z) \quad \text{für} \quad |z| < R. \tag{5}$$

Es gilt

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1), \tag{6}$$