COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

EIN ERGODISCHES PARADOXON

VON

S. GŁADYSZ (WROCŁAW)

$(X, \mathcal{E}, m)$, $m(X) = 1$, sei ein Maßraum und T eine meßbare und maßtreue Transformation von X. Weiter, $\varrho(x, y)$ sei eine „Entfernung" in X, für welche $\varrho(x, Tx)$ meßbar und

$$\int |\varrho(x, Tx)|\, dm < \infty$$

ist. Ist eine Menge $E \epsilon \mathcal{E}$ und vorläufig auch $x \epsilon X$ festgesetzt, so seien $n_1, n_2, \ldots$ aufeinander folgende Indizes, für die $T^n(x) \epsilon E$. Ist $\chi(x)$ die charakteristische Funktion von E, so gilt $\chi(T^{n_k}x) = 1$ und $\chi(T^n x) = 0$ für $n \neq n_k$.

Aus dem Birkhoffschen Ergodensatze folgt sofort die Existenz einer mittleren Länge $\varrho_1(x)$ der vom Punkt x zwischen aufeinander folgenden Eintritten in die Menge E zurückgelegten Wege $r_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Definitionsgemäß hat man

$$\varrho_1(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{\varkappa=1}^{k} r_\varkappa(x),$$

wo $r_k(x) = \varrho(T^{n_{k-1}}x, T^{n_{k-1}+1}x) + \ldots + \varrho(T^{n_k-1}x, T^{n_k}x)$ und

$$k = \chi(Tx) + \chi(T^2x) + \ldots + \chi(T^{n_k}x). \tag{1}$$

Ist T metrisch transitiv und $m(E) > 0$, so ist fast überall (f. ü.)

$$\varrho_1(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{n_k} \varrho(T^{\varkappa-1}x, T^\varkappa x)}{\sum_{\varkappa=1}^{n_k} \chi(T^\varkappa x)}$$

$$= \frac{\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{\varkappa=1}^{n_k} \varrho(T^{\varkappa-1}x, T^\varkappa x)}{\lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{\varkappa=1}^{n_k} \chi(T^\varkappa x)} = \frac{\int \varrho(x, Tx)\, dm}{m(E)}.$$

H. Steinhaus stellte die Frage, wie die Wege r_{ks}, $k = 1, 2, \ldots$, beschaffen sind. Wie zu erwarten war, existiert für jedes s f. ü. die mittlere Länge

$$\varrho_s(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{\varkappa=1}^{k} r_{\varkappa s}(x) \tag{2}$$

dieser Wege (Satz 1), aber es stellt sich ziemlich unerwartet heraus, daß für $s > 1$ diese Grenzwerte wesentlich von x abhängen (Satz 2).

SATZ 1. *Ist T metrisch transitiv und ist $m(E) > 0$, so existiert f. ü. der Grenzwert (2) und die Funktion ϱ_s kann im wesentlichen nur s verschiedene Werte annehmen.*

Beweis. Es wird zuerst die Existenz von (2) gezeigt.

Ist $\chi(x)$ die charakteristische Funktion von E und, bei festem s,

$$q(x) = e^{\frac{2\pi}{s} i\chi(x)},$$

so hat das Produkt $q(Tx)\cdot q(T^2x)\ldots q(T^kx)$ den Wert 1 nur dann, wenn

$$\chi(Tx)+\chi(T^2x)+\ldots+\chi(T^kx) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, s); \tag{3}$$

andernfalls hat es einen der Werte $e^{2\pi i n/s}$, $n = 1, \ldots, s-1$. Also

$$\sum_{m=1}^{s} q^m(Tx)\ldots q^m(T^kx) = \begin{cases} s, & \text{im Falle (3),} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} r_\varkappa(x) = \frac{1}{s}\cdot \sum_{m=1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{n_{ks}} q^m(Tx)\ldots q^m(T^\varkappa x)\cdot \varrho(T^{\varkappa-1}x, T^\varkappa x).$$

Daher folgt aus (1) und aus (2):

$$\varrho_s(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{s}\sum_{m=1}^{s}\sum_{\varkappa=1}^{n_{ks}} q^m(Tx)\ldots q^m(T^\varkappa x)\cdot\varrho(T^{\varkappa-1}x, T^\varkappa x)}{\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{n_{ks}}\chi(T^\varkappa x)}$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \frac{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_{ks}}\sum_{\varkappa=1}^{n_{ks}} q^m(Tx)\ldots q^m(T^\varkappa x)\cdot\varrho(T^{\varkappa-1}x, T^\varkappa x)}{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_{ks}}\sum_{\varkappa=1}^{n_{ks}}\chi(T^\varkappa x)}.$$

Da T metrisch transitiv ist, so ist der Nenner f. ü. gleich $m(E) > 0$; auch die Grenzwerte

$$F_m(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q^m(Tx)\ldots q^m(T^kx)\cdot\varrho(T^{k-1}x, T^kx), \tag{4}$$

die im Zähler auftreten, existieren f. ü. und es gilt

$$\varrho_s(x) = \frac{\sum_{m=1}^{s} F_m(x)}{m(E)}. \tag{5}$$

Wir wollen den Wertevorrat von $\varrho_s(x)$ untersuchen.

Mit $k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_r = s$ werden alle natürlichen Zahlen $\leqslant s$ bezeichnet, für welche (weiter zu bestimmende) meßbare Funktionen $H_\varkappa(x)$ existieren mit

$$H_\varkappa(x) \neq 0, \quad q^{k_\varkappa}(Tx)\cdot H_\varkappa(Tx) = H_\varkappa(x) \quad \text{f. ü.} \tag{6}$$

(0 und s sind gewiß solche Zahlen, denn in diesem Falle kann man $q^k(x) \equiv 1$ und $H(x) \equiv 1$ setzen).

Es ist leicht einzusehen, daß $k_\varkappa = \varkappa\cdot k_1$ ist. Jede der Zahlen $\lambda\cdot k_1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant s/k_1$, ist eine der Zahlen $k_\varkappa$, denn aus

$$H_1(x) \neq 0, \quad q^{k_1}(Tx)\cdot H_1(Tx) = H_1(x) \quad \text{f. ü.}$$

folgt sofort $H^\lambda(x) \neq 0$ und

$$q^{\lambda k_1}(Tx)\cdot H_1^\lambda(Tx) = [q^{k_1}(Tx)\cdot H_1(Tx)]^\lambda = H_1^\lambda(x) \quad \text{f. ü.}$$

Wäre ein $k_\varkappa$ nicht von der Gestalt λk_1, wobei $\lambda k_1 < k_\varkappa < (\lambda+1)k_1$, dann wäre $k_\varkappa - \lambda k_1$ auch eine der Zahlen $k_\varkappa$. Denn für die Funktion $H^*(x) = H_\varkappa(x)/H_1^\lambda(x)$ würde

$$H^*(x) \neq 0, \quad q^{\varkappa-\lambda k_1}(Tx)\cdot H^*(Tx) = \frac{q^{k_\varkappa}(Tx)\cdot H_\varkappa(Tx)}{q^{\lambda k_1}(Tx)\cdot H_1^\lambda(Tx)} = H^*(x)$$

f. ü. gelten, also für $k_\varkappa - \lambda k_1$ gäbe es eine Funktion, die (6) erfüllte. Das ist aber wegen $0 < k_\varkappa - \lambda k_1 < k_1$ unmöglich.

Ferner werden wir zeigen, daß man solche konstanten c_m und solche ganzen λ_m wählen kann, daß f. ü.

$$F_m(x) = c_m\cdot H_1^{\lambda_m}(x), \quad m = 1, \ldots, s, \tag{7}$$

gilt.

Dies ist trivial, wenn $F_m = 0$ f. ü. Sei also $F_m \neq 0$ auf einer Menge von positivem Maße. Aus (4) folgt aber

(8) $$F_m(x) = q^m(Tx)\cdot F_m(Tx) \quad \text{f. ü.},$$

also $|F_m(x)| = |F_m(Tx)|$. Aus der metrischen Transitivität von T folgt $|F_m(x)| = \text{Const.}$ f. ü. und $F_m \neq 0$ f. ü. So muß m, als eine der Zahlen $k_1, \ldots, k_r$, die Gestalt $m = \lambda_m \cdot k_1$ haben. Aus (6) und (7) folgt

$$\frac{F_m(x)}{H_1^{\lambda m}(x)} = \frac{q^m(Tx)\cdot F_m(Tx)}{q^{\lambda m\cdot k_1}(Tx)\cdot H_1^{\lambda m}(Tx)} = \frac{F_m(Tx)}{H_1^{\lambda m}(Tx)},$$

also $F_m(x)/H_1^{\lambda m}(x) = c_m = \text{Const.}$ f. ü. Man erhält daher aus (5) und (6)

$$\varrho_s(x) = \frac{1}{m(E)}\sum_{\varkappa=1}^{s/k_1} c_\varkappa\cdot H_1^{\lambda_\varkappa}(x)$$

und die Frage nach der Anzahl der Werte von ϱ_s wird auf eine analoge zurückgeführt, welche die Funktion H_1 betrifft. Da aus (6) und aus der Definition von q

$$H_1^s(x) = [q^{k_1}(Tx)\cdot H_1(Tx)]^s = H_1^s(Tx) \quad \text{f. ü.}$$

folgt, so ist $H_1^s(x)$ f. ü. gleich einer Konstanten und $H_1(x)$ kann im wesentlichen nur s verschiedene Werte annehmen.

Satz 2. *Ist eine Menge $F\in\mathcal{E}$ mit*

(9) $$0 < m(F) < \tfrac{1}{2},$$

vorhanden, so gibt es eine solche Menge $E\in\mathcal{E}$, $m(E) > 0$, daß für $\varrho(x, y) \equiv 1$ die Funktion ϱ_2 im wesentlichen zwei verschiedene Werte annimmt.

Beweis. Es sei

(10) $$Q(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } x\in F, \\ 1 & \text{anderfalls.}\end{cases}$$

Die charakteristische Funktion $\chi(x)$ der Menge E ist durch die Gleichung

(11) $$q(x) = e^{\pi i\chi(x)} = Q(x)/Q(Tx)$$

bestimmt. Es ist $m(E) > 0$, denn aus $q(x) \equiv 1$ f. ü. würde $Q(Tx) = Q(x)$ f. ü. und, da T metrisch transitiv ist, $Q(x) = \text{Const.}$ f. ü. folgen. Das steht aber im Widerspruch mit (9) und (10).

Für $s = 2$ und $\varrho \equiv 1$ folgt aus (4)

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q(x)\cdot q(Tx)\ldots q(T^kx)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x)}{Q(Tx)}\cdot\frac{Q(Tx)}{Q(T^2x)}\cdots\frac{Q(T^kx)}{Q(T^{k+1}x)}$$
$$= Q(x)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1/Q(T^{k+1}x) = a\cdot Q(x),$$

wo nach (10)

$$a = \int 1/Q(x)\,dm = \int Q(x)\,dm = 1-2m(F).$$

Da wegen (11) $F_2 \equiv 1$, so gilt

$$\varrho_2(x) = \frac{F_1(x)+F_2(x)}{2} = \frac{[1-2m(F)]\cdot Q(x)+1}{m(E)}$$

und ϱ_2 nimmt wesentlich zwei verschiedene Werte $2[1-m(F)]/m(E)$ und $2m(F)/m(E)$ an.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 16. 3. 1959