valle $\langle 0, 1\rangle$ on a évidemment $d\psi/dx \geqslant 0$. Posons $\omega = \sup(\xi, \eta)$. En vertu de (10), (17), (18) et (5) nous avons

$$\Theta(1) = \int_0^1 \int_0^1 f(xs)\,ds\,\psi'(x)\,dx \leqslant \int_\omega^1 \int_0^1 f(xs)\,ds\,\psi'(x)\,dx < 0,$$

en contradiction avec (11). Ainsi, en supposant pour $t_0 = 1$ l'inégalité $t^{-1}g(t) \leqslant 0$ vérifiée pour tout t, nous avons été amenés à une contradiction. Par conséquent la fonction $t^{-1}g(t)$ admet dans l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ un maximum positif. Posons $f^*(x) = -f(x)$. La fonction $g^*(x) = -g(x)$ qui correspond à la fonction $f^*(x)$ admet dans l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ un maximum négatif. Comme nous l'avons montré, la fonction $f^*(x)$ est alors identiquement nulle et il en est de même de la fonction $f(x)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.

[2] S. Gołąb, **P 40**, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 240-241.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

UNE REMARQUE SUR LA PROPRIÉTÉ DE WEIERSTRASS

PAR

H. FAST (WROCŁAW)

Nous disons qu'une fonction réelle $f(x)$, définie sur la droite entière ou dans un intervalle, *satisfait à la condition* W (1) ($f(x) \in W$), si l'ensemble des valeurs admises par $f(x)$ dans un intervalle quelconque (x', x'') contient tous les nombres entre $f(x')$ et $f(x'')$.

Soit $F(x, y)$ une fonction réelle arbitraire définie sur le plan entier. Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Il existe une fonction réelle $u(x)$ définie sur la droite entière telle que la fonction $F(x, y_0)+u(x)$ satisfait à la condition W pour chaque y_0 fixé.*

Démonstration. Définissons deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ de la manière suivante: pour un nombre x dont la partie fractionnelle $x-[x]$ a un développement dyadique de la forme

$$(1)\qquad 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_k 0\overbrace{11\ldots 1}^{m}0\overbrace{11\ldots 1}^{n}0\overbrace{11\ldots 1}^{p}0\overbrace{11\ldots 1}^{q}0 b_0 0 b_1 0 b_2 0 b_3 0 \ldots$$
$$(a_i, b_i = 0, 1;\ q \geqslant 2;\ k, m, n, p \geqslant 0)$$

posons

$$g(x)-(m-n) = 0, b_1 b_3 b_5 b_7 \ldots,$$
$$h(x)-(p-q) = 0, b_0 b_2 b_4 b_6 \ldots$$

Pour les autres valeurs de x posons $g(x) = h(x) = 0$. Ainsi, les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont bien déterminées, puisque, évidemment, le développement (1) détermine d'une manière unique la suite $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ et les nombres m, n, p, q.

LEMME. *Pour tout nombre y et pour tout intervalle (x_1, x_2) l'ensemble $h(g^{-1}(y) \cap (x_1, x_2))$ contient tous les nombres réels.*

(1) dite *propriété de Weierstrass* ou *propriété de Darboux*.

En effet, des nombres y et z étant donnés arbitrairement, soient

$$(2) \qquad y-[y]=0,b_1b_3b_5\ldots \quad \text{et} \quad z-[z]=0,b_2b_4b_6\ldots$$

les développements dyadiques (qui peuvent être finis) de leurs parties fractionnelles.

Soient

$$(3) \qquad 0,a_0a_1\ldots a_k000\ldots \quad \text{et} \quad 0,a_0a_1\ldots a_k1000\ldots \quad (a_i=0,1)$$

deux nombres de l'intervalle $(x_1+r, x_2+r)\frown(0,1)$ où r est un nombre entier convenable. Désignons par m, n, p et q des entiers positifs pour lesquels

$$(4) \qquad [y]=m-n, \quad [z]=p-q$$

et par x le nombre dont le développement est de la forme (1), où a_i, b_i, m,n,p et q sont donnés par (2)-(4). Nous avons alors $x-r\epsilon(x_1,x_2)$, $g(x)=y$, $h(z)=z$, d'où la conclusion du lemme.

Définissons la fonction $u(x)$ par la formule suivante:

$$u(x)=h(x)-F\big(x,g(x)\big).$$

Pour tout y réel nous avons

$$(5) \qquad F(x,y)+u(x)=h(x) \quad \text{pour} \quad x\epsilon g^{-1}(y).$$

Du lemme et de (5) nous déduisons que pour tout y fixé la fonction $F(x,y)+u(x)$ de la variable x prend toutes les valeurs réelles sur chaque intervalle, donc elle satisfait à la condition W, c. q. f. d.

Les deux corollaires suivants résultent de notre théorème, si la fonction $F(x,y)$ est choisie d'une manière convenable.

1. Soit $f(x)$ une fonction arbitraire d'une variable réelle définie sur la droite entière. Posons

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad y\neq 0,\\ 0 & \text{pour} \quad y=0.\end{cases}$$

Notre théorème entraîne dans ce cas que $f(x)+u(x)\epsilon W$ et en posant $y=0$, que $u(x)\epsilon W$, d'où $-u(x)\epsilon W$. Ainsi, *toute fonction $f(x)$ est la somme de deux fonctions $(f(x)+u(x)$ et $-u(x))$ satisfaisant à la condition W.* Ce théorème, publié sans démonstration par A. Lindenbaum, a été aussi démontré par Sierpiński [2].

[2] W. **Sierpiński**, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques*, Le Matematiche 8 (1953), p. 1-6.

2. Soit encore $f(x)$ une fonction réelle arbitraire définie sur la droite entière. Soit maintenant

$$F(x,y)=\begin{cases} (n-1)\cdot f(x) \ \text{pour} \ y=n \ (n=1,2,\ldots),\\ \text{arbitraire si } y \text{ n'est pas un entier positif.}\end{cases}$$

En vertu du théorème (p. 75) il existe une fonction $u(x)$ telle que $(n-1)\cdot f(x)+u(x)\epsilon W$ $(n=1,2,\ldots)$, d'où l'on déduit, en divisant par n, que

$$f_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot f(x)+\frac{1}{n}\cdot u(x)\epsilon W \qquad (n=1,2,\ldots).$$

En faisant tendre n vers l'infini nous avons $f(x)=\lim\limits_n f_n(x)$, c'est-à-dire: *une fonction réelle arbitraire est la limite d'une suite de fonctions ayant la propriété W.*

C'est la réponse affirmative à une question que m'a posée S. Hartman [3].

[3] Sierpiński a signalé cette réponse sans démonstration (voir [2]).

Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1958