COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

SUR UNE INTÉGRALE

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et supposons la fonction $F(t) = \int_0^{\pi/2} f(t\sin u)du$ nulle pour tout t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. Comme l'a montré E. J. Mc Shane ([1], p. 138), il résulte de ces hypothèses que l'on a identiquement $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. S. Gołąb [2], a posé la question suivante: le résultat de E. J. Mc Shane peut-il être généralisé en remplaçant la fonction $\sin u$ $(0 \leqslant u \leqslant \pi/2)$ par une fonction croissante arbitraire $\varphi(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b, \varphi(a) = 0, \varphi(b) = 1)$? Je vais montrer que la réponse est négative, même si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la fonction $\varphi(u)$ soit continue (théorème 1). Ce fait suggère le problème suivant: quelles sont les hypothèses qu'il faut faire sur les fonctions $f(x)$ et $\varphi(u)$ pour que l'identité

$$F(t) = \int_a^b f[t\varphi(u)]du = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{1}$$

$(f(x)$ continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi(u)$ croissante, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1)$ entraîne l'identité

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{2}$$

Je vais donner des conditions suffisantes pour que (1) implique (2) (théorèmes 2 et 3) et formuler un problème ouvert. La démonstration du théorème 3 suit celle que Mc Shane a utilisée pour la fonction $\sin u$, elle est pourtant un peu plus générale et comble une lacune dans la démonstration de Mc Shane qui avait laissé de côté le cas où $t_0 = 1$.

THÉORÈME 1. *Il existe des fonctions $f(x)$ continues et définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, ne s'annulant pas identiquement, et une fonction $\varphi(u)$ continue,* *croissante et définie pour* $0 \leqslant u \leqslant 1$, *telles que* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ *et*

$$F(t) = \int_0^1 f[t\varphi(u)]du = 0$$

pour tout t *de l'intervalle* $\langle 0, 1\rangle$.

Démonstration. Je définis la fonction $f(x)$ pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ de telle manière qu'elle soit continue, non nulle en un point au moins, et que $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}f(1)$. Pour $2^{-n} \leqslant x < 2^{1-n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ je définis $f(x)$ par la formule de récurrence

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}f(2x). \tag{3}$$

Enfin, j'admets $f(0) = 0$. La fonction ainsi définie est continue dans tout l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ et elle n'y est pas identiquement nulle.

Je définis ensuite la fonction $\varphi(u)$. Soit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2^{-n}) = 2^{-2n}$, $\varphi(2^{-n}3^{-1}5) = 2^{1-2n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dans les intervalles $\langle 2^{-n}, 2^{-n}3^{-1}5\rangle$ et $\langle 2^{-n}3^{-1}5, 2^{1-n}\rangle$ je définis $\varphi(u)$ comme fonction linéaire, soit

$$\varphi(u) = 2^{-n-1}3u - 2^{-2n-1} \quad \text{pour} \quad u \in \langle 2^{-n}, 2^{-n}3^{-1}5\rangle,$$

$$\varphi(u) = 2^{1-n}3u - 2^{3-2n} \quad \text{pour} \quad u \in \langle 2^{-n}3^{-1}5, 2^{1-n}\rangle.$$

La fonction ainsi définie est continue et croissante dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$.

Calculons l'intégrale

$$I_{n,1} = \int_{2^{-n}}^{2^{-n}3^{-1}5} f[t\varphi(u)]du = \int_{2^{-n}}^{2^{-n}3^{-1}5} f(2^{-n-1}3tu - 2^{-2n-1}t)\,du.$$

En faisant la substitution $u = 2^n3^{-1}t^{-1}s + 2^{-n}3^{-1}$ nous aurons

$$I_{n,1} = 2^n3^{-1}t^{-1}\int_{2^{-2n+1}t}^{2^{-2n+2}t} f(2^{-1}s)\,ds.$$

En tenant compte de (3) nous obtenons

$$I_{n,1} = -2^{n-1}3^{-1}t^{-1}\int_{2^{-2n+1}t}^{2^{-2n+2}t} f(s)\,ds.$$

En calculant l'intégrale

$$I_{n,2} = \int_{2^{-n}3^{-1}5}^{2^{1-n}} f[t\varphi(u)]du = \int_{2^{-n}3^{-1}5}^{2^{1-n}} f(2^{1-n}3tu - 2^{3-2n}t)\,du$$

à l'aide de la substitution $u = 2^{n-1}3^{-1}t^{-1}s + 2^{2-n}3^{-1}$ nous aurons $I_{n,2} = -I_{n,1}$. Puisque

$$\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f[t\varphi(u)]du = I_{n,1} + I_{n,2} = 0,$$

on a

$$\int_0^1 f[t\varphi(u)]du = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f[t\varphi(u)]du = 0.$$

Remarquons que les fonctions définis dans la démonstration du théorème 1 sont, dans une forte mesure, arbitraires. En particulier, elles peuvent être différentiables dans l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. Il suffit pour cela de définir $f(x)$ dans l'intervalle $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$ de telle manière qu'elle soit différentiable dans l'intérieur de cet intervalle et qu'aux extrémités de l'intervalle ses dérivées à droite et à gauche soient nulles. Au point 0 les fonctions $f(x)$ considérées dans le théorème 1 n'ont pas de dérivée à droite. En rapport avec ce fait le problème suivant reste ouvert:

P 280. Supposons que la fonction $f(x)$, définie et continue dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, possède au point 0 une dérivée à droite. L'identité (1) entraîne-t-elle pour de telles fonctions l'identité (2)?

Une réponse affirmative à cette question est donnée dans un cas particulier par le théorème 2.

En vertu du lemme suivant, le point 0 est un point d'accumulation des zéros de la fonction $f(x)$. Si donc la fonction $f(x)$ a au point 0 une dérivée à droite, celle-ci est nulle.

Lemme. *Soit* $f(x)$ *une fonction définie et continue dans l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *et* $\varphi(u)$ *une fonction croissante dans l'intervalle* $a \leqslant u \leqslant b$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, *et supposons l'identité* (1) *vérifiée par ces fonctions. Le point* 0 *est alors un zéro de la fonction* $f(x)$ *et un point d'accumulation à droite des zéros de cette fonction.*

Démonstration. Supposons que 0 ne soit pas un point d'accumulation à droite des zéros de la fonction $f(x)$. Il existe donc un point x_1 $(0 < x_1 \leqslant 1)$, tel que dans l'intervalle $0 < x \leqslant x_1$ il n'existe pas de zéros. Puisque la fonction $f(x)$ est continue, les valeurs qu'elle admet dans cet intervalle ont un signe constant. Supposons $f(x) > 0$ pour $0 < x \leqslant x_1$. Si l'on avait $f(x) < 0$ la démonstration serait pareille. Pour $a < u \leqslant b$ on a $0 < x_1\varphi(u) \leqslant x_1$. Il en résulte que pour les mêmes valeurs de u l'inégalité $f[x_1\varphi(u)] > 0$ est vérifiée. Nous obtenons finalement

$$F(x_1) = \int_a^b f[x_1\varphi(u)]du > 0,$$

en contradiction avec (1). Par conséquent 0 est un point d'accumulation des zéros de la fonction $f(x)$ et, celle-ci étant continue, le point 0 en est aussi un zéro.

THÉORÈME 2. *Si la fonction réelle $f(x)$ est analytique dans l'intervalle fermé $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi(u)$ est une fonction croissante pour $a \leqslant u \leqslant b$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, et si ces fonctions satisfont à l'identité* (1), *l'identité* (2) *est vérifiée.*

Démonstration. La fonction $f(x)$ est analytique dans un intervalle ouvert (α, β) contenant l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. En vertu du lemme établi auparavant, le point 0 est un point d'accumulation des zéros de la fonction analytique $f(x)$ appartenant à l'intérieur de l'intervalle (α, β). Il en résulte que la fonction $f(x)$ est identiquement nulle et, par suite, l'identité (2) est vérifiée.

THÉORÈME 3. *Soi $f(x)$ une fonction continue, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, et $\varphi(u)$ une fonction croissante concave, c'est-à-dire satisfaisant à l'inégalité*

$$\tfrac{1}{2}[\varphi(u_1)+\varphi(u_2)] \leqslant \varphi[\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)], \tag{4}$$

définie dans l'intervalle $a \leqslant u \leqslant b$ et telle que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Si l'identité (1) *est vérifiée, l'identité* (2) *l'est aussi.*

Démonstration. Il résulte de (4) que la fonction $\varphi(u)$ a en tout point de l'intervalle $a < u < b$ une dérivée à gauche $\varphi^-(u)$ et une dérivée à droite $\varphi^+(u)$ ainsi que les dérivées correspondantes aux extrémités de cet intervalle. Pour $u_1 < u_2$ on a l'inégalité

$$\varphi^-(u_1) \geqslant \varphi^+(u_1) \geqslant \varphi^-(u_2) \geqslant \varphi^+(u_2) \geqslant 0 .$$

Si $\varphi(u)$ a un point de discontinuité, celui-ci ne peut être que le point a. Posons $\beta = \lim_{u\to a+0} \varphi(u)$. Evidemment $0 \leqslant \beta < 1$. La fonction $\varphi(u)$ est croissante, donc la fonction inverse $u = \varphi^{-1}(x)$ existe. Définissons la fonction $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ en posant $\psi(x) = a$ pour $0 \leqslant x \leqslant \beta$ et $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ pour $\beta < x \leqslant 1$. La fonction $\psi(x)$ est non décroissante, elle admet au point 0 une dérivée à droite et en tout point de l'intervalle $(0, 1)$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite, et on a

$$0 \leqslant \psi^-(x_1) \leqslant \psi^+(x_1) \leqslant \psi^-(x_2) \leqslant \psi^+(x_2) \quad \text{pour} \quad x_1 < x_2 . \tag{5}$$

Enfin, la fonction $\psi(x)$ est différentiable partout et absolument continue.

La fonction $F(t)$ peut être mise sous forme d'une intégrale de Stieltjes-Riemann:

$$F(t) = \int_0^1 f(tx)\, d\psi(x) .$$

La fonction $\psi(x)$ étant absolument continue dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$. on peut utiliser la relation bien connue entre l'intégrale de Stieltjes-Riemann et celle de Lebesgue et écrire

$$F(t) = \int_0^1 f(tx)\psi'(x)\, dx = 0 . \tag{6}$$

En mettant $t = 0$ dans (1) nous obtenons

$$f(0) = 0 . \tag{7}$$

Posons

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^1 tf(ts)\, ds \tag{8}$$

et

$$\Theta(t) = \int_0^1 x^{-1} g(tx)\, d\psi(x) . \tag{9}$$

L'expression $x^{-1}g(tx)$ est le produit du nombre t et de la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $\langle 0, tx\rangle$. Si l'on admet, pour $x = 0$, $x^{-1}g(tx) = f(0)t = 0$, l'expression $x^{-1}g(tx)$ représente une fonction continue dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. Par conséquent l'intégrale (9) existe. De (8) il vient

$$\Theta(t) = \int_0^1 \int_0^1 tf(txs)\, ds\, d\psi(x) = \int_0^1 \int_0^1 tf(txs)\, ds\, \psi'(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 tf(txs)\psi'(x)\, ds\, dx . \tag{10}$$

La fonction $t\cdot f(txs)$ est continue dans le carré $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. La fonction $\psi'(x)$, en tant que dérivée d'une fonction absolument continue, est sommable, donc il en est de même de la fonction $t\cdot f(txs)\psi'(x)$. En appliquant à l'intégrale double dans (10) le théorème de Fubini nous aurons

$$\Theta(t) = t \int_0^1 \int_0^1 f(txs)\psi'(x)\, dx\, ds .$$

D'après (8) on a

$$\Theta(t) = t \int_0^1 F(ts)\, ds = 0 . \tag{11}$$

Supposons que (2) n'ait pas lieu au moins en un point $f(x) \neq 0$. Alors il existe un point t tel que $g(t) \neq 0$. En changeant au besoin le signe de la fonction $f(x)$ — ce qui ne restreint pas la généralité du théorème — on obtient

$$-\mu = \min_{0\leqslant t\leqslant 1} t^{-1}g(t) = t_0^{-1}g(t_0) < 0.$$

Posons

(12) $$h(t) = g(t)+\mu t;$$

alors

(13) $$h(t) \geqslant 0, \quad h(t_0) = 0.$$

Posons ensuite

(14) $$\Phi(t) = \int_0^1 x^{-1}h(tx)\,d\psi(x).$$

De même qu'on l'a fait plus haut pour la fonction $\Theta(t)$, on peut constater que l'intégrale (14) existe. En vertu de (12) et (11) on a:

$$\Phi(t) = \int_0^1 x^{-1}g(tx)\,d\psi(x)+\mu t\int_0^1 d\psi(x) = \Theta(t)+\mu t(b-a) = \mu t(b-a).$$

Considérons le cas où $t_0 < 1$. Nous avons alors, pour $t > t_0$,

$$\Phi(t)-\Phi(t_0) = \mu(b-a)(t-t_0),$$

donc

(15) $$\Phi^+(t_0) = \mu(b-a) > 0.$$

D'après (14) on a

$$\Phi(t_0) = \int_0^1 x^{-1}h(t_0x)\,d\psi(x).$$

En transformant l'intégrale de Stieltjes-Riemann en intégrale de Lebesgue on obtient

$$\Phi(t_0) = \int_0^1 x^{-1}h(t_0x)\psi'(x)\,dx = \int_0^{t_0t^{-1}} s^{-1}h(ts)\psi'(tt_0^{-1}s)\,ds.$$

De là on déduit

(16) $$\Phi(t)-\Phi(t_0) = \int_0^{t_0t^{-1}} s^{-1}h(ts)[\psi'(s)-\psi'(tt_0^{-1}s]\,ds+ \\ +\int_{t_0t^{-1}}^1 s^{-1}h(ts)\psi'(s)\,ds.$$

Comme $s < tt_0^{-1}s$, il résulte de (5) que la différence des dérivées entre crochets est non positive. Vu (12) et (13) nous avons

$$h(tx) = h(tx)-h(t_0) = g(tx)-g(t_0)+\mu(tx-t_0).$$

En vertu de (8) nous avons, pour $t^{-1}t_0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$0 \leqslant h(tx) = \int_{t_0}^{tx} f(\tau)\,d\tau+\mu(tx-t_0)$$
$$\leqslant [\max_{0\leqslant x<1} f(x)+\mu](tx-t_0) \leqslant [\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)+\mu](t-t_0).$$

De là on tire, en tenant compte de (13) et (5),

$$0 \leqslant \int_{t_0t^{-1}}^1 s^{-1}h(ts)\psi'(s)\,ds \leqslant t^{-1}t[\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)+\mu](t-t_0)[\psi(1)-\psi(t_0t^{-1})].$$

Par conséquent

$$0 \leqslant \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0t^{-1}}^1 s^{-1}h(ts)\psi'(s)\,ds \leqslant t_0^{-1}t[\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)+\mu][\psi(1)-\psi(t_0t^{-1})].$$

Puisque $\lim\limits_{t\to t_0}[\psi(1)-\psi(t_0t^{-1})] = 0$, le quotient de la seconde intégrale dans (16) par $t-t_0$ tend vers zéro avec $t-t_0$. La première des intégrales dans (16) est non positive, son quotient par $t-t_0$ est donc non positif. En divisant les deux membres de l'égalité (16) par $t-t_0$ et en passant à la limite pour $t\to t_0$, nous aurons $\overline{\Phi}^+(t_0) \leqslant 0$, en contradiction avec la formule (15).

Il reste à étudier le cas où $f(x) \neq 0$ et $t_0 = 1$. Il existe alors un point t_1 tel que $t_1^{-1}g(t_1) > 0$. En effet, supposons que l'on ait $t^{-1}g(t) \leqslant 0$ pour tout t. La fonction $t^{-1}g(t)$ étant continue, l'ensemble $\underset{x}{E}[x^{-1}g(x) < 0]$ contient un voisinage à gauche du point 1 que nous désignerons par $(\xi, 1)$. Pour $\xi < x < 1$ on a

(17) $$x^{-1}g(x) = \int_0^1 f(xs)\,ds < 0.$$

Pour les valeurs restantes de x on a

(18) $$\int_0^1 f(xs)\,ds \leqslant 0.$$

La fonction $\psi(x)$ étant monotone, il existe un voisinage à gauche du point 1, soit $(\eta, 1)$, dans lequel $d\psi/dx > 0$. Aux autres points de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ on a évidemment $d\psi/dx \geqslant 0$. Posons $\omega = \sup(\xi, \eta)$. En vertu de (10), (17), (18) et (5) nous avons

$$\Theta(1) = \int_0^1 \int_0^1 f(xs)\,ds\,\psi'(x)\,dx \leqslant \int_\omega^1 \int_0^1 f(xs)\,ds\,\psi'(x)\,dx < 0,$$

en contradiction avec (11). Ainsi, en supposant pour $t_0 = 1$ l'inégalité $t^{-1}g(t) \leqslant 0$ vérifiée pour tout t, nous avons été amenés à une contradiction. Par conséquent la fonction $t^{-1}g(t)$ admet dans l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ un maximum positif. Posons $f^*(x) = -f(x)$. La fonction $g^*(x) = -g(x)$ qui correspond à la fonction $f^*(x)$ admet dans l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ un maximum négatif. Comme nous l'avons montré, la fonction $f^*(x)$ est alors identiquement nulle et il en est de même de la fonction $f(x)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.

[2] S. Gołąb, **P 40**, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 240-241.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

UNE REMARQUE SUR LA PROPRIÉTÉ DE WEIERSTRASS

PAR

H. FAST (WROCŁAW)

Nous disons qu'une fonction réelle $f(x)$, définie sur la droite entière ou dans un intervalle, *satisfait à la condition* W (¹) ($f(x) \in W$), si l'ensemble des valeurs admises par $f(x)$ dans un intervalle quelconque (x', x'') contient tous les nombres entre $f(x')$ et $f(x'')$.

Soit $F(x, y)$ une fonction réelle arbitraire définie sur le plan entier. Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Il existe une fonction réelle $u(x)$ définie sur la droite entière telle que la fonction $F(x, y_0)+u(x)$ satisfait à la condition W pour chaque y_0 fixé.*

Démonstration. Définissons deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ de la manière suivante: pour un nombre x dont la partie fractionnelle $x-[x]$ a un développement dyadique de la forme

$$(1)\qquad 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_k 0\overbrace{11\ldots1}^{m}0\overbrace{11\ldots1}^{n}0\overbrace{11\ldots1}^{p}0\overbrace{11\ldots1}^{q}0 b_0 0 b_1 0 b_2 0 b_3 0 \ldots$$
$$(a_i, b_i = 0, 1;\ q \geqslant 2;\ k, m, n, p \geqslant 0)$$

posons

$$g(x) - (m-n) = 0, b_1 b_3 b_5 b_7 \ldots,$$
$$h(x) - (p-q) = 0, b_0 b_2 b_4 b_6 \ldots$$

Pour les autres valeurs de x posons $g(x) = h(x) = 0$. Ainsi, les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont bien déterminées, puisque, évidemment, le développement (1) détermine d'une manière unique la suite $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ et les nombres m, n, p, q.

LEMME. *Pour tout nombre y et pour tout intervalle (x_1, x_2) l'ensemble $h\big(g^{-1}(y) \cap (x_1, x_2)\big)$ contient tous les nombres réels.*

(¹) dite *propriété de Weierstrass* ou *propriété de Darboux*.