et unique), soit δ, du système $Z(x, y; p, q)$ serait d'après ce qui précède

$$\delta = p\cdot x + q\cdot y.$$

En particulier, pour $p = q = \frac{1}{2}$, la moyenne (T) qui peut alors être appelée le „milieu (T)" du couple x, y serait

$$m = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y.$$

La somme s de x et de y sera égale à $2m$. Mais maintenant, inversement, sans savoir si Γ est vectoriel distancié, si l'on se donne deux éléments x, y de Γ, on peut définir leur somme de la façon suivante.

En vertu de l'hypothèse A, il existe „un milieu (T)", soit μ, et un seul du système $Z(x, y; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire tel que

$$(\mu, a) \leqslant \tfrac{1}{2}(x, a) + \tfrac{1}{2}(y, a)$$

quelle que soit la courbe a de Γ.

Alors, par définition, nous appellerons somme (T) de x et de y le produit par scalaire $2\cdot\mu$, c'est-à-dire l'homothétique de la courbe μ dans l'homothétie de centre θ et de rapport 2.

Sans savoir si Γ est vectoriel distancié, notre hypothèse A sur Γ (que tout système $Z(x, y; p, q)$ a dans Γ une moyenne (T) et une seule), nous garantit donc que tout couple x, y a une somme (T) unique, qui coïncide nécessairement avec sa somme définie d'avance dans le cas où Γ est vectoriel distancié.

Finalement, notre second problème est ramené au problème suivant:

P 298. Y a-t-il un système $Z(x, y; p, q)$ qui n'ait pas de moyenne (T) dans Γ?

P 299. Tout couple x, y de Γ a-t-il une moyenne (T) et une seule?

Dans ce second cas, on sait définir une somme de x et de y, et il ne restera plus qu'à vérifier si le système, maintenant complet, des symboles Θ, $\|x\|$, $\lambda\cdot x$, $x+y$ satisfait aux conditions imposées à ces symboles dans la structure des espaces vectoriels distanciés. (Il est certain, avant toute étude particulière relative à Γ, que ce système vérifie plusieurs de ces conditions).

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Fréchet, *Sur deux problèmes d'Analyse non résolus*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 33-40.

[2] — *Définition de la somme et du produit par scalaire en termes de distance*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) 75 (1958), p. 223-255.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

CONVERGENCE DU TYPE L

PAR

J. KISYŃSKI (LUBLIN)

Dans tout espace du type L, la convergence donnée a priori permet d'une manière naturelle de définir les ensembles ouverts, à l'aide desquels on peut ensuite tenter de définir une nouvelle convergence comme on le fait dans les espaces topologiques de Hausdorff. On aboutit ainsi à la notion que Urysohn [4] a appelée *convergence a posteriori*. En généralisant les résultats de Fréchet [2] et d'Urysohn [4], je vais démontrer que dans tout espace du type L la convergence a posteriori fournit la moindre extension de la convergence donnée a priori à la convergence du type L^*.

Je tiens à remercier M. J. Mikusiński et M. R. Sikorski dont les conseils m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

*ESPACES DES TYPES L ET L**

On appelle *espace du type L* tout espace X dans lequel, parmi toutes les suites de ses éléments, la classe des suites convergentes est distinguée et qu'à toute suite convergente on fait correspondre univoquement un élément de l'espace X, appelé *limite* de cette suite, de façon que

I. pour tout élément $x \in X$ la suite à terme constant x est convergente et sa limite est l'élément x,

II. si la suite $x_1, x_2, \ldots$ est convergente, chacune de ses sous-suites est aussi convergente et notamment vers la même limite.

Lorsque la suite $x_1, x_2, \ldots$ est convergente et que sa limite est l'élément x, nous disons brièvement que la suite $x_1, x_2, \ldots$ *converge* vers x et nous écrivons l'égalité $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

On appelle *espace du type* L^* tout espace du type L tel que la condition:

(*) toute sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ de la suite $x_1, x_2, \ldots$ contient une sous-suite $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots$ convergente vers x_0

entraîne la convergence de la suite $x_1, x_2, \ldots$ vers x_0.

Il est évident que si la suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments d'un espace du type L converge vers un élément x_0 de cet espace, la condition (*) est satisfaite, et que pour toute suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments d'un espace du type L, il existe au plus un élément x_0 de cet espace satisfaisant à la condition (*). En suivant Urysohn [4], on peut donc, dans tout espace du type L, étendre la classe des suites convergentes en admettant que la suite $x_1, x_2, \ldots$ converge, dans le nouveau sens, vers l'élément x_0 si et seulement si cette suite et l'élément x_0 vérifient la condition (*). On obtient ainsi la moindre extension de la classe des suites convergentes dans cet espace fournissant la convergence du type L^*.

Exemple 1. Si la convergence des suites de nombres réels est définie par la condition

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \equiv |x_n - x| < \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

la moindre extension à la convergence du type L^* conduit à la convergence ordinaire.

Exemple 2. Pour la convergence presque partout des suites de fonctions mesurables sur un intervalle fini, la moindre extension à la convergence du type L^* conduit à la convergence en mesure sur cet intervalle

LE DÉRIVÉ D'UN ENSEMBLE DANS UN ESPACE DU TYPE L

Soit A un sous-ensemble d'un espace du type L. L'élément x de cet espace sera dit *élément d'accumulation* de l'ensemble A s'il existe une suite d'éléments de l'ensemble A distincts de x qui converge vers x. On appelle *dérivé* A' de l'ensemble A l'ensemble de tous ses éléments d'accumulation. Des axiomes I et II résultent les propriétés suivantes du dérivé d'un ensemble dans les espaces du type L:

1° si l'ensemble A est fini ou vide, on a $A' = 0$,

2° $(A+B)' = A'+B'$.

Lemme 1. *Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite d'éléments d'un espace du type L. Si $x \in \{x_1, x_2, \ldots\}'$, la suite $x_1, x_2, \ldots$ contient une sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ convergente vers x et telle que $x_{n_i} \neq x_{n_k}$ pour $i \neq k$.*

Démonstration. Si $x \in \{x_1, x_2, \ldots\}'$, il existe une suite de nombres naturels $p_1, p_2, \ldots$ telle que la suite $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots$ converge vers x et $x_{p_i} \neq x$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Si elle contenait une sous-suite $x_{p_{i_1}}, x_{p_{i_2}}, \ldots$ ayant un terme constant égal à y, on aurait en vertu des axiomes I et II,

$$x = \lim_{i\to\infty} x_{p_i} = \lim_{k\to\infty} x_{p_{i_k}} = y,$$

et par conséquent $x_{p_{i_k}} = x$ pour $k = 1, 2, \ldots$, ce qui est impossible. Donc, aucun terme ne figure dans la suite $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots$ une infinité de fois et par conséquent cette suite contient une sous-suite $x_{p_{q_1}}, x_{p_{q_2}}, \ldots$ telle que $x_{p_{q_i}} \neq x_{p_{q_k}}$ pour $i \neq k$ et que $p_{q_1} < p_{q_2} < \ldots$ En vertu de l'axiome II, cette sous-suite converge vers x. En même temps, elle est une sous-suite de $x_1, x_2, \ldots$ Donc, il reste à poser $n_k = p_{q_k}$.

ENSEMBLES OUVERTS DANS UN ESPACE DU TYPE L

Le sous-ensemble G d'un espace du type L sera dit *ouvert* si, pour toute suite d'éléments de cet espace convergeant vers un élément de G, tous les termes de cette suite sauf un nombre fini au plus, appartiennent à l'ensemble G. La classe d'ensembles ouverts ainsi définie dans un espace du type L a les propriétés suivantes:

3° la somme d'un nombre quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert,

4° le produit d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert,

5° pour tout couple d'éléments x_1 et x_2, il existe un ensemble ouvert contenant x_1 et ne contenant pas x_2 (l'espace tout entier, dont on a exclu l'élément x_2, en est un exemple).

Nous entendrons par *voisinage* de l'élément x appartenant à un espace du type L tout ensemble ouvert contenant l'élément x. Il résulte des propriétés 3°-5° des ensembles ouverts que tout espace du type L est un espace du type T_1, dans ce sens que les voisinages définis dans un espace du type L satisfont aux axiomes de Fréchet par lesquels Alexandroff et Hopf définissent les espaces du type T_1 (voir [1], p. 59).

ENSEMBLES FERMÉS ET OPÉRATION DE FERMETURE DANS UN ESPACE DU TYPE L

Un sous-ensemble d'un espace du type L sera dit *fermé* s'il contient les limites de toutes les suites convergentes de ses éléments. De cette définition résultent les deux conséquences suivantes:

6° un sous-ensemble A d'un espace du type L est fermé si et seulement si $A' \subset A$,

7° un sous-ensemble d'un espace du type L est fermé si et seulement si son complément est un ensemble ouvert.

Le produit d'un nombre arbitraire d'ensembles fermés au sens de cette définition est un ensemble fermé. L'espace entier étant un ensemble fermé, tout ensemble a donc dans un espace du type L, un plus petit sur-ensemble fermé. Le plus petit sur-ensemble fermé de l'ensemble A sera désigné par $\bar{A}$ et appellé *fermeture* de l'ensemble A. Cette définition entraîne deux conséquences suivantes:

8° la fermeture de l'ensemble A est l'ensemble de tous les éléments x tels que tout voisinage de x contient au moins un élément de A,

9° un ensemble A situé dans un espace du type L est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$.

Nous avons vu qu'un espace du type L peut être considéré comme un cas particulier d'un espace du type T_1. La propriété 8° montre que la définition de la fermeture, que nous avons admise pour les espaces du type L est compatible avec la définition générale de la fermeture pour les espaces du type T_1. Il en résulte qu'un espace du type L est, de même que tout espace du type T_1, un espace topologique au sens de Kuratowski, c'est-à-dire que l'opération de fermeture y a les propriétés suivantes (cf. Kuratowski [3], p. 20):

10° $\overline{A+B} = \bar{A}+\bar{B}$,

11° $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$,

12° si l'ensemble A est fini ou vide, on a $\bar{A} = A$.

CERTAINES CONDITIONS SUFFISANTES POUR L'ÉGALITÉ $\bar{A} = A+A'$

Pour un ensemble A contenu dans un espace du type L, l'égalité $\bar{A} = A+A'$ a lieu si et seulement si l'ensemble $A+A'$ est fermé. Mais il existe des espaces du type L dans lesquels les ensembles de la forme $A+A'$ ne sont pas tous fermés [1]. Il suffit de considérer l'espace (du type L^*) de toutes les fonctions de Baire définies sur un intervalle, où la convergence d'une suite de fonctions signifie que cette suite est convergente en tout point de l'intervalle (cf. Kuratowski [3], p. 23).

Fréchet [2] et Urysohn [4] se sont bornés aux espaces du type L dans lesquels tout ensemble de la forme $A+A'$ est fermé; cette condition équivaut à ce que le dérivé d'un ensemble arbitraire soit un ensemble fermé. On peut cependant pour suivre les raisonnements de ces auteurs si l'on sait que certaines propriétés de l'ensemble A entraînent

[1] Dans la note [1], Urysohn a défini la fermeture d'un ensemble A dans un espace du type L comme la somme $A+A'$. C'est pourquoi dans le sens de [4] un espace du type L n'est pas nécessairement un espace du type T_1.

l'égalité $\bar{A} = A+A'$. Deux de ces propriétés sont indiquées dans les lemmes suivants.

LEMME 2. *Soient A et B des ensembles contenus dans un espace du type L. Si l'ensemble B est fini et $A' \subset A+B$, on a $\bar{A} = A+A'$.*

Démonstration. En vertu de 1° et 2°, on a $(A+A')' \subset (A+B)' = A'+B' = A' \subset A+A'$, l'ensemble $A+A'$ est donc fermé d'après 6°. Par conséquent, $\overline{A+A'} = A+A'$ d'après 9°, et puisque $\bar{A} \subset \bar{A}+\bar{A}' = \overline{A+A'}$ d'après 10°, on a $\bar{A} \subset A+A'$. D'autre part, $A \subset \bar{A}$, d'où $A' \subset \bar{A}'$, et comme l'ensemble $\bar{A}$ est fermé par définition, on a $\bar{A}' \subset \bar{A}$ en vertu de 6°. Par conséquent, $A+A' \subset \bar{A}$ et le lemme 2 est démontré.

LEMME 3. *Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite d'éléments d'un espace du type L. S'il existe un élément x_0 de cet espace tel que*

(i) $\quad x_0 \epsilon \overline{\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}}$ *pour toute sous-suite de la suite $x_1, x_2, \ldots$,*

on a

$$\overline{\{x_1, x_2, \ldots\}} = \{x_1, x_2, \ldots\} + \{x_1, x_2, \ldots\}'.$$

Démonstration. Supposons la condition (i) vérifiée. Il suffit, en vertu du lemme 2, de prouver que $\{x_1, x_2, \ldots\}' \subset \{x_0\}$. Supposons donc que $x \epsilon \{x_1, x_2, \ldots\}'$. Alors, d'après le lemme 1, la suite $x_1, x_2, \ldots$ contient une sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ convergente vers x et telle que $x_{n_i} \neq x_{n_k}$ pour $i \neq k$. En vertu de l'axiome II et du lemme 1,

$$\{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \ldots\}' = \{x\} \quad \text{pour tout} \quad k = 0, 1, \ldots,$$

donc, en vertu de (i) et du lemme 2,

$$x_0 \epsilon \{x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \ldots\} + \{x\} \quad \text{pour tout} \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ce qui entraîne $x = x_0$. Par conséquent, $\{x_1, x_2, \ldots\}' \subset \{x_0\}$ et le lemme 3 se trouve démontré.

LA CONVERGENCE A POSTERIORI DANS LES ESPACES DU TYPE L ET SON RAPPORT À LA CONVERGENCE DONNÉE A PRIORI

Soient $x_1, x_2, \ldots$ une suite d'éléments d'un espace du type L et x_0 un élément de cet espace. Si tout voisinage de x_0 contient tous les termes de la suite $x_1, x_2, \ldots$, sauf un nombre fini au plus, nous dirons à l'exemple d'Urysohn [4], que la suite $x_1, x_2, \ldots$ *converge a posteriori* vers l'élément x_0.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments d'un espace du type L converge a posteriori vers un élément x_0 de cet espace, il faut et il* *suffit que la suite $x_1, x_2, \dots$ et l'élément x_0 vérifient la condition*

(*) *toute sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ de la suite $x_1, x_2, \dots$ contient une sous-suite $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \dots$ convergente vers x_0 au sens donné a priori.*

D'après ce théorème, pour tout espace du type L la convergence a posteriori fournit la moindre extension de la convergence donnée a priori à la convergence du type L^*. Le théorème 1 entraîne aussitôt le

THÉORÈME 2. *Dans tout espace du type L^* la convergence a posteriori est identique à la convergence donnée a priori.*

En vertu des propriétés 3°-5° des ensembles ouverts, théorème 2 entraîne le

THÉORÈME 3. *Toute convergence du type L^* est induite par une topologie du type T_1.*

Fréchet [2] et Urysohn [4] ont établi les théorèmes 1 et 2 sous l'hypothèse que la dérivée de tout sous-ensemble de l'espace considéré est un ensemble fermé. La démonstration dans le cas où cette hypothèse n'intervient pas ne contient rien de nouveau par rapport aux travaux [2] et [4], sinon qu'elle utilise le lemme 3 s'il y a lieu.

Démonstration du théorème 1. *La condition* (*) *est suffisante.* Si la suite $x_1, x_2, \dots$ ne converge pas a posteriori vers x_0, il existe un ensemble ouvert G et une sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ tels que $x_0 \in G$ et que $x_{n_k} \notin G$ pour tout $k = 1, 2, \dots$ En vertu de la définition de l'ensemble ouvert, cette sous-suite ne contient aucune sous-suite convergente vers x_0 a priori, la condition (*) n'est donc pas vérifiée.

La condition (*) *est nécessaire.* Supposons que la suite $x_1, x_2, \dots$ d'éléments d'un espace X du type L converge a posteriori vers un élément x_0 de cet espace. Si cette suite contenait une sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ telle que $x_0 \notin \overline{\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}}$, l'ensemble ouvert $G = X - \overline{\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}}$ contiendrait x_0 et ne contiendrait aucun des éléments de la suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$, contrairement à l'hypothèse que la suite $x_1, x_2, \dots$ converge a posteriori vers x_0. Donc la condition (i), p. 209, est vérifie et, en vertu du lemme 3, on a pour toute sous-suite de la suite $x_1, x_2, \dots$

$$x_0 \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\} + \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}'.$$

Il en résulte, en tenant compte de l'inclusion $\{x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \dots\}' \subset \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}'$ que, pour toute sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ de la suite $x_1, x_2, \dots,$ on a l'une des alternatives: (a) $x_0 \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}'$ ou (b) $x_0 \in \{x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \dots\}$ pour toute sous-suite de la suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$

Dans le cas (a), la suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ contient en vertu du lemme 1 une sous-suite convergente vers x_0. Dans le cas (b), il existe un k_0 tel que $x_{n_k} = x_0$ pour $k > k_0$; en vertu de l'axiome I, $x_{n_{k_0+1}}, x_{n_{k_0+2}}, \dots$ est donc une sous-suite de $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ convergente vers x_0. La condition (*) est ainsi vérifiée et la démonstration du théorème 1 est achevée.

Le théorème 1 peut aussi être démontré comme il suit. La condition (*) équivaut à la suivante (cf. Kuratowski [3], p. 85): $x_0 \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\} + \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}'$ pour toute sous-suite de la suite $x_1, x_2, \dots$ En vertu du lemme 3, la dernière condition est équivalente à la condition (i), qui est nécessaire et suffisante pour que la suite $x_1, x_2, \dots$ converge a posteriori vers x_0.

TRAVAUX CITÉS

[1] P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, I, Berlin 1935.

[2] M. Fréchet, *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits*, Bulletin des Sciences Mathématiques 42 (1918).

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, édition troisième, Warszawa 1952.

[4] P. Urysohn, *Sur les classes L de M. Fréchet*, Enseignement Mathématique 25 (1926), p. 77-83.

Reçu par la Rédaction le 11. 5. 1959