COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR UNE PROPRIÉTÉ DESCRIPTIVE ANALOGUE À LA PROPRIÉTÉ N DE LUSIN

PAR

S. MARCUS (BUCAREST)

Cette communication* concerne les fonctions continues réelles d'une variable réelle qui transforment chaque ensemble ayant la propriété de Baire (au sens large) en un ensemble l'ayant également. Rappelons qu'un ensemble a la propriété de Baire (au sens large) s'il est de la forme $(G-P) \cup R$, où G est ouvert, tandis que P, R sont de première catégorie.

1. D'après le théorème de Rademacher ([11], p. 196 et 200; [3], p. 354 et 355), pour qu'une fonction f continue réelle d'une variable réelle transforme tous les ensembles mesurables en ensembles mesurables, il faut et il suffit que l'image $f(E)$ d'un ensemble E de mesure nulle soit toujours de mesure nulle.

On sait que la propriété descriptive analogue à la mesurabilité au sens de Lebesgue est la propriété de Baire (au sens large). Nous n'avons rencontré dans la littérature aucun théorème descriptif analogue à celui de Rademacher, à savoir aucune condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue réelle d'une variable réelle transforme tout ensemble ayant la propriété de Baire au sens large en un ensemble l'ayant également.

Le théorème 1 qui suit établit une telle condition. La démonstration en est simple, mais elle fait intervenir les ensembles analytiques (au sens de Souslin et Lusin) et leur rôle semble essentiel.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une fonction f borelienne réelle d'une variable réelle transforme tout ensemble B ayant la propriété de Baire au sens large en ensemble $f(B)$ ayant la même propriété, il faut et il suffit que, pour tout ensemble D de première catégorie, l'ensemble $f(D)$ le soit aussi.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Tous les sous-ensembles d'un ensemble de première catégorie D ont la propriété de Baire au

* Je tiens à remercier M. E. Marczewski dont les conseils m'ont permis d'en améliorer la rédaction.

sens large; donc, tous les sous-ensembles de $f(D)$ l'ont également, conformément à l'hypothèse. Par conséquent, l'ensemble $f(D)$ est de première catégorie (cf. par exemple [15], p. 230).

La condition est suffisante. D'après un théorème de [4], p. 56, B est la réunion d'un ensemble borelien E étant un G_δ et d'un ensemble P de première catégorie. L'ensemble $f(P)$ est donc de première catégorie par hypothèse. La fonction f étant borelienne, l'ensemble $f(E)$ est analytique (cf. [4], p. 365) et jouit par conséquent de la propriété de Baire au sens large (cf. [5] et [4], p. 391). L'ensemble $f(B) = f(E) \cup f(P)$ a donc aussi cette propriété.

Remarque 1. L'hypothèse que la fonction f est borelienne a été utilisée seulement pour montrer que la condition est suffisante.

Remarque 2. Evidemment, le théorème 1 subsiste en prenant, au lieu d'une fonction réelle d'une variable réelle, une fonction définie dans un espace S métrique complet séparable et ayant les valeurs dans S.

Remarque 3. Un exemple de fonction continue réelle d'une variable réelle et ne satisfaisant pas aux conditions du théorème 1 est la fonction scalariforme de Cantor qui transforme l'ensemble parfait non-dense en segment tout entier.

2. On dit selon Lusin qu'une fonction jouit de la propriété N lorsqu'elle transforme tout ensemble de mesure nulle en un ensemble de mesure nulle. Par analogie, nous dirons qu'*une fonction jouit de la propriété* N *descriptive* lorsqu'elle transforme tout ensemble de première catégorie en un ensemble de première catégorie.

On dit selon Banach qu'une fonction jouit de la propriété T_2 lorsque les valeurs prises par cette fonction une infinité indénombrable de fois forment un ensemble de mesure nulle. Nous dirons, par analogie, qu'*une fonction jouit de la propriété* T_2 *descriptive* lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle prend une infinité indénombrable de fois est de première catégorie.

D'après un théorème classique, dû à Banach, la propriété N entraîne la propriété T_2 pour toute fonction continue. Nous avons rencontré dans la littérature trois démonstrations de ce théorème ([1], [14], p. 284, et [2], p. 195-197), mais c'est seulement celle de [2] qui paraît se prêter à être imitée dans la démonstration d'un théorème descriptif, analogue à celui de Banach.

LEMME [1]. *Étant donnée une fonction f réelle continue, définie sur $[0, 1]$, et E étant l'ensemble des valeurs que f prend une infinité indénombrable de fois, il existe une famille indénombrable $\{E_t\}$ d'ensembles disjoints $E_t \subset [0, 1]$ tels que $f(E_t) = E$ et dont chacun résulte par réunions et intersections finies ou dénombrables à partir des ensembles analytiques et complémentaires analytiques.*

Démonstration. Nous allons considérer des intervalles ouverts $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ situés sur $[0, 1]$, chaque indice n_i étant égal à 0 ou à 1; on aura donc $\delta_0 = (0, \frac{1}{2})$, $\delta_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\delta_{00} = (0, \frac{1}{4})$, $\delta_{01} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\delta_{10} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $\delta_{11} = (\frac{3}{4}, 1)$ et ainsi de suite. Soit $H_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles l'équation $y = f(x)$ a une infinité indénombrable de solutions x telles que $x \in \delta_{n_1 \ldots n_k}$. D'après un théorème de [7], tous les ensembles $H_{n_1 \ldots n_k}$ sont des ensembles A (ensembles analytiques). Posons

$$Q_{n_1 n_2 \ldots n_k} = H_{n_1 n_2 \ldots n_k 0} \cap H_{n_1 n_2 \ldots n_k 1}.$$

En désignant par $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ un ensemble qui est égal soit à $Q_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ soit à son complémentaire $CQ_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, posons

$$M(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_j) = E_{n_1} \cap E_{n_1 n_2} \cap \ldots \cap E_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

où les nombres $p_1, \ldots, p_j$ $(j \leqslant k)$ sont des entiers positifs croissants qui indiquent les nombres d'indices pour les ensembles $E_{n_1 \ldots n_p}$ coïncidant avec les ensembles $Q_{n_1 \ldots n_p}$ correspondants (par exemple, si $p_1 = 1$, $p_2 = 4$ et $p_3 = 5$, on a $E_{n_1} = Q_{n_1}$, $E_{n_1 n_2} = CQ_{n_1 n_2}$, $E_{n_1 n_2 n_3} = CQ_{n_1 n_2 n_3}$, $E_{n_1 n_2 n_3 n_4} = Q_{n_1 n_2 n_3 n_4}$ et $E_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} = Q_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5}$ respectivement).

Les suites $n_1, \ldots, n_k$ et $p_1, \ldots, p_j$ étant fixées, considérons l'indice $i_s = n_{p_s+1}$. Par conséquent, $E_{n_1 \ldots n_{p_s}} = Q_{n_1 \ldots n_{p_s}}$ entraîne $i_s = 0$ ou $i_s = 1$ suivant que l'on considère dans l'intervalle $\delta_{n_1 \ldots n_{p_s}}$ l'intervalle $\delta_{n_1 \ldots n_{p_s} 0}$ ou $\delta_{n_1 \ldots n_{p_s} 1}$.

Posons encore ($\times$ désignant la multiplication cartésienne)

$$U(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_j) = \delta_{n_1 \ldots n_k 0} \times M(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_j),$$

$$V(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_j) = \delta_{n_1 \ldots n_k 1} \times M(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_j),$$

$$G_{i_1 \ldots i_{j-1} 0} = \bigcup U(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_{j-1}),$$

$$G_{i_1 \ldots i_{j-1} 0} = \bigcup V(n_1, \ldots, n_k; p_1, \ldots, p_{j-1}),$$

la réunion s'étendant à toutes les suites $n_1, \ldots, n_k$ (où $k = j, j+1, \ldots$) et $p_1, \ldots, p_{j-1}$ telles que $i_s = n_{p_s+1}$.

Faisons correspondre à chaque valeur de $t = 0, i_1 i_2 \ldots$ (où $i_j = 0$ ou 1) l'ensemble $G_{i_1} \cap G_{i_1 i_2} \cap \ldots \cap G_{i_1 i_2 i_3} \cap \ldots$

Chacun des ensembles $Q_{n_1 \ldots n_k}$ étant un ensemble A, chacun des ensembles G résulte des ensembles A et CA par une suite d'opérations de réunion et d'intersection finies ou dénombrables.

[1] Ce lemme et sa démonstration m'ont été communiqués, dans une lettre, par M[me] Nina Bary. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma reconnaissance.

Soit $K_{i_1\ldots i_j}$ la projection de $G_{i_1\ldots i_j}$ sur l'axe Ox. Cette projection est une homéomorphie entre une courbe continue et l'axe Ox; chaque $K_{i_1\ldots i_j}$ est donc topologiquement de même nature que $G_{i_1\ldots i_j}$. Si l'on fait correspondre à t l'ensemble

$$E_t = K_{i_1} \cap K_{i_1 i_2} \cap \ldots,$$

on conçoit que l'ensemble E_t est obtenu encore à partir des ensembles A et CA par des réunions et intersections finies ou dénombrables.

La démonstration du lemme s'achève en remarquant que, pour deux valeurs irrationnelles de t, les ensembles E_t correspondants sont disjoints et que l'égalité $f(E_t) = E$ résulte de la définition même des ensembles E_t.

THÉORÈME 2. *Toute fonction continue réelle f définie sur* $[0, 1]$ *et y jouissant de la propriété* N *descriptive y jouit aussi de la propriété* T_2 *descriptive.*

Démonstration. Désignons, comme dans le lemme, par E l'ensemble des valeurs que f prend une infinité indénombrable de fois. Il faut montrer que E est de première catégorie.

Tout ensemble A ou CA ayant la propriété de Baire et cette propriété subsistant par réunions et intersections dénombrables ([4], p. 55), tout E_t du lemme jouit de la propriété de Baire. Or toute classe d'ensembles de deuxième catégorie, disjoints et ayant la propriété de Baire est au plus dénombrable (voir par exemple [15], p. 233 et 234). Par conséquent, il existe dans la famille $\{E_t\}$ un ensemble E_{t_0} de première catégorie. En vertu de la propriété N descriptive, il s'ensuit alors que l'ensemble $E = f(E_{t_0})$ est aussi de première catégorie.

THÉORÈME 3. *Si une fonction continue réelle f définie sur* $[0, 1]$ *y jouit de la propriété* N *descriptive, tout intervalle contenu dans* $[0, 1]$ *contient un sous-intervalle dans lequel la fonction f est monotone.*

Démonstration. D'après le théorème 2, la fonction f jouit sur $[0, 1]$ de la propriété T_2 descriptive, et d'après un théorème de [8], l'ensemble des valeurs qu'une fonction continue qui n'est monotone sur aucun intervalle prend une infinité indénombrable de fois est de deuxième catégorie.

Remarque 4. La réciproque du théorème 3 n'est pas vraie, comme le montre l'exemple envisagé dans la remarque 3. Or cet exemple est dépourvu non seulement de la propriété N descriptive, mais aussi de la propriété N de Lusin. Nous allons prouver qu'aucune de ces deux propriétés n'est une conséquence de l'autre, même pour les fonctions f continues.

THÉORÈME 4. *Il existe une fonction φ continue et jouissant de la propriété* N *de Lusin sur* $[0, 1]$, *mais qui y est dépourvue de propriété* N *descriptive. De même, il existe une fonction ψ continue et jouissant de la propriété* N *descriptive sur* $[0, 1]$, *mais qui y est dépourvue de la propriété* N *de Lusin.*

Démonstration. Considérons une fonction continue réelle φ, définie sur $[0, 1]$, ayant la dérivée bornée sur $[0, 1]$ et qui n'est monotone sur aucun sous-intervalle de $[0, 1]$ (pour une telle fonction, voir par exemple [9]). En vertu du théorème 3, la fonction φ est dépourvue de la propriété N descriptive sur chaque sous-intervalle de $[0, 1]$. Or ayant une dérivée bornée sur $[0, 1]$, φ est lipschitzienne, donc absolument continue sur $[0, 1]$, et d'après un résultat classique, une fonction absolument continue jouit de la propriété N de Lusin (voir par exemple [14], p. 225).

Considérons maintenant une fonction continue réelle ψ, définie sur $[0, 1]$, strictement croissante sur ce segment et dont la dérivée s'y annule presque partout (pour une telle fonction, voir par exemple [12], p. 48 et 49).

La fonction ψ n'est pas absolument continue sur $[0, 1]$, car d'après un résultat classique, une fonction absolument continue et dont la dérivée s'annule presque partout se réduit à une constante ([14], p. 225); la monotonie stricte de ψ serait alors contredite. Or d'après un théorème de Banach (voir [14], p. 227), une fonction continue et monotone jouit de la propriété N de Lusin si et seulement si elle est absolument continue. Il s'ensuit alors que la fonction ψ est dépourvue de la propriété N de Lusin sur chaque sous-intervalle de $[0, 1]$. Cependant ψ est une homéomorphie entre deux segments; elle satisfait donc évidemment la condition N descriptive.

Remarque 5. En tenant compte du théorème de Rademacher, précité p. 213, on constate que l'existence d'une autre fonction ψ, affirmée dans le théorème 4, est une conséquence de l'existence d'une homéomorphie non mesurable.

3. Nous avons envisagé les cas d'analogies entre la propriété N descriptive et la propriété N de Lusin; envisageons à présent certains cas importants concernant la propriété N de Lusin dans lesquels la propriété descriptive analogue est en défaut.

Rappelons d'abord le théorème suivant:

(α) Une fonction continue, jouissant de la propriété N de Lusin et dont la dérivée est nulle partout où elle existe, se réduit à une constante ([2], p. 200).

Il est aisé de voir que le théorème descriptif analogue à (α) est en défaut. En effet, reprenons la fonction ψ utilisée dans la démonstration du théorème 4. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$, strictement croissante et y jouit de la propriété N descriptive. Or il est démontré dans [12] que la fonction ψ peut être choisie de façon que sa dérivée soit nulle partout où elle existe.

Rappelons maintenant une notion due à Banach [1]: une fonction continue f jouit de la propriété T_1 lorsque l'ensemble des valeurs que f prend une infinité de fois est de mesure nulle. On a le théorème suivant, dû à Nina Bary ([2], p. 211 et 216):

(β) Il existe une fonction continue sur $[0, 1]$ qui y jouit de la propriété T_1, mais qui est dépourvue de la propriété N. Il existe une fonction continue sur $[0, 1]$ qui y jouit de la propriété N, mais qui est dépourvue de la propriété T_1.

Définissons maintenant la propriété T_1 descriptive en remplaçant, dans la définition de la propriété T_1 de Banach, la mesure nulle par la première catégorie. On a alors le

THÉORÈME 5. *Toute fonction continue f, définie sur* $[0, 1]$ *et y jouissant de la propriété* N *descriptive y jouit aussi de la propriété* T_1 *descriptive; il existe cependant des fonctions continues jouissant de la propriété* T_1 *descriptive sans jouir de la propriété* N *descriptive.*

Démonstration. D'après le théorème 3, il existe sur $[0, 1]$ un ensemble non dense Q, tel que f est monotone sur chaque intervalle contigu à Q. D'après l'hypothèse, l'image $f(\bar{Q})$ est de première catégorie. D'autre part, les intervalles où f est constante fournissent un ensemble au plus dénombrable de valeurs prises par f une infinité de fois. Pour montrer que f jouit de la propriété T_1 descriptive, il suffit donc de prouver que toute valeur prise par f une infinité de fois dans les intervalles de sa monotonie stricte appartient à $f(\bar{Q})$. En effet, si une valeur ξ est prise par f dans chacun des intervalles d'une suite $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ d'intervalles contigus à Q, on trouve sur $[0, 1]$ un point d'accumulation de cette suite d'intervalles, donc un point de $\bar{Q}$ et dans lequel la fonction f prend, en vertu de sa continuité, la valeur ξ. On a par conséquent $\xi \in f(\bar{Q})$.

Evidemment, la fonction scalariforme de Cantor, citée dans la remarque 3, a la propriété T_1 descriptive sans jouir de la propriété N descriptive.

Banach a établi dans [1] le théorème suivant:

(γ) Les points de dérivabilité d'une fonction continue et jouissant de la propriété N de Lusin forment un ensemble de mesure positive.

Or, le théorème descriptif analogue est en défaut:

THÉORÈME 6. *Il existe une fonction continue, jouissant de la propriété* N *descriptive et dont les points de dérivabilité forment un ensemble de première catégorie.*

Démonstration (²). On sait (voir par exemple [12], p. 6) que $E \subset [0, 1]$ étant un ensemble de mesure nulle, il existe une fonction continue φ, monotone non-décroissante sur $[0, 1]$ et telle que φ n'est dérivable en aucun point de E.

Choisissons E, en outre, de façon qu'il soit partout dense sur $[0, 1]$. Il s'ensuit alors, du mode de définition de la fonction φ (voir encore [12], p. 6) que φ sera, dans ce cas, strictement croissante et continue sur $[0, 1]$, et par conséquent φ jouira de la propriété N descriptive. Enfin, E peut être choisi parmi les ensembles résiduels de mesure nulle, car le segment $[0, 1]$ est réunion d'un ensemble de première catégorie et d'un ensemble de mesure nulle.

N. Bary a établi le théorème suivant (voir [2], p. 199, ou [14], p. 286):

(δ) Toute fonction continue f qui jouit de la propriété N de Lusin et dont la dérivée est non-négative presque partout où elle existe, est monotone croissante.

Vu le théorème symétrique pour le cas où la dérivée est non-positive, on a le théorème suivant:

Toute fonction continue f qui jouit de la propriété N de Lusin et dont la dérivée est nulle presque partout où elle existe, est une constante.

Le théorème descriptif analogue est en défaut:

THÉORÈME 7. *Il existe une fonction continue et strictement croissante dont la dérivée est nulle sur un ensemble résiduel.*

Démonstration. Pompeiu [10] a établi l'existence d'une fonction ψ continue et strictement croissante dont la dérivée est bornée et s'annule pour un ensemble partout dense de valeurs de x. Toute dérivée étant une fonction de la première classe de Baire, ses points de continuité forment un ensemble résiduel. Or l'ensemble Z des zéros de ψ' étant dense, chaque point de continuité de ψ' est contenu dans Z, qui est donc à plus forte raison un ensemble résiduel.

Remarque 6. Le théorème 7 est contenu dans notre travail [6] contenant une série de propriétés de la fonction de Pompeiu utilisée dans la démonstration ci-dessus. Ce théorème 7 nous a été communiqué oralement par P. Erdös avec une autre démonstration.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Sur une classe de fonctions continues*, Fundamenta Mathematicae 8 (1926), p. 166-172.

(²) Je dois l'idée de cette démonstration à une communication orale de János Czipszer.

[2] N. Bary, *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, Mathematische Annalen 103 (1930), p. 185-248.

[3] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, deuxième édition. New York 1948.

[4] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

[5] N. Lusin, *Sur la classification de M. Baire*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris (1917), p. 94.

[6] S. Marcus, *Sur les fonctions de Pompeiu* (en roumain), Studii şi Cercetări Matematice 5 (1954), p. 413-419.

[7] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les fonctions continues*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 161-169.

[8] K. Padmavally, *On the roots of equation $f(x) = \xi$ where $f(x)$ is real and continuous in (a, b), but monotonic in no subinterval of (a, b)*, Proceedings of the American Mathematical Society 4 (1953), p. 839-841.

[9] J. Pereno, *Sulle funzioni derivabili in ogni punto ed infinitamente oscillanti in ogni intervallo*, Giornale di Matematiche di Battaglini 35 (1897), p. 137-149.

[10] D. Pompeiu, *Sur les fonctions dérivées*, Mathematische Annalen 63 (1907), p. 326.

[11] H. Rademacher, *Eineindeutige Abbildungen und Messbarkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik 27 (1916), p. 183-290.

[12] F. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1952.

[13] S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1933.

[14] — *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów 1937.

[15] E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur certains invariants de l'opération (A)*, Fundamenta Mathematicae 21 (1933), p. 229-235.

Reçu par la Rédaction le 31. 12. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUR LES FAMILLES COMPACTES DE FONCTIONS MESURABLES

PAR

J. KISYŃSKI (LUBLIN)

Une famille R de fonctions mesurables, définies dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, est dite *compacte au sens de la convergence en mesure* si toute suite formée d'éléments de famille R contient une suite partielle convergente en mesure dans l'intervallle $\langle \alpha, \beta \rangle$ vers une fonction qui peut d'ailleurs ne pas appartenir à R. Certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de fonctions définies sur un ensemble mesurable borné dans l'espace à n dimensions soit compacte dans ce sens ont été établies par Fréchet [2]. Ces conditions ont été généralisées par W. L. Šmulian [6], qui a traité le même problème au point de vue de la théorie abstraite de la mesure. En particulier, les conditions dues à Šmulian s'appliquent à certaines familles de fonctions mesurables, définies sur des ensembles non bornés.

Nous nous proposons d'établir dans cet ordre d'idées d'autres conditions nécessaires et suffisantes et de mettre en relief certaines analogies entre elles et les conditions pour qu'une famille de fonctions continues soit compacte au sens de la convergence uniforme (théorème d'Arzelà). Nous nous bornerons à une famille de fonctions d'une variable définies sur un intervalle fini. On ramène aisément à ce cas celui d'une famille de fonctions d'une variable définies sur un ensemble E quelconque mesurable et borné: il suffit de prolonger toutes les fonctions de cette famille à un intervalle fini $I \supset E$ en admettant qu'en dehors de l'ensemble E elles sont identiquement nulles. Les généralisations des théorèmes de ce travail aux fonctions de plusieurs variables ne présentent aucune difficulté.

Dans le chapitre I, nous allons envisager quelques conditions désignées par (a), (b), (c) et (d) et dont chacune est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ soit mesurable. Ces conditions ressemblent à la condition bien connue qui figure dans la définition d'une fonction continue.