COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

REMARQUES SUR LA SUPERPOSITION DE DEUX FONCTIONS RÉELLES

PAR

S. MARCUS (BUCAREST)

1. H. Steinhaus a posé en 1954 le problème suivant [4]: $f(x)$ est continue sur $\langle 0,1\rangle$ et non dérivable en tout point de $\langle 0,1\rangle$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. $g(x)$ possède les mêmes propriétés que $f(x)$. Alors, est-il possible que $h(x)=g\big(f(x)\big)$ possède une dérivée continue sur $\langle 0,1\rangle$?

Nous allons donner deux théorèmes dont chacun contient comme cas particulier la solution négative du problème ci-dessus. On verra que la réponse est négative, même si $g(x)$ est une fonction non constante arbitraire et même si l'on n'exige pas la continuité de la dérivée de $h(x)=g\big(f(x)\big)$, mais seulement son existence*.

THÉORÈME 1. *Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur $\langle 0,1\rangle$, jouissant de la propriété de Darboux et telle que ses points de non dérivabilité forment un ensemble de mesure positive dans chaque sous-intervalle de $\langle 0,1\rangle$. Soit $g(x)$ une fonction réelle, définie et non constante sur un intervalle $\langle a,b\rangle\subset f(\langle 0,1\rangle)$. Alors $h(x)$ ne peut pas avoir de dérivée continue sur $\langle 0,1\rangle$.*

Démonstration. Supposons le contraire. La dérivée $h'(x)$ ne peut pas être partout nulle, car $h(x)$ serait alors constante et, par suite, la fonction $g(x)$ serait aussi constante, contrairement à l'hypothèse. Soit donc ξ, $0<\xi<1$, tel que $h'(\xi)\neq 0$. Supposons qu'on ait $h'(\xi)>0$. Il existe alors un intervalle (α,β) tel que $0<\alpha<\xi<\beta<1$ et encore tel que $h'(x)>0$ pour chaque $x\in(\alpha,\beta)$. La fonction $h(x)$ est donc croissante sur (α,β). (Si l'on avait $h'(\xi)<0$, alors $h(x)$ serait décroissante sur (α,β), donc en tout cas strictement monotone.)

D'après l'hypothèse et en vertu du théorème de Lebesgue relatif à la dérivabilité presque partout des fonctions monotones, $f(x)$ n'est monotone dans aucun sous-intervalle de $\langle 0,1\rangle$ donc, en particulier, elle

* J'exprime ma reconnaissance à M. le Professeur S. Hartman, dont les remarques ont permis d'améliorer la rédaction de la présente note.

n'est pas monotone sur (α, β). Mais on sait qu'une fonction qui n'est constante dans aucun intervalle et jouit de la propriété de Darboux est monotone si et seulement si elle prend chacune de ses valeurs une seule fois. Il existe donc deux valeurs x et y telles que $\alpha < x < y < \beta$ et $f(x) = f(y)$. Mais alors on a aussi $h(x) = h(y)$, en contradiction avec la monotonie stricte de $h(x)$ sur (α, β).

Remarque. Le théorème 1 cesse d'être vrai si l'on supprime la condition que $f(x)$ jouisse de la propriété de Darboux. En effet, considérons l'exemple suivant, communiqué à l'auteur par E. Marczewski (voir aussi [2]). Désignons par ω_c le plus petit ordinal qui correspond à la puissance du continu. Soit $S = \{b_\xi\}$ $(\xi < \omega_c)$ une base de Hamel. Pour chaque x réel posons

$$f(x) = r_0 b_1 + r_1 b_0 + \sum_{2 \leqslant \xi < \omega_c} r_\xi b_\xi,$$

où $x = \sum r_\xi b_\xi$ (r_ξ rationnel) est la représentation de x à l'aide de la base S. Pour chaque y réel l'équation $f(x) = y$ a une seule solution en x. La fonction $f(x)$, étant une solution discontinue de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, est non dérivable en chaque point. Prenons pour $g(x)$ la fonction inverse de $f(x)$, dont l'existence est assurée par la biunivocité de $f(x)$. On a $h(x) = x$ pour chaque x, donc $h'(x)$, étant constante, est continue.

2. On dit qu'une *fonction jouit de la propriété* T_1 *de Banach* si les valeurs qu'elle prend une infinité de fois forment un ensemble de mesure nulle.

LEMME. *Soit $f(x)$ une fonction réelle non constante et jouissant de la propriété de Darboux sur $\langle 0, 1\rangle$. Soit $g(x)$ une fonction réelle définie et n'ayant pas la propriété T_1 de Banach sur un intervalle $\langle a, b\rangle \subset f(\langle 0, 1\rangle)$. Alors $h(x)$ n'a pas, sur $\langle 0, 1\rangle$, la propriété T_1.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que chaque valeur prise par $g(x)$ une infinité de fois sur $\langle a, b\rangle$ est prise par $h(x)$ une infinité de fois sur $\langle 0, 1\rangle$.

Remarque. En utilisant une fonction pareille à celle utilisée dans la remarque précédente on constate que le lemme ci-dessus cesse d'être vrai si l'on supprime la condition que $f(x)$ jouisse de la propriété de Darboux.

THÉORÈME 2. *Si $f(x)$ est continue et non constante sur $\langle 0, 1\rangle$ et si $g(x)$ est continue et non dérivable en chaque point de $\langle a, b\rangle = f(\langle 0, 1\rangle)$, alors $h(x)$ admet des points de non dérivabilité et n'est pas à variation bornée sur $\langle 0, 1\rangle$.*

Démonstration. D'après un théorème de S. Saks [3], une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue jouisse de la propriété T_1 est que les valeurs qu'elle prend aux points où elle n'admet pas de dérivée (finie ou infinie) forment un ensemble de mesure nulle. Supposons que $h(x)$ soit dérivable sur $\langle 0, 1\rangle$. Elle jouit alors, en vertu du théorème de Saks, de la propriété T_1. Mais, d'après le même théorème de Saks, $g(x)$ est dépourvue de la propriété T_1. On arrive ainsi à une contradiction avec le lemme ci-dessus. Donc $h(x)$ admet des points de non dérivabilité.

$h(x)$ est continue. Désignons par $N(t)$ le nombre des points x tels que $h(x) = t$. Si $h(x)$ était à variation bornée sur $\langle 0, 1\rangle$, alors, d'après un théorème de S. Banach [1], $N(t)$ serait sommable, donc presque partout finie sur l'intervalle $h(\langle 0, 1\rangle)$. Mais dans ce cas $h(x)$ jouirait de la propriété T_1, donc, en vertu du lemme, $g(x)$ jouirait aussi de la propriété T_1. Mais, comme on a remarqué ci-dessus, $g(x)$ est dépourvue de la propriété T_1. La contradiction obtenue montre que $h(x)$ n'est pas à variation bornée.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 225-236.

[2] E. Marczewski, *Remarques sur les fonctions de Hamel*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 249-250.

[3] S. Saks, *Sur certaines classes de fonctions continues*, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), p. 129-131.

[4] H. Steinhaus, *Problem 258*, The New Scottish Book, Wrocław 1946-1958, p. 28.

Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1958