COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

SUR LES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR D'UNE FONCTION INVERSE

PAR

A. B. TUROWICZ OSB (TYNIEC)

1. Il paraît surprenant que la formule explicite pour calculer la dérivée d'ordre n de la fonction inverse d'une fonction donnée d'une variable ne soit pas encore connue. Pourtant nous n'avons pas pu la trouver ni dans les manuels d'Analyse, ni dans les recueils de formules. Nous croyons donc utile de publier une formule probablement inconnue. Nous l'avons établie à l'aide d'un théorème démontré en 1793 par H. A. Rothe (1). Ce théorème étant peu connu, nous en donnerons une démonstration par induction, qui n'exige pas du lecteur de connaissances spéciales.

2. Soit $x = g(y)$ la fonction inverse d'une fonction $y = f(x)$. Nous supposerons que les dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ existent et que $y' \neq 0$. On sait que:

$$\frac{d^n g}{dy^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{P_n}{(y')^{2n-1}}, \tag{1}$$

où P_n est un polynome en $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ qu'on peut calculer de proche en proche à l'aide des égalités

$$P_1 = 1, \quad P_{k+1} = (2k-1)\cdot y''\cdot P_k - y'\cdot P_k'. \tag{2}$$

Soit

$$P_n = \sum A_n(i_1, \ldots, i_n)(y')^{i_1} \ldots (y^{(n)})^{i_n}. \tag{3}$$

La formule (2) implique pour $n \geqslant 2$ que P_n n'a qu'un seul terme contenant $y^{(n)}$ et ce terme est $(-1)^n \cdot (y')^{n-2} \cdot y^{(n)}$. Il n'y a donc que deux éventualités:

$$\begin{cases} \text{a) } i_n = 1 \text{ et alors } A_n(i_1, \ldots, i_n) = A_n(n-2, 0, \ldots, 0, 1) = (-1)^n, \\ \text{b) } i_n = 0 \text{ et alors } A_n(i_1, \ldots, i_n) = A_n(i_1, \ldots, i_{n-1}, 0). \end{cases} \tag{4}$$

(1) Cf. E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901, p. 239-242.

Nous établirons une formule de récurrence pour les coefficients $A_n(i_1, \ldots, i_n)$. Ces coefficients sont définis pour les suites finies des indices $i_1, \ldots, i_n$, entiers, non négatifs. Si un des indices $i_1, \ldots, i_n$ est un entier négatif nous mettrons par définition $A_n(i_1, \ldots, i_n) = 0$.

D'après (2) on obtient le terme contenant le produit $(y')^{i_1}\cdot(y'')^{i_2}\ldots \ldots(y^{(n-1)})^{i_{n-1}}\cdot(y^{(n)})^0$ par une des opérations suivantes:

1° en multipliant par $(2n-3)y''$ le terme $A_{n-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{n-1})\cdot \cdot(y')^{i_1}\cdot(y'')^{i_2-1}\ldots(y^{(n-1)})^{i_{n-1}}$;

2° en multipliant par $(-y')$ la dérivée des termes qui correspondent aux suites des indices:

$$\{i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{n-1}\}, \quad \{i_1-1, i_2+1, i_3-1, \ldots, i_{n-1}\},$$
$$\{i_1-1, i_2, i_3+1, i_4-1, \ldots, i_{n-1}\}, \quad \ldots, \quad \{i_1-1, i_2, \ldots, i_{n-2}+1, i_{n-1}-1\}.$$

Nous avons donc la formule:

$$(5)\quad \begin{aligned} A_n(i_1, \ldots, i_{n-1}, 0) = {} & (2n-3)A_{n-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{n-1}) - \\ & - i_1 A_{n-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{n-1}) - \\ & - (i_2+1)A_{n-1}(i_1-1, i_2+1, i_3-1, i_4, \ldots, i_{n-1}) - \\ & - \ldots - (i_{n-2}+1)A_{n-1}(i_1-1, i_2, \ldots, i_{n-2}+1, i_{n-1}-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(i_1, \ldots, i_{n-1}, 0) = {} & (2n-3-i_1)A_{n-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{n-1}) - \\ & - \sum_{k=2}^{n-2}(i_k+1)A_{n-1}(i_1-1, i_2, \ldots, i_k+1, i_{k+1}-1, \ldots, i_{n-1}). \end{aligned}$$

Pour $i_n = 1$ la formule (5) devient d'après (4):

$$A_n(n-2, 0, \ldots, 0, 1) = -A_{n-1}(n-3, 0, \ldots, 0, 1).$$

3. Nous désignerons par Z_n pour $n \geqslant 2$ l'ensemble des suites finies à n termes des nombres entiers non négatifs $\{i_1, \ldots, i_n\}$ qui satisfont aux conditions

$$(6)\qquad \sum_{k=2}^{n}(k-1)i_k = n-1, \qquad i_1 = n-1-\sum_{k=2}^{n} i_k.$$

Z_1 sera l'ensemble composé du seul nombre 0: $Z_1 = \{0\}$. Nous avons par exemple: $Z_2 = (\{0, 1\})$, $Z_3 = (\{1, 0, 1\}, \{0, 2, 0\})$.

Nous démontrerons que la sommation dans la formule (3) s'étend à l'ensemble Z_n.

Nous procédons par induction. On vérifie facilement notre proposition pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n = s$. Pour calculer P_{s+1} on effectue les opérations suivantes:

1° on multiplie P_s par $(2s-1)y''$; cela augmente i_2 de 1 tandis que $i_1, i_3, \ldots, i_s$ ne changent pas; on a

$$i_2+1+\sum_{k=3}^{s}(k-1)i_k = 1+\sum_{k=2}^{s}(k-1)i_k = 1+s-1 = s,$$

$$s-\Big(i_2+1+\sum_{k=3}^{s} i_k\Big) = s-1-\sum_{k=2}^{s} i_k = i_1;$$

2° on dérive P_s, ce qui fait remplacer i_p par i_p-1 et i_{p+1} par $i_{p+1}+1$, et l'on multiplie par $(-y')$, ce qui augmente i_1 de 1; on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{p-1}(k-1)i_k + (p-1)(i_p-1) + p(i_{p+1}+1) + \sum_{k=p+2}^{s}(k-1)i_k \\ = \sum_{k=2}^{s}(k-1)i_k - p+1+p = s-1+1 = s; \end{aligned}$$

$$s-\sum_{k=2}^{p-1} i_k - (i_p-1) - (i_{p+1}+1) - \sum_{k=p+2}^{s} i_k = s-\sum_{k=2}^{s} i_k = i_1+1.$$

Nous voyons donc que si les termes de P_s correspondent aux suites de l'ensemble Z_s, les suites correspondantes aux termes de P_{s+1} appartiennent à Z_{s+1}.

4. Nous démontrerons maintenant la formule:

$$(7)\qquad A_n(i_1, \ldots, i_n) = \frac{(2n-2-i_1)!(-1)^{i_1}}{i_2!\,i_3!\ldots i_n!}\cdot\frac{1}{(1!)^{i_1}\cdot(2!)^{i_2}\ldots(n!)^{i_n}}.$$

La formule est évidemment vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ (pour $n = 1$ il faut mettre 0 au lieu de tous les i_k). On voit aussi qu'elle est vraie si $i_n = 1$; en effet, on a d'après (4)

$$\frac{(2n-2-n+2)!(-1)^{n-2}}{0!\ldots 0!\cdot 1!}\cdot\frac{1}{(1!)^{n-2}\cdot(2!)^0\ldots[(n-1)!]^0!(n!)^1}$$
$$= \frac{n!(-1)^n}{n!} = (-1)^n = A_n(n-2, 0, \ldots, 0, 1).$$

Dans le cas $i_n = 0$ nous procédons par induction, et supposons que (7) soit vrai pour $n = s-1$.

Alors

$$A_s(i_1, \ldots, i_{s-1}, 0)$$
$$= (2s-3-i_1)A_{s-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{s-1})-$$
$$-\sum_{k=2}^{s-2}(i_k+1)A_{s-1}(i_1-1, i_2, \ldots, i_k+1, i_{k+1}-1, \ldots, i_{s-1})$$
$$= (2s-3-i_1)\frac{(2s-4-i_1)!(-1)^{i_1}\cdot i_2\cdot 2}{i_2!i_3!, \ldots, i_{s-1}!\cdot(2!)^{i_2}\cdot(3!)^{i_3}\ldots[(s-1)!]^{i_{s-1}}}-$$
$$-\sum_{k=2}^{s-1}(i_k+1)\frac{(2s-4-i_1+1)!\cdot(-1)^{i_1-1}\cdot i_{k+1}(k+1)!}{i_2!\ldots i_{s-1}!(2!)^{i_2}\ldots[(s-1)!]^{i_{s-1}}\cdot(i_k+1)\cdot k!}$$
$$= \frac{(2s-3-i_1)!\cdot(-1)^{i_1}}{i_2!\ldots i_{s-1}!(2!)^{i_2}\ldots[(s-1)!]^{i_{s-1}}}\left[2i_2+\sum_{k=2}^{s-2}(k+1)i_{k+1}\right]$$
$$= \frac{(2s-3-i_1)!\cdot(-1)^{i_1}}{i_2!\ldots i_{s-1}!(2!)^{i_2}\ldots[(s-1)!]^{i_{s-1}}}\cdot\sum_{k=2}^{s-1}ki_k.$$

Les formules (6) donnent pour $A_{s-1}(i_1, i_2-1, i_3, \ldots, i_{s-1})$:

$$\begin{aligned} i_1 &= s-2-(i_2-1)-\sum_{k=3}^{s-1}i_k = s-1-\sum_{k=2}^{s-1}i_k, \\ 1\cdot(i_2-1)&+\sum_{k=3}^{s-1}(k-1)i_k = s-2; \end{aligned} \tag{8}$$

$$0 = s-1-\sum_{k=2}^{s-1}(k-1)i_k. \tag{9}$$

En ajoutant (8) et (9) on trouve $i_1 = 2s-2-\sum_{k=2}^{s-1}ki_k$ donc $\sum_{k=2}^{s-1}ki_k = 2s-2-i_1$.

Puisque $i_s = 0$, donc $i_s! = 1$ et on a:

$$A_s(i_1, \ldots, i_{s-1}, 0) = \frac{(2s-2-i_1)!(-1)^{i_1}}{i_2!\ldots i_s!\cdot(2!)^{i_2}\ldots(s!)^{i_s}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Nous pouvons résumer les résultats obtenus comme il suit: Si $x = g(y)$ est la fonction inverse d'une fonction $y = f(x)$ et Z_n

est l'ensemble des suites $\{i_1, \ldots, i_n\}$ satisfaisant aux conditions (6), la dérivée d'ordre n de $g(y)$ est donnée par la formule

$$\frac{d^n g}{dy^n} = \sum_{Z_n}\frac{(2n-2-i_1)!(-1)^{n-1+i_1}}{i_2!\ldots i_n!(y')^{2n-1}}\cdot\left(\frac{y'}{1!}\right)^{i_1}\cdot\left(\frac{y''}{2!}\right)^{i_2}\ldots\left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}$$
$$= \sum_{Z_n}\frac{(2n-2-i_1)!(-1)^{n-1+i_1}}{(y')^{2n-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}i_k!}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{y^{(k)}}{k!}\right)^{i_k}$$

à condition que $y' \neq 0$.

La formule reste vraie pour $n = 1$, si l'on remplace tous les i_k par 0.

Reçu par la Rédaction le 30. 10. 1958