It is obvious if α has a precedent, for α being a limit-number, it follows from the equality

$$\bigcap_{\beta\leqslant\alpha}\overline{V(\xi_p)}=\bigcap_{\beta\leqslant\alpha}V(\xi_p)$$

and from the compactness of X.

(ii) If for some γ the sets $V(\xi)$ with $\xi\in I^\gamma$ are defined, then the family $\{\bigcap_{\beta\leqslant\gamma}V(\xi_\beta)\colon \xi\in I^\gamma\}$ contains a subfamily of cardinal $2^{\overline{\gamma}}$ consisting of disjoint sets. Indeed, if two sequences $\xi^1,\xi^2\in I^\gamma$ differ in the β-th position, and β is not a limit-number, then the sets $V(\xi^1_\beta)$ and $V(\xi^2_\beta)$ are disjoint; hence $\bigcap_{\beta\leqslant\gamma}V(\xi^1_\beta)$ and $\bigcap_{\beta\leqslant\gamma}V(\xi^2_\beta)$ are disjoint.

Let γ be the first ordinal number such that the set $V(\xi)$ is not defined for $\xi\in I^{\gamma+1}$. Then for some $\xi\in I^\gamma$ the set $\bigcap_{\beta\leqslant\gamma}V(\xi_\beta)$ contains less than two elements. Hence, by (i), we get

$$\bigcap_{\beta\leqslant\gamma}V(\xi_p)=(p).$$

The last equality implies $\Theta(p)\leqslant\overline{\gamma}$ and, if $\Theta(p)\geqslant\mathfrak{m}$, we get, by (ii), $\overline{\overline{X}}\geqslant 2^{\overline{\gamma}}\geqslant 2^{\Theta(p)}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

REFERENCES

[1] A. Hulanicki, *On locally compact topological groups of power of continuum*, Fundamenta Mathematicae 44 (1957), p. 156-158.

[2] — *On cardinal numbers related with locally compact groups*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, 6 (1958), p. 67-70.

[3] F. B. Jones, *On the first countability axiom for locally compact Hausdorff spaces*, Colloquium Mathematicum 7 (1959), p. 33-34.

[4] S. Mrówka, *A generalization of a theorem concerning the power of a perfect compact metric space*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, 6 (1958), p. 89-93.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

SUPPLÉMENT À L'ARTICLE „SUR DEUX PROBLÈMES D'ANALYSE NON RÉSOLUS"

PAR

M. FRÉCHET (PARIS)

I. Une modification d'une démonstration. Dans la réciproque de la p. 39 de mon travail [1], on suppose „que la somme de deux courbes ne soit définie que dans le cas où ces deux courbes sont des lignes polygonales orientées". Cette supposition n'ayant pas été respectée dans la démonstration, il y a lieu de modifier celle-ci de la manière suivante. On aura

$$\begin{aligned}(Q_\varepsilon,Q_\omega)&=(P_\varepsilon+P'_\varepsilon,P_\omega+P'_\omega)=\|(P_\varepsilon+P'_\varepsilon)+(-1)(P_\omega+P'_\omega)\|\\&=\|(P_\varepsilon+(-1)P_\omega)+(P'_\varepsilon+(-1)P'_\omega)\|\\&\leqslant\|P_\varepsilon+(-1)P_\omega\|+\|P'_\varepsilon+(-1)P'_\omega\|=(P_\varepsilon,P_\omega)+(P'_\varepsilon,P'_\omega).\end{aligned}$$

Or

$$(P_\varepsilon;P_\omega)\leqslant(P_\varepsilon,c)+(c,P_\omega)\leqslant\varepsilon+\omega.$$

De même pour les P'. On a donc

$$(Q_\varepsilon,Q_\omega)\leqslant 2\varepsilon+2\omega \tag{8}$$

comme dans le texte déjà paru. D'après ce même texte: „L'espace Γ, considéré comme espace distancié, (...) est complet". Dès lors, il résulte de la formule (8) que Q_ε tend vers une courbe déterminée σ quand $\varepsilon\to 0$. Cette courbe limite ne dépend pas du choix des lignes polygonales $P_\varepsilon, P'_\varepsilon$. Si on leur substitue deux lignes polygonales orientées $p_\varepsilon, p'_\varepsilon$ et si l'on pose $q_\varepsilon=p_\varepsilon+p'_\varepsilon$, on aura (mais ici nous modifions encore une fois les formules):

$$\begin{aligned}(Q_\varepsilon,q_\varepsilon)&\equiv(P_\varepsilon+P'_\varepsilon,p_\varepsilon+p'_\varepsilon)=\|P_\varepsilon+P'_\varepsilon+(-1)(p_\varepsilon+p'_\varepsilon)\|\\&=\|(P_\varepsilon+(-1)p_\varepsilon)+(P'_\varepsilon+(-1)p'_\varepsilon)\|\\&\leqslant\|P_\varepsilon+(-1)p_\varepsilon\|+\|P'_\varepsilon+(-1)p'_\varepsilon\|=(P_\varepsilon,p_\varepsilon)+(P'_\varepsilon,p'_\varepsilon).\end{aligned}$$

Or

$$(P_\varepsilon, p_\varepsilon) \leqslant (P_\varepsilon, C) + (C, p_\varepsilon)$$

et de même $(P'_\varepsilon, p'_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$, d'où $(Q_\varepsilon, q_\varepsilon) \leqslant 4\varepsilon$ et $(\sigma, q_\varepsilon) \leqslant (\sigma, Q_\varepsilon) + 4\varepsilon$. Donc $q_\varepsilon \to \sigma$.

Nous pouvons maintenant répéter la suite du texte déjà imprimé, toutefois en y supprimant les deux mots „telles que" (qui le rendent incompréhensible) juste avant „1° leur somme ...".

Aucun énoncé de résultat n'est finalement à modifier.

II. Remarque sur le deuxième problème. *Une première élimination.* La deuxième question posée à la page 36 (et précisée p. 37) du travail cité n'est pas résolue, mais nous allons éliminer la solution qui serait la plus simple, en démontrant que l'espace Γ des courbes n'est pas un espace vectoriel distancié (¹) tendu.

Nous avons dit, il y a bien longtemps, qu'un espace vectoriel distancié est *tendu*, si pour tout couple d'éléments x, y de cet espace, il est équivalent de dire qu'un élément quelconque z de cet espace appartient au „segment xy", c'est-à-dire que l'on a la relation

$$(x, z) + (z, y) = (x, y)$$

entre les „distances" mutuelles de ces points, ou de dire qu'il appartient au „vecteur xy", c'est-à-dire qu'il existe deux nombres α, β ($\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$) tels que $z = \alpha x + \beta y$.

Nous allons démontrer un

THÉORÈME. *L'espace Γ des courbes de Jordan n'est pas un espace vectoriel distancié tendu* (²).

En effet, nous avons démontré ([2], p. 227) que si un espace vectoriel distancié est tendu, tout système Z (constitué de deux éléments x, y de cet espace et de deux nombres p, q ($p \geqslant 0, q \geqslant 0, p+q = 1$)) a un centre de gravité γ et un seul.

(Nous disons que γ est *centre de gravité* de Z, si c'est un élément du même espace tel que $(x, \gamma) + (\gamma, y) = (x, y)$, $p(x, \gamma) = q(y, \gamma)$).

Or, d'autre part, nous avons démontré ([2], p. 250) que si x et y sont deux éléments de Γ réduits à deux segments orientés $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, un système correspondant $Z(x, y; p, q)$ a une infinité de centres de gravité (sauf dans le cas où le produit $pq(x, y)$ est nul). Le théorème énoncé plus haut résulte immédiatement de ces deux propositions.

(¹) Un espace est dit *distancié vectoriel* (linéaire normé suivant Michal) s'il vérifie les conditions imposées à un espace de Banach, sauf la condition qu'il soit complet.

(²) Nous supposons que, dans cet espace, θ, $\|C\|$ et $a \cdot C$ ont été choisis comme à la p. 37 du travail [1].

Un procédé de démonstration. Nous allons indiquer une manière d'aborder indirectement le second problème.

Soit D un espace distancié; en appliquant à un cas particulier une définition générale donnée par S. Doss, nous dirons qu'un système $Z(x, y; p, q)$ possède dans D une *moyenne* (T), soit δ, s'il existe un élément δ de D tel que, pour tout élément a de D

$$(\delta, a) \leqslant p(x, a) + q(y, a), \tag{1}$$

en désignant d'une façon génerale par (x, y) la „distance" dans D de x et de y.

Nous avons déjà signalé la proposition suivante:

Si l'espace distancié (D) est un espace „vectoriel distancié", alors, pour cet espace, tout système $Z(x, y; p, q)$ possède dans D au moins une moyenne (T), à savoir la moyenne classique

$$\delta = px + qy.$$

Puisqu'elle est immédiate, répétons la démonstration. On a ici

$$(\delta, a) = \|px + qy - a\| = \|p(x-a) + q(y-a)\|$$
$$\leqslant \|p(x-a)\| + \|q(y-a)\| = p(x, a) + q(y, a).$$

Soit alors, Γ, l'espace distancié des courbes de Jordan. Deux cas sont à examiner, en particulier:

I. Ou bien on peut trouver au moins un système $Z(x, y; p, q)$ particulier ne vérifiant pas (1) pour au moins un élément a de Γ, et alors cela suffit pour prouver que l'espace Γ n'est pas un espace vectoriel distancié (et en particulier n'est pas un espace de Banach).

II. Ou bien on peut prouver que dans l'espace Γ, pour tout système $Z(x, y; p, q)$, il y a au moins une moyenne (T), soit δ, de ce système, c'est-à-dire qui vérifie (1) quelle que soit la courbe a de Γ.

Hypothèse A. Supposons même qu'on ait pu prouver que pour tout système $Z(x, y; p, q)$ de Γ, il y a une moyenne (T) et une seule.

Sans savoir encore si Γ est un espace vectoriel distancié, on peut adopter dans Γ des définitions naturelles pour les symboles Θ, $\|x\|$, $\lambda \cdot x$. On prendra comme élément neutre, Θ, une courbe réduite à un point (choisi arbitrairement); pour norme de x la „distance" à Θ

$$\|x\| = (x, \Theta)$$

et enfin pour $\lambda \cdot x$ l'homothétique de la courbe x à partir du centre Θ, avec le rapport d'homothétie λ.

Ceci étant, si l'espace Γ est un espace vectoriel distancié (où Θ, $\|x\|$ et $\lambda \cdot x$ ont les significations ci-dessus), la moyenne (T) (supposée existante et unique), soit δ, du système $Z(x, y; p, q)$ serait d'après ce qui précède

$$\delta = p\cdot x + q\cdot y.$$

En particulier, pour $p = q = \frac{1}{2}$, la moyenne (T) qui peut alors être appelée le „milieu (T)" du couple x, y serait

$$m = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y.$$

La somme s de x et de y sera égale à $2m$. Mais maintenant, inversement, sans savoir si Γ est vectoriel distancié, si l'on se donne deux éléments x, y de Γ, on peut définir leur somme de la façon suivante.

En vertu de l'hypothèse A, il existe „un milieu (T)", soit μ, et un seul du système $Z(x, y; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire tel que

$$(\mu, a) \leqslant \tfrac{1}{2}(x, a) + \tfrac{1}{2}(y, a)$$

quelle que soit la courbe a de Γ.

Alors, par définition, nous appellerons somme (T) de x et de y le produit par scalaire $2\cdot\mu$, c'est-à-dire l'homothétique de la courbe μ dans l'homothétie de centre θ et de rapport 2.

Sans savoir si Γ est vectoriel distancié, notre hypothèse A sur Γ (que tout système $Z(x, y; p, q)$ a dans Γ une moyenne (T) et une seule), nous garantit donc que tout couple x, y a une somme (T) unique, qui coïncide nécessairement avec sa somme définie d'avance dans le cas où Γ est vectoriel distancié.

Finalement, notre second problème est ramené au problème suivant:

P 298. Y a-t-il un système $Z(x, y; p, q)$ qui n'ait pas de moyenne (T) dans Γ?

P 299. Tout couple x, y de Γ a-t-il une moyenne (T) et une seule?

Dans ce second cas, on sait définir une somme de x et de y, et il ne restera plus qu'à vérifier si le système, maintenant complet, des symboles Θ, $\|x\|$, $\lambda\cdot x$, $x+y$ satisfait aux conditions imposées à ces symboles dans la structure des espaces vectoriels distanciés. (Il est certain, avant toute étude particulière relative à Γ, que ce système vérifie plusieurs de ces conditions).

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Fréchet, *Sur deux problèmes d'Analyse non résolus*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 33-40.

[2] — *Définition de la somme et du produit par scalaire en termes de distance*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) 75 (1958), p. 223-255.

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

CONVERGENCE DU TYPE L

PAR

J. KISYŃSKI (LUBLIN)

Dans tout espace du type L, la convergence donnée a priori permet d'une manière naturelle de définir les ensembles ouverts, à l'aide desquels on peut ensuite tenter de définir une nouvelle convergence comme on le fait dans les espaces topologiques de Hausdorff. On aboutit ainsi à la notion que Urysohn [4] a appelée *convergence a posteriori*. En généralisant les résultats de Fréchet [2] et d'Urysohn [4], je vais démontrer que dans tout espace du type L la convergence a posteriori fournit la moindre extension de la convergence donnée a priori à la convergence du type L^*.

Je tiens à remercier M. J. Mikusiński et M. R. Sikorski dont les conseils m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

*ESPACES DES TYPES L ET L**

On appelle *espace du type* L tout espace X dans lequel, parmi toutes les suites de ses éléments, la classe des suites convergentes est distinguée et qu'à toute suite convergente on fait correspondre univoquement un élément de l'espace X, appelé *limite* de cette suite, de façon que

I. pour tout élément $x \in X$ la suite à terme constant x est convergente et sa limite est l'élément x,

II. si la suite $x_1, x_2, \ldots$ est convergente, chacune de ses sous-suites est aussi convergente et notamment vers la même limite.

Lorsque la suite $x_1, x_2, \ldots$ est convergente et que sa limite est l'élément x, nous disons brièvement que la suite $x_1, x_2, \ldots$ *converge* vers x et nous écrivons l'égalité $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

On appelle *espace du type* L^* tout espace du type L tel que la condition:

$(*)$ toute sous-suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ de la suite $x_1, x_2, \ldots$ contient une sous-suite $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots$ convergente vers x_0

entraîne la convergence de la suite $x_1, x_2, \ldots$ vers x_0.