COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1960 FASC. 2

MULTIGROUPOÏDE SUR UN SYSTÈME DEMOSIEN DE GROUPOÏDES

PAR

A. SADE (MARSEILLE)

1. Un *multigroupoïde* ([1], p. 183) est un ensemble M muni d'une opération binaire qui, à tout couple ordonné d'éléments $x, y \in M$, fait correspondre un sous-ensemble $\subseteq M$. Un *semigroupe* ([3], N° 10, p. 162) est un groupoïde satisfaisant à la loi d'associativité $(xy)z = x(yz)$. Un élément x est *idempotent* par rapport à la loi $(\cdot)$ ([3], N° 1, équ. 1, p. 153) si $x \cdot x = x$. Deux groupoïdes définis sur le même ensemble E par les lois $(\times)$ et $(*)$ sont *isotopes* ([3], N° 15, p. 164) si $(x \times y)\zeta = x\xi * y\eta$, où les composantes (ξ, η, ζ) de l'isotopie sont trois permutations de l'ensemble E. Un ensemble d'éléments $E = (x, y, z, \ldots)$ muni de lois de composition $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots) = \Phi$, binaires, $x\varphi_i y = z$, s'appelle un *système demosien de groupoïdes*, noté (E, Φ) [4].

Si un tel ensemble satisfait à la relation associative particulière

$$(1) \qquad \forall x, y, z \in E, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi, \quad \exists \varphi_3 \in \Phi, \quad (x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_3 z),$$

cette relation définit une loi de composition $(\cdot)$ sur l'ensemble Φ, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_3$. La loi $(\cdot)$ ne sera pas uniforme en général, car l'équation (1) pourra avoir plusieurs solutions en φ_3, et le système (E, Φ) sera un multigroupoïde par rapport à $(\cdot)$.

Un groupoïde est *diagonal* ([5], N° 12), si $\forall a \in G$, $\exists$ un seul x, $xx = a$.

Un *système* (G, K, T), où K et T sont deux sous-groupes d'un groupe G, est l'ensemble des quasigroupes $G(\xi, \theta)$, isotopes du groupe G par les isotopies $x \times y = x\xi y\theta$, où $\xi \in K$ et $\theta \in T$.

L'identité de Bol-Schröder est $a(ba) = (ab)a$.

2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'élément φ_i soit idempotent par rapport à $(\cdot)$ est que le groupoïde $E(\varphi_i)$ soit un semigroupe.*

Preuve. La relation

$$(x\varphi_i y)\varphi_i z = x\varphi_i(y\varphi_i z)$$

exprime en même temps que le groupoïde $E(\varphi_i)$ est associatif et que $\varphi_i\cdot\varphi_i = \varphi_i$, c'est-à-dire que φ_i est idempotent par rapport à la loi $(\cdot)$.

3. (i) *Si un système de groupoïdes (E, Φ), muni de la loi $(\cdot)$, possède une unité droite, φ, le groupoïde $E(\varphi)$ est un semigroupe. Si tous les $E(\varphi^i)$ du système sont des semigroupes, celui-ci se réduit à son unité.*

(ii) *Si (E, Φ) admet un zéro à droite, φ_0, celui-ci est associatif et si le système ne se réduit pas à $E(\varphi_0)$, ce dernier, φ_0, est isotope par la distorsion $(\xi = \eta = 1, \zeta$ arbitraire$)$* ([2], p. 420) *du semigroupe de Thierrin $x\times y = y$.*

Preuve. (i) Supposons que φ soit unité à droite du système $S(\cdot)$. Alors, $\varphi_1\cdot\varphi = \varphi_1$ ou

$$\forall x, y, z\in E, \quad \forall\varphi_1\in\Phi, \quad (x\varphi_1 y)\varphi z = x\varphi_1(y\varphi_1 z).$$

Si $\varphi_1 = \varphi$, cela devient $(x\varphi y)\varphi z = x\varphi(y\varphi z)$; donc φ est associatif. Si tous les groupoïdes $E(\varphi_i)$ sont des semigroupes, on a

$$\forall x, y, z\in E, \quad (x\varphi_1 y)\varphi z = x\varphi_1(y\varphi_1 z) = (x\varphi_1 y)\varphi_1 z,$$

donc, en posant $x\varphi_1 y = t$, on aura $\forall t\in E$, $t\varphi z = t\varphi_1 z$ et $\varphi_1 = \varphi$; le système $S(\cdot)$ se réduit au seul élément neutre $E(\varphi)$.

(ii) Si φ_0 est zéro à droite de $S(\cdot)$, on a

$$\forall x, y, z\in E, \quad \forall\varphi_1\in\Phi, \quad (x\varphi_1 y)\varphi_0 z = x\varphi_0(y\varphi_0 z),$$

et l'on voit, comme ci-dessus, que φ_0 est associatif. Ensuite l'égalité $(x\varphi_1 y)\varphi_0 z = (x\varphi_0 y)\varphi_0 z$ entraîne ou bien $x\varphi_1 y = x\varphi_0 y$ et $\varphi_1 = \varphi_0$, ce qui signifie que $S(\cdot)$ se réduit à son idéal nul, ou bien $\forall z\in E$, $t\varphi_0 z = t'\varphi_0 z$, et $E(\varphi_0)$ est isotope du *semigroupe à translation identique* $x\varphi_i y = y$ ([4], [6], p. 178) par une *distorsion* $(\zeta = \eta = 1$, ζ arbitraire$)$ ([2], p. 420).

4. On peut définir un système demosien de quasigroupes, noté (G, K, T), en soumettant un groupe G à toutes les isotopies de la forme $x\varphi_i y = x\xi_i y\theta_i$, $\xi_i\in K\subseteq G$, $\theta_i\in T\subseteq G$, où T et K sont deux sous-groupes de G ([4], N° 19.2). Un groupoïde est *diagonal* ([5], N° 12, [3], équ. 62, p. 156), si l'équation $x\times x = a$ admet toujours une solution en x quel que soit a dans le groupoïde.

Pour qu'un système (G, K, T) satisfasse à (1), *il faut et il suffit que T et K soient diagonaux et contenus dans le centre de G.*

Preuve. Si la relation (1) est vérifiée, on a ici

$$\forall x, y, z\in G, \quad x\xi_1 y\theta_1\xi_2 z\theta_2 = x\xi_3 y\xi_3 z\theta_3^2. \tag{2}$$

En prenant pour y et z l'unité 1 du groupe, on a

$$\xi_1\theta_1\xi_2\theta_2 = \xi_3^2\theta_3^2.$$

Si z seul est neutre, on a

$$\xi_1 y\theta_1\xi_2\theta_2 = \xi_3 y\xi_3\theta_3^2$$

ou $\xi_3^{-1}\xi_1 y = y\xi_3\theta_3^2\theta_2^{-1}\xi_2^{-1}\theta_1^{-1}$, donc

$$\xi_3^{-1}\xi_1\in\mathfrak{Z}_G. \tag{3}$$

Si $y = 1$, on a $\xi_1\theta_1\xi_2 z\theta_2 = \xi_3^2 z\theta_3^2$ ou $\xi_3^{-2}\xi_1\theta_1\xi_2 z = z\theta_3^2\theta_2^{-1}$, donc

$$\theta_3^2\theta_2^{-1}\in\mathfrak{Z}_G. \tag{4}$$

Si ces deux conditions sont vérifiées, (2) devient

$$\xi_3^{-1}\xi_1 y\theta_1\xi_2 z = y\xi_3 z\theta_3^2\theta_2^{-1}$$

ou, d'après (3) et (4), $y\xi_3^{-1}\xi_1\theta_1\xi_2 z = y\xi_3\theta_3^2\theta_2^{-1}z$, ou

$$\xi_1\theta_1\xi_2\theta_2 = \xi_3^2\theta_3^2, \tag{5}$$

seule condition à satisfaire, avec (3) et (4). Si c et g sont deux éléments centraux quelconques, pris respectivement dans K et T, alors (3) et (4) expriment que

$$\xi_3 = \xi_1 c^{-1}, \tag{6}$$

$$\theta_3^2 = g\theta_2 \tag{7}$$

et (5) devient $\xi_1\theta_1\xi_2\theta_2 = \xi_1 c^{-1}\xi_1 c^{-1}g\theta_2$, ou, en cancellant par ξ_1 et θ_2 et permutant les éléments centraux c et g, $\theta_1\xi_2 = \xi_1 g c^{-2}$ ou

$$\xi_1^{-1}\theta_1\xi_2 = gc^{-2}\in\mathfrak{Z}_G. \tag{8}$$

Cette condition d'appartenance au centre devant avoir lieu $\forall\xi_1$, θ_1, ξ_2, on en conclut, en choisissant deux des trois facteurs dans $\mathfrak{Z}_G$, que le troisième est toujours dans $\mathfrak{Z}_G$, donc K et $T\subseteq\mathfrak{Z}_G$. Les conditions (3) et (4) sont alors nécessairement vérifiées et il reste seulement (5). Celle-ci peut recevoir la forme $\xi_3^{-2}\xi_1\xi_2 = \theta_3^2\theta_1^{-1}\theta_2^{-1}\in K\cap T = I$. Cette intersection n'est jamais vide et si e est un élément arbitraire de I, on aura

$$\theta_3^2 = e\theta_1\theta_2, \qquad \xi_3^2 = e^{-1}\xi_1\xi_2.$$

Pour que ces équations aient des solutions, il faut et il suffit que K et T soient diagonaux.

5. *Dans un système (G, K, T) muni de la loi $(\cdot)$, (1), chaque $E(\varphi)$ est idempotent par rapport à $(\cdot)$.*

Preuve. Il est facile de voir, en effet, que tous les groupoïdes $E(\varphi)$ du système, à cause de la condition $\theta\in\mathfrak{Z}_G$, sont alors des groupes [4]. Donc, en vertu du N° 2, tous les φ_i sont idempotents par rapport à $(\cdot)$.

6. (i) *Aucun système $S(G, K, T)$ ne peut être un semigroupe par rapport à la loi* $(\cdot)$.

(ii) *Tout système $S(\cdot)$ satisfait à l'identité de Bol-Schröder* ([3], N° 2, équ. 8, p. 153) *et est abélien par rapport à* $(\cdot)$.

Preuve. Si la loi $(\cdot)$ est associative sur (G, K, T), on aura $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)\cdot\varphi_4 = \varphi_5$, $\varphi_1\cdot\varphi_2 = \varphi_3$, $\varphi_1\cdot(\varphi_2\cdot\varphi_4) = \varphi_7$, $\varphi_2\cdot\varphi_4 = \varphi_6$ et $\varphi_5 = \varphi_7$, avec

$$\xi_3^2\theta_3^2 = \xi_1\theta_1\xi_2\theta_2, \quad \xi_5^2\theta_5^2 = \xi_3\theta_3\xi_4\theta_4,$$
$$\xi_6^2\theta_6^2 = \xi_2\theta_2\xi_4\theta_4, \quad \xi_7^2\theta_7^2 = \xi_1\theta_1\xi_6\theta_6.$$

Une élimination facile conduit à

$$\xi_1\theta_1\xi_2\theta_2\xi_4^2\theta_4^2 = \xi_1^2\theta_1^2\xi_2\theta_2\xi_4\theta_4$$

et, par cancellation, $\xi_4\theta_4 = \xi_1\theta_1$. On a donc

$$x\varphi_1 y = x\xi_1 y\theta_1 = xy\xi_1\theta_1 = xy\xi_4\theta_4 = x\xi_4 y\theta_4 = x\varphi_4 y,$$

d'où $\varphi_1 = \varphi_4$. Ainsi l'identité $(\varphi_1\cdot\varphi_2)\cdot\varphi_4 = \varphi_1(\varphi_2\cdot\varphi_4)$ n'est vérifiée que si $\varphi_1 = \varphi_4$. Elle n'a donc pas lieu $\forall\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ et $S(\cdot)$ n'est pas un semigroupe.

(ii) Par contre, l'identité de Bol-Schröder $(\varphi_1\cdot\varphi_2)\cdot\varphi_1 = \varphi_1\cdot(\varphi_2\cdot\varphi_1)$ est toujours vérifiée. Elle résulte d'ailleurs immédiatement de la commutativité de $S(\cdot)$. On a

$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\xi_1 y\theta_1\xi_2 z\theta_2 = xyz\xi_1\xi_2\theta_1\theta_2,$$

$$(x\varphi_2 y)\varphi_1 z = x\xi_2 y\theta_2\xi_1 z\theta_1 = xyz\xi_1\xi_2\theta_1\theta_2,$$

c'est-à-dire $\varphi_1\cdot\varphi_2 = \varphi_2\cdot\varphi_1$.

7. *La relation $K \cap T = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour que*

(i) (G, K, T) *soit idempotent,*

(ii) (G, K, T) *soit cancellable.*

Preuve. (i) Si $\varphi_1\cdot\varphi_1 = \varphi_2$, on aura $\xi_1\theta_1\xi_1\theta_1 = \xi_2^2\theta_2^2$ ou $\xi_1^2\xi_2^{-2} = \theta_2^2\theta_1^{-2} = f\epsilon K \cap T$. Donc $\xi_1^2 = f\xi_2^2$, $\theta_1^2 = f^{-1}\theta_2^2$. Si $K \cap T = 1$, $f = 1$ et $\xi_1^2 = \xi_2^2$, $\theta_1^2 = \theta_2^2$. Comme K et T sont diagonaux, $\xi_1 = \xi_2$, $\theta_1 = \theta_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$. Ainsi (G, K, T) est idempotent par rapport à $(\cdot)$. Réciproquement, si le système est idempotent, $\xi_1^2 = \xi_2^2$ et $\theta_1^2 = \theta_2^2$; mais $\xi_1^2 = f\xi_2^2$, $\theta_1^2 = f^{-1}\theta_2^2$, donc $f = 1$. Tout élément $f\epsilon K \cap T$ est neutre, donc $K \cap T = 1$.

(ii) Soit $\varphi_1\cdot\varphi_2 = \varphi_1\cdot\varphi_3$, donc $\xi_1\theta_1\xi_2\theta_2 = \xi_1\theta_1\xi_3\theta_3$ et $\xi_2\theta_2 = \xi_3\theta_3$, d'où $\xi_2\xi_3^{-1} = \theta_3\theta_2^{-1} = f\epsilon K \cap T$. Si (G, K, T) est cancellable, $\varphi_2 = \varphi_3$, $\xi_2 = \xi_3$, $\theta_2 = \theta_3$ et $\xi_2\xi_3^{-1} = \theta_3\theta_2^{-1} = 1 = f$.

Si $f = 1$, on a $\xi_2 = \xi_3$, $\theta_2 = \theta_3$, $\varphi_2 = \varphi_3$ et le système est cancellable.

TRAVAUX CITÉS

[1] K. Drbohlav, *Gruppenartige Multigruppen*, Czechoslovak Mathematical Journal 7 (82) (1957), p. 183-190.

[2] A. Sade, *Contribution à l'étude des quasigroupes*, Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris 237 (1953), p. 420-422.

[3] — *Quasigroupes obéissant à certaines lois*, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mecmuasi, Série A, 22 (1957), p. 151-184.

[4] — *Théorie des systèmes demosiens de groupoïdes*, Pacific Journal of Mathematics 10 (1960), sous presse.

[5] — *Groupoïdes en relation associative et semigroupes mutuellement associatifs*, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 7 (1961).

[6] G. Thierrin, *Sur une classe de demi-groupes inversifs*, Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris 234 (1952), p. 177-179.

Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1959