[2] N. Bary, *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, Mathematische Annalen 103 (1930), p. 185-248.

[3] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, deuxième édition. New York 1948.

[4] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

[5] N. Lusin, *Sur la classification de M. Baire*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris (1917), p. 94.

[6] S. Marcus, *Sur les fonctions de Pompeiu* (en roumain), Studii şi Cercetări Matematice 5 (1954), p. 413-419.

[7] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 161-169.

[8] K. Padmavally, *On the roots of equation $f(x) = \xi$ where $f(x)$ is real and continuous in (a, b), but monotonic in no subinterval of (a, b)*, Proceedings of the American Mathematical Society 4 (1953), p. 839-841.

[9] J. Pereno, *Sulle funzioni derivabili in ogni punto ed infinitamente oscillanti in ogni intervallo*, Giornale di Matematiche di Battaglini 35 (1897), p. 137-149.

[10] D. Pompeiu, *Sur les fonctions dérivées*, Mathematische Annalen 63 (1907), p. 326.

[11] H. Rademacher, *Eineindeutige Abbildungen und Messbarkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik 27 (1916), p. 183-290.

[12] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

[13] S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1933.

[14] — *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937.

[15] E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur certains invariants de l'opération (A)*, Fundamenta Mathematicae 21 (1933), p. 229-235.

Reçu par la Rédaction le 31. 12. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR LES FAMILLES COMPACTES DE FONCTIONS MESURABLES

PAR

J. KISYŃSKI (LUBLIN)

Une famille R de fonctions mesurables, définies dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$, est dite *compacte au sens de la convergence en mesure* si toute suite formée d'éléments de famille R contient une suite partielle convergente en mesure dans l'intervallle $\langle\alpha, \beta\rangle$ vers une fonction qui peut d'ailleurs ne pas appartenir à R. Certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de fonctions définies sur un ensemble mesurable borné dans l'espace à n dimensions soit compacte dans ce sens ont été établies par Fréchet [2]. Ces conditions ont été généralisées par W. L. Šmulian [6], qui a traité le même problème au point de vue de la théorie abstraite de la mesure. En particulier, les conditions dues à Šmulian s'appliquent à certaines familles de fonctions mesurables, définies sur des ensembles non bornés.

Nous nous proposons d'établir dans cet ordre d'idées d'autres conditions nécessaires et suffisantes et de mettre en relief certaines analogies entre elles et les conditions pour qu'une famille de fonctions continues soit compacte au sens de la convergence uniforme (théorème d'Arzelà). Nous nous bornerons à une famille de fonctions d'une variable définies sur un intervalle fini. On ramène aisément à ce cas celui d'une famille de fonctions d'une variable définies sur un ensemble E quelconque mesurable et borné: il suffit de prolonger toutes les fonctions de cette famille à un intervalle fini $I \supset E$ en admettant qu'en dehors de l'ensemble E elles sont identiquement nulles. Les généralisations des théorèmes de ce travail aux fonctions de plusieurs variables ne présentent aucune difficulté.

Dans le chapitre I, nous allons envisager quelques conditions désignées par (a), (b), (c) et (d) et dont chacune est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$ soit mesurable. Ces conditions ressemblent à la condition bien connue qui figure dans la définition d'une fonction continue.

Dans le chapitre II, il sera question des familles compactes de fonctions mesurables. Les conditions correspondantes, désignées par (A), (B), (C) et (D), sont en simple rapport aux conditions (a)-(d), par exemple (A) signifie que la condition (a) est satisfaite également pour toutes les fonctions d'une famille R. Les conditions (A), (B) ou bien (C) joueront dans nos raisonnements un rôle analogue à celui de l'hypothèse que toutes les fonctions d'une famille sont également continues et bornées dans leur ensemble dans le théorème d'Arzelà. Quant aux conditions (D) et (F), elle n'expriment que le fait que les fonctions d'une famille sont également „presque continues". C'est pourquoi nous y ajouterons encore une condition supplémentaire (E), analogue à celle que les fonctions de la famille considérée soient bornées dans leur ensemble. Nous montrerons que les conditions (D) et (E) prises ensemble, ainsi que (F) et (E), sont équivalentes à chacune des conditions (A), (B) et (C) et qu'elles sont nécessaires et suffisantes pour que la famille R soit compacte.

I. La mesure linéaire de Lebesgue de l'ensemble linéaire E sera désignée par $m(E)$. La mesure plane intérieure de Lebesgue et la mesure plane de Lebesgue de l'ensemble plan E seront désignées respectivement par $m_i^{(2)}(E)$ et $m^{(2)}(E)$.

Considérons une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$. Chacune des conditions suivantes est équivalente à la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de cette fonction:

(a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $F \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ et une suite finie de nombres $\alpha = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = \beta$ tels que $m(F) > \beta - \alpha - \varepsilon$ et que

$$(1) \qquad \sup_{\langle a_{i-1}, a_i\rangle \cap F} f(x) - \inf_{\langle a_{i-1}, a_i\rangle \cap F} f(x) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ et un ensemble fermé $F \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ tels que $m(F) > \beta - \alpha - \varepsilon$ et $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ pour $x' \epsilon F$, $x'' \epsilon F$ et que $|x' - x''| < \delta$;

(c) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $F \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ tel que $m(F) > \beta - \alpha - \varepsilon$ et que la fonction $f(x)$ est continue sur l'ensemble F;

(d) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ pour lequel on a

$$(2) \qquad \frac{m_i^{(2)}\{(x, y); (x, y) \epsilon P_\delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}}{m^{(2)}(P_\delta)} > 1 - \varepsilon,$$

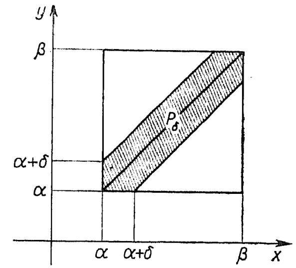
où

$$P_\delta = \{(x, y); \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \alpha \leqslant y \leqslant \beta, |x - y| < \delta\}.$$

La condition (c) s'exprime aussi sous la forme équivalente:

(c*) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $F \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ et une fonction $g(x)$ continue dans l'intervalle $\langle\alpha, \beta\rangle$ tels que $m(F) > \beta - \alpha - \varepsilon$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \epsilon F$;

tandis que la condition (d) peut être interprétée comme il suit: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que si l'on sait que $|x - y| < \delta$, la probabilité pour que l'on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dépasse $1 - \varepsilon$.



En vertu du théorème de Lusin, la condition (c) est équivalente à la mesurabilité de la fonction $f(x)$; il suffit donc pour démontrer qu'il en est de même des conditions (a) et (b), de vérifier les implications (a) → (b) → (c), les relations inverses (c) → (b) → (a) étant manifestes.

Nous allons montrer d'abord que (a) → (b). En effet, la condition (a) étant supposée satisfaite, prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors il existe un ensemble fermé $F^* \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ et une suite finie de nombres

$$\alpha = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = \beta$$

satisfaisant aux inégalités $m(F^*) > \beta - \alpha - \varepsilon/2$ et (1). Soient a_i et b_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$, des nombres assujettis aux conditions

$$a_{i-1} < a_i < b_i < a_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > \beta - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous constatons facilement que la condition (b) est satisfaite pour

$$F = F^* \cap \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle \quad \text{et} \quad \delta = \min_{i=2,3,\ldots,n} (a_i - b_{i-1}).$$

Ensuite, nous allons prouver que (b) → (c). En effet, si l'on admet (b), il existe, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, un ensemble fermé $F_n \subset \langle\alpha, \beta\rangle$ et un nombre $\delta_n > 0$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $m(F_n) > \beta - \alpha - 1/2^n$,

2° si $x' \epsilon F_n$, $x'' \epsilon F_n$ et $|x' - x''| < \delta_n$, on a $|f(x') - f(x'')| < 1/2^n$.

Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et un entier positif m assez grand pour que l'on ait $1/2^m < \varepsilon$. L'ensemble $F = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} F_n$ est fermé, $m(F) > \beta - \alpha - \varepsilon$, et si $n > m$, $x' \epsilon F$, $x'' \epsilon F$ et $|x' - x''| < \delta_n$, on a $|f(x') - f(x'')| < 1/2^n$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ est continue sur l'ensemble F et on a la condition (c).

Nous avons ainsi démontré que les conditions (a) et (b) sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(x)$ soit mesurable (L). Il nous reste à démontrer que la condition (d) est équivalente à la mesurabilité. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous allons nous appuyer sur le deuxième des théorèmes suivants:

(I) *Soit Z un ensemble linéaire. Si, pour presque tous les $x \epsilon Z$, on a*

$$\limsup_{h\to 0+}(2h)^{-1}\cdot m_i(Z\cap\langle x-h,\,x+h\rangle)>0,$$

où m_i désigne la mesure intérieure (L), l'ensemble Z est mesurable (L).

(II) *Étant donnée une fonction $f(x)$ définie sur un ensemble linéaire Z, si pour tout $\varepsilon>0$ l'inégalité*

$$\limsup_{h\to 0+}(2h)^{-1}\cdot m_i\{y;\,y\epsilon Z,\,|x-y|\leqslant h,\,f(y)>f(x)-\varepsilon\}>0 \tag{3}$$

est satisfaite pour presque tous les $x\epsilon Z$, l'ensemble Z et la fonction $f(x)$ sont mesurables.

Ce ne sont que de légères modifications de deux théorèmes énoncés par Kamke [4] pour la limite inférieure et dans lesquels l'inégalité (3) est supposée pour tous les $x\epsilon Z$. Le théorème I résulte du bien connu théorème de Lebesgue sur les points de densité, en partageant l'ensemble Z en un ensemble F_σ et un ensemble de mesure intérieure nulle. Pour établir le théorème II, nous allons prouver que, pour tout nombre A, l'ensemble

$$E(A)=\{x;\,x\epsilon Z,\,f(x)>A\}$$

est mesurable. Posons en effet pour tout $n=1,2,\ldots$

$$Z_n=\left\{x;\,x\epsilon Z,\,\lim_{h\to 0+}(2h)^{-1}\cdot m_i\left\{y;\,y\epsilon Z,\,|x-y|\leqslant h,\,f(y)>f(x)-\frac{1}{n}\right\}=0\right\}.$$

D'après (3), tous les ensembles Z_n, où $n=1,2,\ldots$, sont de mesure nulle. Considérons un point

$$x\epsilon E(A)-\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$$

quelconque. Il existe un entier positif n_0 tel que $f(x)-1/n_0\geqslant A$ et, puisque x n'appartient pas à Z_{n_0}, on a

$$\limsup_{h\to 0+}(2h)^{-1}\cdot m_i\left\{y;\,y\epsilon Z,\,|x-y|\leqslant h,\,f(y)>f(x)-\frac{1}{n_0}\right\}>0,$$

donc

$$\limsup_{h\to 0+}(2h)^{-1}\cdot m_i\big(E(A)\cap\langle x-h,\,x+h\rangle\big)>0$$

pour tous les $x\epsilon E(A)-\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$. Ainsi, la mesurabilité de l'ensemble $E(A)$ résulte du théorème I.

Nous allons maintenant démontrer que la condition (d) est suffisante. Supposons la condition (d) remplie et prenons un $\varepsilon>0$ quelconque. Alors, pour tout $n=1,2,\ldots$, il existe un $\delta_n^*\epsilon(0,\beta-\alpha\rangle$ et un ensemble plan fermé $F_n^*\subset P_{\delta_n^*}$ tels que

$$m^{(2)}(F_n^*)>\left(1-\frac{1}{n^2(\beta-\alpha)}\right)\cdot m^{(2)}(P_{\delta_n^*}),$$

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\quad\text{ pour }\quad(x,y)\epsilon F_n^*.$$

Admettons que

$$\delta_n=\frac{\delta_n^*}{n(\beta-\alpha)},\qquad F_n=F_n^*\cap\overline{P}_{\delta_n}.$$

Nous aurons $0<\delta_n\leqslant 1/n$, l'ensemble F_n sera fermé, $F_n\subset\overline{P}_{\delta_n}$,

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon\quad\text{ pour }\quad(x,y)\epsilon F_n,$$

et de plus

$$m^{(2)}(P_{\delta_n}-F_n)<m^{(2)}(P_{\delta_n^*}-F_n^*)<\frac{1}{n^2(\beta-\alpha)}\,m^{(2)}(P_{\delta_n^*})<\frac{1}{n}\,m^{(2)}(P_{\delta_n}),$$

d'où

$$m^{(2)}(F_n)>\left(1-\frac{1}{n}\right)m^{(2)}(P_{\delta_n})=\left(1-\frac{1}{n}\right)2\delta_n\left(\beta-\alpha-\frac{\delta_n}{2}\right). \tag{4}$$

Soit

$$\varphi_n(x)=(2\delta_n)^{-1}\cdot m^{(1)}\{y;\,(x,y)\epsilon F_n\}$$

pour $x\epsilon\langle\alpha,\beta\rangle$ et $n=1,2,\ldots$ On a alors

$$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant 1$$

et d'après (4)

$$\int_\alpha^\beta\varphi_n(x)\,dx=(2\delta_n)^{-1}\cdot m^{(2)}(F_n)>\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\beta-\alpha-\frac{1}{2n}\right),$$

d'où

$$0\leqslant\sup_{k=1,2,\ldots}\varphi_{n+k}(x)\leqslant 1$$

et

$$\int_\alpha^\beta\Big(\sup_{k=1,2,\ldots}\varphi_{n+k}(x)\Big)dx=\beta-\alpha\quad\text{ pour }\quad n=1,2,\ldots$$

En vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites de fonctions bornées dans leur ensemble, il s'ensuit que

$$\int_{\alpha}^{\beta}\bigl(\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(x)\bigr)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\lim_{n\to\infty}\bigl(\sup_{k=1,2,\ldots}\varphi_{n+k}(x)\bigr)\,dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\bigl(\sup_{k=1,2,\ldots}\varphi_{n+k}(x)\bigr)\,dx=\beta-\alpha,$$

d'où, en tenant compte de l'inégalité $0\leqslant\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(x)\leqslant 1$, valable pour tout $x\in\langle\alpha,\beta\rangle$, il vient

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi_n(x)=1 \text{ pour presque tous les } x\in\langle\alpha,\beta\rangle.$$

Mais $(2\delta_n)^{-1}\cdot m_i\{y;\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta,\ |x-y|\leqslant\delta_n,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\}\geqslant\varphi_n(x)$ pour $x\in\langle\alpha,\beta\rangle$, donc

$$\limsup_{n\to\infty}(2\delta_n)^{-1}\cdot m_i\{y;\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta,\ |x-y|\leqslant\delta_n,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\}=1$$

presque partout dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$. La mesurabilité de la fonction $f(x)$ en résulte immédiatement en vertu du théorème II.

Nous allons maintenant prouver que la condition (d) est nécessaire. Dans ce but, admettons que la fonction $f(x)$ est mesurable dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$ et prenons un $\varepsilon>0$ arbitraire. D'après la condition (b), il existe un $\delta_1>0$ et un ensemble fermé $F_1\subset\langle\alpha,\beta\rangle$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$m^{(1)}(F_1)>\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)(\beta-\alpha),$$

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad x'\in F,\ x''\in F \text{ et } |x'-x''|<\delta_1.$$

Admettons que

$$\delta=\min\bigl(\delta_1,(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon\bigr),\qquad F=P_\delta\cap(F_1\times F_1),$$

$$\mu(x)=\begin{cases} m^{(1)}(F_1\cap\langle\alpha,x\rangle) & \text{pour} \quad x\geqslant\alpha,\\ 0 & \text{pour} \quad x<\alpha.\end{cases}$$

La fonction $\mu(x)$ est non-décroissante et satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante de Lipschitz égale à 1, donc

$$\int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta}\mu(x)\,dx\geqslant 2\delta\mu(\beta)-\frac{\delta^2}{2}=2\delta m^{(1)}(F_1)-\frac{\delta^2}{2}>(2-\varepsilon)\,\delta(\beta-\alpha),$$

$$\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\mu(x)\,dx\leqslant\frac{\delta^2}{2}\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon\delta(\beta-\alpha).$$

Il s'ensuit que

$$m^{(2)}(F)=\int_{F_1}\bigl(\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)\bigr)\,dx$$
$$\geqslant\int_{\alpha}^{\beta}\bigl(\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)\bigr)\,dx-2\delta m^{(1)}(\langle\alpha,\beta\rangle-F_1)$$
$$\geqslant\int_{\alpha}^{\beta}\bigl(\mu(x+\delta)-\mu(x-\delta)\bigr)\,dx-\tfrac{1}{2}\varepsilon\delta(\beta-\alpha)$$
$$=\int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta}\mu(x)\,dx-\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\mu(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\cdot\varepsilon\delta(\beta-\alpha)$$
$$>(1-\varepsilon)2\delta(\beta-\alpha)>(1-\varepsilon)\cdot m^{(2)}(P_\delta);$$

la condition (d) est donc remplie, puisqu'on a évidemment $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ pour tous les $(x,y)\in F$.

II. Fréchet [2] a donné certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de fonctions soit compacte au sens de la convergence en mesure. Ces conditions peuvent être formulées comme il suit en se bornant aux fonctions d'une seule variable parcourant un intervalle borné et fermé:

Pour qu'une famille R de fonctions définies sur un intervalle fixe $\langle\alpha,\beta\rangle$ et mesurables (L) soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite:

(A) *pour tout $\varepsilon>0$, il existe une suite finie de nombres*

$$\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n=\beta$$

et un nombre positif M pour lesquels il existe, quelle que soit la fonction $f\in R$, un ensemble fermé $F_f\subset\langle\alpha,\beta\rangle$ tel que

$$m(F_f)>\beta-\alpha-\varepsilon,\qquad \sup_{x\in F_f}|f(x)|<M$$

et

$$\sup_{\langle\alpha_{i-1},\alpha_i\rangle\cap F_f}f(x)-\inf_{\langle\alpha_{i-1},\alpha_i\rangle\cap F_f}f(x)<\varepsilon \quad \textit{pour} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

En déduisant de la condition générale, nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble contenu dans un espace métrique complet soit compact, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de fonctions soit compacte au sens de la convergence en mesure, Hanson [3] a modifié un peu le théorème de Fréchet. Dans le cas des fonctions d'une seule variable, définies dans un intervalle fini et fermé, le théorème de Hanson peut s'énoncer comme il suit:

Pour que la famille R de fonctions mesurables, définies sur un intervalle fixe $\langle \alpha, \beta \rangle$, soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut, et il suffit que cette famille de fonctions satisfasse à la condition suivante:

(B) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, et un $M > 0$ tels qu'il existe, pour toute fonction $f \epsilon R$, un ensemble fermé $F_f \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ jouissant des propriétés suivantes:*

$$m(F_f) > \beta - \alpha - \varepsilon, \quad \sup_{x \epsilon F_f} |f(x)| < M,$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad x' \epsilon F_f,\ x'' \epsilon F_f \textit{ et } |x' - x''| < \delta.$$

Ajoutons y encore trois autres propositions du même genre.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une famille R de fonctions définies sur un intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ et mesurables (L) soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit que cette famille R satisfasse à la condition suivante:*

(C) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille C_ε de fonctions bornées dans leur ensemble, équicontinues sur $\langle \alpha, \beta \rangle$ et telles qu'à chaque fonction $f \epsilon R$ on puisse faire correspondre une fonction $g_f \epsilon C_\varepsilon$ pour laquelle*

$$m\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta, f(x) \neq g_f(x)\} < \varepsilon.$$

Dans la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 1. *Soit X un espace métrique, la distance de deux points x' et x'' étant désignée par $d(x', x'')$, et soit F une famille de fonctions définies sur un ensemble $Z_f \subset X$ et prenant des valeurs réelles $f(x)$. Si*

$$\sup_{f \epsilon F, x \epsilon Z_f} |f(x)| \leqslant M < +\infty$$

et

$$\prod_{\varepsilon > 0} \sum_{\delta > 0} \prod_{f \epsilon F} \prod_{x', x'' \epsilon Z_f} [d(x', x'') < \delta \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon],$$

il existe une famille F^* de fonctions $f^*(x)$ bornées dans leur ensemble et équicontinues dans l'espace X tout entier, telle que

$$\prod_{f \epsilon F} \sum_{f^* \epsilon F^*} [x \epsilon Z_f \rightarrow f(x) = f^*(x)].$$

En effet, les hypothèses du lemme étant supposées vraies, il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une fonction $\omega(\delta)$ continue, non décroissante et bornée (donc uniformément continue) pour $\delta \epsilon \langle 0, +\infty)$, et telle que

$$\omega(0) = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{f \epsilon F} \prod_{x', x'' \epsilon Z_f} \big[|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega\big(d(x', x'')\big)\big].$$

La fonction

$$\Omega(\delta) = \sup_{\substack{\delta_1, \delta_2 \geqslant 0 \\ |\delta_1 - \delta_2| \leqslant \delta}} |\omega(\delta_1) - \omega(\delta_2)|$$

jouit des mêmes propriétés. En suivant Banach [1], nous définirons dans l'espace X tout entier, pour toute fonction, une nouvelle fonction

$$f^*(x) = \sup_{y \epsilon Z_f} \Big(f(y) - \omega\big(d(x, y)\big)\Big).$$

Nous aurons $f(x) = f^*(x)$ pour $x \epsilon Z_f$, puisque $f(x) \geqslant f(y) - \omega\big(d(x, y)\big)$ si $x \epsilon Z_f$ et $y \epsilon Z_f$. De plus, pour tout $x \epsilon X$,

$$|f^*(x)| \leqslant M + \sup_{\delta \geqslant 0} \omega(\delta) < +\infty;$$

les fonctions $f^*(x)$ sont donc bornées dans leur ensemble dans l'espace X tout entier. Prenons l'une quelconque des fonctions $f^*(x)$ et deux points arbitraires x' et x'' de l'espace X. Si l'on suppose que $f^*(x') \geqslant f^*(x'')$ par exemple, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $y \epsilon Z_f$ tel que

$$f^*(x') < f(y) - \omega\big(d(x', y)\big) + \varepsilon$$

et puisque, en même temps,

$$f^*(x'') \geqslant f(y) - \omega\big(d(x'', y)\big),$$

on a

$$\begin{aligned} f^*(x') - f^*(x'') &< \omega\big(d(x'', y)\big) - \omega\big(d(x', y)\big) + \varepsilon \\ &\leqslant \Omega\big(|d(x', y) - d(x'', y)|\big) + \varepsilon \\ &\leqslant \Omega\big(d(x', x'')\big) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, il vient

$$|f^*(x') - f^*(x'')| \leqslant \Omega\big(d(x', x'')\big),$$

mais cela prouve que les fonctions $f^*(x)$ sont équicontinues dans l'espace X tout entier et le lemme est démontré ([1]).

La convergence en mesure peut être métrisée en définissant la distance $d(f, g)$ de deux fonctions f et g comme borne inférieure des nombres ε tels que

$$m\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta, |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon \text{ (}^2\text{)}.$$

En profitant de cette métrisation en s'appuyant sur la condition, due à Hausdorff, de compacité dans les espaces métriques et sur le théorème d'Arzelá, on obtient deux lemmes suivants:

([1]) Ce lemme permet d'étendre, sans difficulté, la démonstration du théorème 1 aux fonctions de plusieurs variables.

([2]) Cette définition a été utilisée par Hanson [3].

LEMME 2. *Pour qu'une famille R de fonctions mesurables définies dans un intervalle $\langle a, \beta\rangle$ soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un système de fonctions*

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x),$$

continues dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ et telles que l'on ait

$$\sup_{f\epsilon R}\Big(\inf_{i=1,2,\ldots,n} d(f, g_i)\Big) < \varepsilon.$$

LEMME 3. *Pour qu'une famille R de fonctions mesurables dans un intervalle $\langle a, \beta\rangle$ soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une famille C de fonctions équicontinues et bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$, qui satisfont à l'inégalité*

$$\sup_{f\epsilon R}\big(\inf_{g\epsilon C} d(f, g)\big) < \varepsilon.$$

Ceci posé, nous pouvons passer à la démonstration du théorème 1. Remarquons d'abord que la condition (C) est suffisante en vertu du lemme 3. Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons qu'une famille R soit compacte au sens de la convergence en mesure. Or il existe d'après le lemme 2 un système de fonctions

$$g_{n,1}(x), g_{n,2}(x), \ldots, g_{n,k(n)}(x), \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

continues dans l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$ et satisfaisant aux inégalités

$$\sup_{f\epsilon R}\Big(\inf_{i=1,2,\ldots,k(n)} d(f, g_{n,i})\Big) < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il résulte des dernières inégalités qu'il existe, pour tout $f\epsilon R$ et $n = 1, 2, \ldots$, un entier positif $i(n, f)$ et un ensemble fermé $F_{n,f} \subset \langle a, \beta\rangle$ tels que

$$1 \leqslant i(n, f) \leqslant k(n), \qquad m(F_{n,f}) > \beta - a - \frac{1}{2^n},$$

$$|f(x) - g_{n,i(n,f)}(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{pour} \quad x \epsilon F_{n,f}.$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et un entier positif m assez grand pour que l'on ait $1/2^m < \varepsilon$ et posons

$$F = \bigcap_{n=m+1} F_{n,f} \quad \text{pour tout} \quad f\epsilon R.$$

Alors, pour toute fonction $f\epsilon R$, on a

$$m(F_f) > \beta - a - \varepsilon,$$

$$\sup_{x\epsilon F_f} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \max_{i=1,2,\ldots,k(m+1)} \max_{a\leqslant x\leqslant\beta} |g_{m+1,i}(x)|$$

et

$$\sup_{\substack{x',x''\epsilon F_f\\ |x'-x''|\leqslant\delta}} |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}} + \max_{i=1,2,\ldots,k(p)} \max_{\substack{x',x''\epsilon\langle a,\beta\rangle\\ |x'-x''|<\delta}} |g_{p,i}(x') - g_{p,i}(x'')|$$

pour tout $\delta \geqslant 0$ et $p = m+1, m+2, \ldots$ La condition (C) en résulte en vertu du lemme 1. La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée. Il est à remarquer qu'en s'appuyant sur le lemme 1, on peut déduire le théorème 1 du théorème cité de Hanson.

Voici encore deux autres caractérisations des familles compactes de fonctions mesurables:

THÉORÈME 2. *Pour qu'une famille R de fonctions mesurables définies dans un intervalle $\langle a, \beta\rangle$ soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\text{(D)} \qquad \lim_{\delta\to 0+}\left(\inf_{f\epsilon R} \frac{m^{(2)}\{(x, y); (x, y)\epsilon P_\delta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}}{m^{(2)}(P_\delta)}\right) = 1,$$

où

$$P_\delta = \{x, y); a \leqslant x \leqslant \beta, a \leqslant y \leqslant \beta, |x - y| < \delta\},$$

et

$$\text{(E)} \qquad \lim_{n\to+\infty}\big(\sup_{f\epsilon R} m\{x; a \leqslant x \leqslant \beta, |f(x)| > n\}\big) = 0.$$

THÉORÈME 3. *Pour qu'une famille R de fonctions mesurables définies dans un intervalle $\langle a, \beta\rangle$ soit compacte au sens de la convergence en mesure, il faut et il suffit que cette famille satisfasse aux conditions* (E) *et*

$$\text{(F)} \qquad \lim_{\delta\to 0}\big(\inf_{f\epsilon R} m\{x; a \leqslant x \leqslant \beta, a \leqslant x+\delta \leqslant \beta, |f(x) - f(x+\delta)| < \varepsilon\}\big) = \\ = \beta - a \quad \textit{pour tout} \quad \varepsilon > 0.$$

Remarque. C. Ryll-Nardzewski a remarqué que la condition (F) peut être mise sous la forme équivalente

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{f\epsilon R} d\big(f(x), f(x+\delta)\big) = 0.$$

Les fonctions $f(x)$ doivent alors être prolongées en admettant qu'elles sont nulles en dehors de l'intervalle $\langle a, \beta\rangle$. Les conditons (E) et (F) rappellent celles de compacité dans les espaces L_p, établies par M. Riesz [5].

Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, remarquons d'abord que

(i) *la condition* (E) *est nécessaire pour que la famille* R *soit compacte.*

ce qui résulte du théorème 1. On peut aussi le démontrer par la réduction à l'absurde, en s'appuyant sur le fait que si une suite de fonctions $\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, est convergente en mesure dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{k=1,2,\ldots} m\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ |f_k(x)| > n\}\Big) = 0.$$

(ii) *La condition* (F) *est nécessaire pour que la famille* R *soit compacte.*

En effet, supposons que la famille R soit compacte et prenons un $\varepsilon > 0$. En vertu du lemme 2, il existe, pour $n = 1, 2, \ldots$, un système de fonctions

$$g_{n,1}(x),\ g_{n,2}(x),\ \ldots,\ g_{n,k(n)}(x)$$

continues dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ et tel que, pour tout $f \in R$, il existe un indice $i(n,f)$ pour lequel on a

$$1 \leqslant i(n,f) \leqslant k(n)$$

et

$$m\left\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ |f(x) - g_{n,i(n,f)}(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Il s'ensuit que

$$m\left\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant x+\delta \leqslant \beta,\ |f(x+\delta) - g_{n,i(n,f)}(x+\delta)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout δ; par conséquent

$$(5)\qquad m\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant x+\delta \leqslant \beta,\ |f(x)-f(x+\delta)| \geqslant \varepsilon\}$$
$$\leqslant \frac{1}{n} + m\left\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant x+\delta \leqslant \beta,\ |g_{n,i(n,f)}(x) - g_{n,i(n,f)}(x+\delta)| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

pour tout δ et $n = 1, 2, \ldots$

D'autre part, les fonctions $g_{n,i}$ étant continues, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un $\delta_n > 0$ tel que

$$\max_{i=1,2,\ldots,k(n)} \ \max_{\substack{x', x'' \in \langle \alpha, \beta\rangle \\ |x'-x''| \leqslant \delta_n}} |g_{n,i}(x') - g_{n,i}(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où en vertu de (6)

$$\sup_{|\delta| \leqslant \delta_n} \Big(\sup_{f\in R} m\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant x+\delta \leqslant \beta,\ |f(x)-f(x+\delta)| > \varepsilon\}\Big) \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui entraîne la condition (F).

(iii) *L'implication* (F) $\to$ (D) *résulte immédiatement des formules*

$$m^{(2)}(P_\delta) = 2\delta(\beta-\alpha) - \delta^2$$

et

$$m^{(2)}\{(x,y);\ (x,y) \in P_\delta,\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon\}$$
$$= \int_{-\delta}^{+\delta} m^{(1)}\{x;\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant x+t \leqslant \beta,\ |f(x)-f(x+t)| < \varepsilon\}\, dt.$$

Nous allons maintenant démontrer que

(iv) *Si les conditions* (D) *et* (E) *sont remplies, la famille* R *est compacte.*

En effet, supposons vérifiées ces conditions et prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après (E), il existe un $n > 0$ tel que

$$(6)\qquad \sup_{f\in R} d(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

où

$$f_n(x) = \begin{cases} -n, & \text{si} \quad f(x) < -n, \\ f(x), & \text{si} \quad |f(x)| \leqslant n, \\ n, & \text{si} \quad f(x) > n. \end{cases}$$

Puisque $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f(x)-f(y)|$, il existe d'après (D) un δ tel que

$$(7)\qquad 0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon^2}{6n},$$

$$(8)\qquad \sup_{f\in R} \frac{1}{2\delta} m^{(2)}(Q_f) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{24n},$$

où

$$Q_f = \left\{(x,y);\ (x,y) \in P_\delta,\ |f_n(x) - f_n(y)| \geqslant \frac{\varepsilon^2}{12(\beta-\alpha)}\right\}.$$

Prolongeons toutes les fonctions $f_n(x)$ sur l'intervalle $\langle \alpha-\delta, \beta+\delta\rangle$ tout entier, en admettant qu'elles s'annulent au-delà de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Posons pour tout $f \in R$

$$f^*(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} f_n(x+t)\, dt \qquad \text{pour} \qquad x \in \langle \alpha, \beta\rangle.$$

Alors, pour tout $f \in R$,

$$[d(f^*, f_n)]^2 \leqslant \int_\alpha^\beta |f^*(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2\delta} \int_\alpha^\beta \Big(\int_{-\delta}^{\delta} |f_n(x) - f_n(x+t)|\, dt \Big)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\delta} \iint_{P_\delta} |f_n(x) - f_n(y)|\, dx\, dy + \frac{1}{2\delta} \int_\alpha^{\alpha+\delta} \Big(\int_{x-\delta}^{\alpha} |f_n(x)|\, dy \Big)\, dx$$

$$+ \frac{1}{2\delta} \int_{\beta-\delta}^{\beta} \Big(\int_\beta^{x+\delta} |f_n(x)|\, dy \Big)\, dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta} \iint_{P_\delta} |f_n(x) - f_n(y)|\, dx\, dy + \frac{n\delta}{2}$$

et par conséquent, en vertu de (7) et (8),

$$[d(f^*, f_n)]^2 \leqslant \frac{1}{2\delta} 2n \cdot m^{(2)}(Q_f) + \frac{1}{2\delta} \frac{\varepsilon^2}{12(\beta - \alpha)} m^{(2)}(P_\delta) + \frac{n\delta}{2}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon^2}{12} = \frac{\varepsilon^2}{4},$$

donc $\sup\limits_{f \in R} d(f^*, f_n) \leqslant \varepsilon/2$ et d'après (6)

$$\sup_{f \in R} d(f^*, f) < \varepsilon.$$

Les fonctions $|f_n(x)|$ étant, pour $f \in R$, bornées dans leur ensemble par le nombre n dans l'intervalle $\langle \alpha - \delta, \beta + \delta \rangle$, les fonctions $|f^*(x)|$ le sont dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ et les fonctions $f^*(x)$ y remplissent également la condition de Lipschitz avec la constante n/δ. Donc, pour achever la démonstration de la proposition (iv), il suffit de faire appel au lemme 3.

Les propositions (i), (ii), (iii) et (iv) prises ensemble comprennent déjà les théorèmes 2 et 3. Remarquons aussi que (ii) et (iii) donnent une autre preuve de ce que la condition (d) du chapitre I (p. 222) est nécessaire pour la mesurabilité (L).

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1951.

[2] M. Fréchet, *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), p. 25-32.

[3] E. H. Hanson, *A note on compactness*, Bulletin of the American Mathematical Society 39 (1933), p. 397-400.

[4] E. Kamke, *Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen*, Fundamenta Mathematicae 10 (1927), p. 431-433.

[5] M. Riesz, *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*, Acta Litterarum ac Scientiarum, Szeged 6 (1933), p. 136-142.

[6] В. Л. Шмульян, *О компактных множествах в пространстве измеримых функций*, Математический Сборник 15 (1944), p. 343-346.

Reçu par la Rédaction le 15. 11. 1958