COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

UNE REMARQUE SUR LA MULTIPLICATION DES DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE H_∞

PAR

S. ŁOJASIEWICZ (CRACOVIE) ET Z. ZIELEŹNY (WROCŁAW)

Désignons par H_∞ la classe des distributions sur $(-\infty, \infty)$ [1] dont toutes les dérivées sont de la forme $f+U$, où f est une fonction (localement sommable) et U est une distribution à support isolé [2]. On a alors

$$U = \sum_k \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_{k,i}\, \delta_{a_k}^{(i)},$$

où $\delta_a = \tau_a \delta$ désigne la translatée de la distribution δ de Dirac. La classe H_∞ est linéaire et fermée par rapport à la dérivation. Elle peut être caractérisée par la propriété suivante: si $a \epsilon (-\infty, \infty)$ et si k est un entier positif, on peut choisir un $\eta > 0$ assez petit pour que T soit égale dans $(a, a+\eta)$ ou dans $(a-\eta, a)$ à une fonction k fois continûment différentiable dans $[a, a+\eta]$ ou dans $[a-\eta, a]$ respectivement.

A. César de Freitas a défini (cf. [1] et [2]) une multiplication dans H_∞, bilinéaire, associative (mais non commutative), satisfaisant à la condition

$$(T\cdot S)' = T'\cdot S + T\cdot S' \tag{1}$$

et coïncidant avec la multiplication usuelle si les facteurs sont des fonctions; elle est, de plus, d'un caractère local, c'est-à-dire, si $T = T_1$ et $S = S_1$ dans un intervalle Δ, on a aussi $T\cdot S = T_1 \cdot S_1$ dans Δ.

Toute distribution $T \epsilon H_\infty$ est de la forme

$$T = f + \lambda_0 \delta_a + \ldots + \lambda_k \delta_a^{(k)}$$

---

(1) On peut remplacer $(-\infty, \infty)$ par un intervalle ouvert quelconque.

(2) C'est-à-dire composé exclusivement de points isolés.

dans un voisinage suffisamment petit d'un point $a \in (-\infty, \infty)$ quelconque, où $f \in H_\infty$ est une fonction et λ_i sont des constantes. La multiplication de César de Freitas est donc complètement déterminée par les formules

$$\begin{cases} \delta_a \cdot f = f(a-0)\,\delta_a \\ f \cdot \delta_a = f(a+0)\,\delta_a \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_a \cdot \delta_a^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots),$$

où l'on a, d'après (1),

$$\begin{aligned} \delta_a^{(p+1)} \cdot T &= (\delta_a^{(p)} \cdot T)' - \delta_a^{(p)} \cdot T', \\ T \cdot \delta_a^{(p+1)} &= (T \cdot \delta_a^{(p)})' - T' \cdot \delta_a^{(p)} \quad (p = 0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{2}$$

THÉORÈME. *Toute opération $T \cdot S$ définie partout dans H_∞ bilinéaire, associative, d'un caractère local, satisfaisant à la condition* (1) *et coïncidant avec la multiplication usuelle si T et S sont des fonctions, vérifie pour tout $a \in (-\infty, \infty)$ et pour toute fonction $f \in H_\infty$ les relations*

$$\delta_a^{(i)} \cdot \delta_a^{(j)} = 0 \quad (i, j = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

et

$$\begin{aligned} &\delta_a \cdot f = f(a-0)\,\delta_a, \quad f \cdot \delta_a = f(a+0)\,\delta_a \\ &\qquad\qquad ou \\ &\delta_a \cdot f = f(a+0)\,\delta_a, \quad f \cdot \delta_a = f(a-0)\,\delta_a. \end{aligned} \tag{4}$$

Démonstration. Montrons que dans le cas où φ est indéfiniment dérivable et $T \in H_\infty$ l'opération $T \cdot \varphi$ coïncide avec celle définie dans [3]: $T \cdot \varphi = \varphi \cdot T = \varphi T$ (cf. aussi [2], p. 143). A cet effet, soit Δ un intervalle fini et supposons qu'une distribution $T \in H_\infty$ ait la propriété suivante: pour chaque φ indéfiniment dérivable on a $\varphi \cdot T = \varphi T$ dans Δ. De l'égalité $\varphi \cdot T' = (\varphi T)' - \varphi' T$ il résulte que T' jouit encore de cette propriété. Puisque chaque distribution $T \in H_\infty$ qui est une fonction dans Δ en jouit également, c'est donc le cas pour toute distribution de H_∞.

En effet: chaque distribution $T \in H_\infty$ est la dérivée d'un certain ordre d'une distribution de H_∞ qui est une fonction dans Δ, car la primitive d'une distribution de H_∞ appartient à H_∞. On a donc toujours $\varphi \cdot T = \varphi T$, et pareillement $T \cdot \varphi = \varphi T$.

On a $(x-a) \cdot \delta_a^{(j+1)} = (x-a)\,\delta_a^{(j+1)} = -(j+1)\,\delta_a^{(j)}$ et $\delta_a \cdot (x-a) = (x-a)\,\delta_a = 0$ d'où

$$-(j+1)\,\delta_a \cdot \delta_a^{(j)} = \delta_a \cdot \big((x-a) \cdot \delta_a^{(j+1)}\big) = \big(\delta_a \cdot (x-a)\big) \cdot \delta_a^{(j+1)} = 0,$$

donc $\delta_a \cdot \delta_a^{(j)} = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$. En utilisant les relations (2), on en tire les égalités (3).

Soit $f \in H_\infty$ une fonction. Dans un voisinage de a, on a

$$f(x) = g(x) + \lambda_{-1} H_a(x),$$

où g est une fonction continue de H_∞ et

$$H_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x > a, \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant a. \end{cases}$$

Pour obtenir l'alternative (4), il suffit de prouver que

$$\delta_a \cdot g = g \cdot \delta_a = g(a)\,\delta_a \tag{5}$$

et

$$\begin{cases} \delta_a \cdot H_a = 0, \\ H_a \cdot \delta_a = \delta_a, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \delta_a \cdot H_a = \delta_a, \\ H_a \cdot \delta_a = 0. \end{cases}$$

Puisque g (comme fonction continue appartenant à H_∞) est absolument continue, on a $(H_a \cdot g)' = (H_a g)' = g(a)\,\delta_a + H_a g'$; d'autre part $(H_a \cdot g)' = \delta_a \cdot g + H_a \cdot g' = \delta_a \cdot g + H_a g'$.

Par conséquent $\delta_a \cdot g = g(a)\,\delta_a$ et pareillement $g \cdot \delta_a = g(a)\,\delta_a$, c'est-à-dire (5).

Nous avons $(x-a)(\delta_a \cdot H_a) = (x-a) \cdot (\delta_a \cdot H_a) = \big((x-a) \cdot \delta_a\big) \cdot H_a = \big((x-a)\delta_a\big) \cdot H_a = 0$. On en conclut (cf. [3], p. 121) que

$$\delta_a \cdot H_a = \lambda \delta_a,$$

où λ est une constante. Par conséquent, $(\delta_a \cdot H_a) \cdot H_a = \lambda \delta_a \cdot H_a = \lambda^2 \delta_a$ et $(\delta_a \cdot H_a) \cdot H_a = \delta_a \cdot (H_a \cdot H_a) = \delta_a \cdot H_a = \lambda \delta_a$, donc $\lambda^2 = \lambda$. Pareillement

$$H_a \cdot \delta_a = \mu \delta_a,$$

où μ est une constante telle que $\mu^2 = \mu$. Mais, du fait que $H_a \cdot H_a = H_a$ on tire que $\delta_a \cdot H_a + H_a \cdot \delta_a = \delta_a$, donc $\lambda + \mu = 1$. Il en résulte que

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \mu = 1, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = 0, \end{cases}$$

ce qui donne (6). Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE. *Il n'y a que deux manières possibles de définir une multiplication dans H_∞ qui satisfasse aux conditions du théorème et qui soit invariante par les translations: $\tau_a(T \cdot S) = \tau_a T \cdot \tau_a S$; chacune de ces multiplications est déterminée par la condition:*

$$\delta \cdot H = 0 \quad ou \quad H \cdot \delta = \delta$$

ou bien par la condition:

$$\delta \cdot H = \delta \quad ou \quad H \cdot \delta = 0$$

où H est la fonction de Heaviside.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. César de Freitas, *Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotechniciens (cas des circuits à constantes concentrées)*, Universidade de Lisboa, Revista da Faculdade de Ciências, 2A série A, Ciências Matemáticas, 3 (1953-1954), p. 279-310.

[2] — *Un produit multiplicatif de distributions de Heaviside*, ibidem 5 (1955-1956), p. 135-146.

[3] L. Schwarz, *Théorie des distributions I*, Paris 1950.

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

ON ABSOLUTE CONVERGENCE OF HAAR SERIES

BY

Z. CIESIELSKI AND J. MUSIELAK (POZNAŃ)

1. Let $\chi_n^{(k)}(t)$ denote the Haar functions defined as follows

$$\chi_0^{(0)}(t) = 1 \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

and

$$\chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{for} \quad \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant t < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{for} \quad \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < t \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{elsewhere in } \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

for $n = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Let $\chi_0^{(0)}(t) = \chi_1(t)$ and $\chi_n^{(k)}(t) = \chi_{2^n+k}(t)$ for $n = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots, 2^n$ and $0 \leqslant t \leqslant 1$. Moreover, let a_n denote the Fourier coefficients of an integrable function $f(t)$, i. e.

$$a_n = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt.$$

The problem of convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \chi_n(t)| \tag{1}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

will be considered. We obtain theorems analogous to those given by Bernstein and Zygmund for trigonometrical series. Questions concer-