Nakład 1425 egz. Papier bezdrz. sat. 100 g 70×100 cm.
Druk ukończono w lipcu 1960

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA — ZAM. 31/60

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

TOPOLOGIE COMBINATOIRE ET INVARIANTS COMBINATOIRES

PAR

WU WEN-TSÜN (PEKIN)

Un ensemble de points E situé dans un espace euclidien est dit *convexe* si, pour deux points quelconques x et y de E, le segment rectiligne xy est contenu dans E.

Etant donnés dans un espace euclidien $p+1$ points linéairement indépendants $a_0, \ldots, a_p$, le plus petit ensemble convexe contenant tous ces points (c'est-à-dire l'intersection de tous les ensembles convexes qui les contiennent) est un ensemble compact qui s'appelle *simplexe euclidien de dimension* p et les points a_i, où $i = 0, \ldots, p$, s'appellent ses *sommets*. Ce simplexe sera désigné par $\overline{(a_0 \ldots a_p)}$. Les simplexes euclidiens de dimension $n \leqslant p$ et dont les sommets $a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}$ sont des sommets du simplexe $\overline{(a_0 \ldots a_p)}$ portent le nom de *faces* de ce simplexe; il y en a $2^{p+1}-1$ (ou 2^{p+1} si l'on convient de considérer l'ensemble vide comme une face de dimension -1 de tout simplexe). Tout espace homéomorphe à un simplexe euclidien de dimension p s'appelle tout court *simplexe de dimension* p. Ses points et ses sous-ensembles correspondants à ceux du simplexe euclidien par cette homéomorphie sont dits alors ses *sommets* et *faces* respectivement.

On appelle *polyèdre fini* tout espace topologique compact que l'on peut représenter comme réunion des termes d'une suite finie $\overline{K} = \{\bar{\sigma}_m\}$ qui sont ses sous-espaces fermés $\bar{\sigma}_m$, chacun d'eux étant un simplexe et l'intersection de deux simplexes quelconques étant une face de chacun des deux (donc en particulier l'ensemble vide), et toutes les faces d'un simplexe quelconque de $\overline{K}$ figurant aussi parmi les $\bar{\sigma}_m$ de $\overline{K}$. Une telle représentation $\overline{K}$ du polyèdre fini P est dite sa *subdivision simpliciale* et ce polyèdre, muni d'une subdivision simpliciale $\overline{K}$, constitue ce qu'on appelle un *complexe simplicial fini* ou un *complexe* tout court. Il sera désigné par $(P, \overline{K})$ et P s'appellera *l'espace* de ce complexe.

A tout complexe simplicial fini $(P, \bar{K})$ un schéma abstrait peut être associé, composé d'ensemble fini $A = \{a_0, \ldots, a_N\}$ de tout les sommets de ses simplexes et de famille des sous-ensembles $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ de A tels que $\overline{(a_{i_0}\ldots a_{i_p})} \in \bar{K}$, c'est-à-dire tels que l'ensemble $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ est celui de tous les sommets d'un simplexe $\bar{\sigma}_m$ de $\bar{K}$. Alors

(1) $\{a_{j_0}, \ldots, a_{j_q}\} \subset \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ et $\overline{(a_{i_0}\ldots a_{i_p})} \in \bar{K}$ entraînent $\overline{(a_{j_0}\ldots a_{j_q})} \in \bar{K}$

et tout $a_i \in A$ est élément d'au moins un de ces sous-ensembles de A. Le schéma assujetti à ces conditions s'appelle *complexe simplicial fini abstrait* ou *complexe abstrait* tout court. Il sera désigné par $K = \{\sigma_m\} = \{(a_{i_0}\ldots a_{i_p})\}$ et les sous-ensembles de A de la forme $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ dont K se compose le seront par $(a_{i_0}\ldots a_{i_p})$. Pour un tel schéma abstrait, les éléments $a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}$ s'appelleront *sommets* du simplexe abstrait $\sigma_m = (a_{i_0}\ldots a_{i_p})$ de dimension p et tout simplexe abstrait $(a_{j_0}\ldots a_{j_q})$ tel que $\{a_{j_0}, \ldots, a_{j_q}\} \subset \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ sera dit une *face* de dimension q de σ_m. On peut ainsi considérer le couple (P, K), où P est un espace compact et $K = \{\sigma_m\}$ est un complexe abstrait, comme correspondant au complexe simplicial fini $(P, \bar{K})$ dont le polyèdre P est l'espace et dont $\bar{K} = \{\bar{\sigma}_m\}$ est une subdivision simpliciale. Ainsi, à tout $\sigma_m = (a_{i_0}\ldots a_{i_p}) \in K$ vient correspondre un simplexe $\bar{\sigma}_m = \overline{(a_{i_0}\ldots a_{i_p})} \in \bar{K}$ étant un sous-ensemble fermé de P.

La partie de la topologie que l'on peut nommer *topologie du polyèdre fini* a pour l'objet précisément l'étude des propriétés topologiques des polyèdres finis en partant des schémas abstraits associés aux subdivisions simpliciales de ces polyèdres.

Soient $K = \{\sigma_n\}$ et $K' = \{\sigma'_n\}$ deux complexes abstraits associés à deux subdivisions simpliciales d'un même polyèdre fini P. Il peut arriver que, pour tout simplexe abstrait $\sigma_m \in K$, la réunion des $\bar{\sigma}_n \in \bar{K}$ tels que $\bar{\sigma}'_n \subset \bar{\sigma}_n$ coïncide avec $\bar{\sigma}_m$. On dit alors que le complexe (P, K') est une *subdivision simpliciale* du complexe (P, K). Deux complexes (P, K_1) et (P, K_2) ayant le même espace P sont dits *équivalents au sens combinatoire* lorsqu'il en existe une subdivision simpliciale commune. Les propriétés d'un complexe (P, K) qui sont invariantes par rapport à l'équivalence combinatoire portent le nom des *invariants combinatoires* de ce complexe et on appelle *topologie combinatoire* la partie de la topologie qui traite des invariants combinatoires des complexes simpliciaux finis.

Une présomption fondamentale de la topologie combinatoire et qui n'est pas démontrée jusqu'à présent (elle est connue sous le nom allemand de „Hauptvermutung") veut que deux complexes simpliciaux finis dont l'espace commun est un même polyèdre soient toujours équivalents au

sens combinatoire. S'il en est ainsi, l'étude de la structure topologique des polyèdres finis se ramenerait à la topologie combinatoire. En particulier, les invariants topologiques d'un polyèdre fini P (c'est-à-dire ses propriétés invariantes par rapport aux transformations biunivoques et bicontinues) coïncideraient avec les invariants combinatoires d'un complexe quelconque (P, K) associé à ce polyèdre de la manière décrite plus haut. Quoi qu'il en soit, les invariants topologiques d'un polyèdre fini sont en tout cas des invariants combinatoires de tout complexe qui lui est associé. C'est l'une des raisons qui justifient l'intérêt à la topologie combinatoire.

Or, la notion de complexe se laissant formuler d'une manière abstraite, il en est de même des notions de subdivision simpliciale et d'équivalence combinatoire. Considérons en effet un complexe abstrait $K_1 = \{\sigma_m\}$ dont $A_1 = \{a_0, \ldots, a_N\}$ est l'ensemble de tous les sommets. Soit $(a_j a_k) \in K_1$ un simplexe de dimension 1. Ajoutons à l'ensemble A_1 un nouveau sommet a et considérons la famille K_2 des sous-ensembles de $A_2 = A_1 \cup (a)$ définie par deux conditions suivantes:

(2) les simplexes de K_1 n'ayant pas $(a_j a_k)$ pour face appartiennent à K_2.

(3) si $(a_j a_k a_{i_0}\ldots a_{i_p}) \in K_1$ (ou bien si l'ensemble $\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_p}\}$ est vide), les sous-ensembles de A_2 de la forme $(a_j a a_{i_0}\ldots a_{i_p})$, $(a a_k a_{i_0}\ldots a_{i_p})$ et $(a a_{i_0}\ldots a_{i_p})$ appartiennent à K_2.

On vérifie aisément que K_2 satisfait à la condition (1) et qu'il est par conséquent un complexe abstrait, A_2 étant l'ensemble de ses sommets et les sous-ensembles de A_2 assujettis à (2) et (3) étant tous ses simplexes. K_2 est dit une ***subdivision élémentaire*** de K_1.

D'après un théorème fondamental de la topologie combinatoire (voir [1] et [4]), si deux complexes (P, K) et (P, K') ayant le même polyèdre pour l'espace sont équivalents au sens combinatoire, les complexes abstraits K et K' qui leurs sont associés se trouvent en relation suivante:

(4) il existe une suite finie $K = K_1, K_2, \ldots, K_n = K'$ de complexes abstraits tels que de deux termes consécutifs de cette suite l'un est toujours une subdivision élémentaire de l'autre.

La réciproque de ce théorème étant évidente, on est conduit aux définitions suivantes:

Deux complexes abstraits K et K^* sont *isomorphes* s'il existe entre les ensembles A et A^* de leurs sommets une correspondance biunivoque et telle qu'un sous-ensemble de A est un simplexe de K lorsque, et seulement lorsque le sous-ensemble correspondant de A^* est un simplexe de K^*.

Deux complexes abstraits K^* et K'^*, sont *équivalents au sens combinatoire* s'il existe deux complexes abstraits K et K' isomorphes à K^* et K'^* respectivement et qui sont en relation (4).

Les propriétés des complexes abstraits invariantes par rapport à cette équivalence combinatoire s'appellent les *invariants combinatoires* des complexes abstraits.

En vertu du théorème fondamental précité, la topologie combinatoire peut donc être ramenée à l'étude des invariants combinatoires des complexes abstraits, donc de l'équivalence combinatoire entre ces complexes, qui est par définition de nature purement algébrique. Or l'étude de leurs invariants combinatoires, en tant que propriétés invariantes par rapport à leurs subdivisions élémentaires, peut nous en fournir trop au point de vue des besoins de la topologie des polyèdres finis, mais — comme il a été noté — nous fournira en tout cas, à côté des propriétés peut-être topologiquement non-invariantes, donc inutiles, toutes celles qui sont en effet des invariants topologiques distincts.

Passons en revue les invariants combinatoires d'un complexe abstrait, les plus connus à l'état actuel de la science. Donnons-nous à ce but un complexe abstrait K composé de simplexes abstraits σ_m et dont l'ensemble des sommets $A = \{a_0, \ldots, a_N\}$ est supposé ordonné par une relation d'une manière arbitraire, mais définitive, à savoir de la manière suivante: $a_0 < \ldots < a_N$. Soit $d(K)$ la dimension maximum des simplexes de K et $n_r(K)$ le nombre de ceux qui sont de dimension r. Alors,

(I) $d(K)$ est un invariant combinatoire de K; il s'appelle la *dimension* de K,

(II) $\chi(K) = \sum_{r=0}^{d(K)} (-1)^r n_r(K)$ est aussi un invariant combinatoire de K; il s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de K.

Un peu plus compliquée que ces deux invariants numériques est la notion de groupe d'homologie de K. Soit $\{\sigma_m^r\}$, où $m \in T_r$, l'ensemble de tous les simplexes de K qui sont de dimension r. Étant donné un groupe abélien G, soit $C_r(K, G)$ le groupe abélien de toutes les combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i \in T_r} g_i \sigma_i^r$, où $g_i \in G$, l'addition étant entendue au sens naturel. Considérons un système d'homomorphismes

$$\partial_r: \begin{cases} C_0(K, G) \to 0 & \text{pour} \quad r = 0, \\ C_r(K, G) \to C_{r-1}(K, G) & \text{pour} \quad r > 0 \end{cases}$$

tels que l'on ait

$$\partial_r(g\sigma^r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k g(a_{i_0}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_r})$$

pour tout $g \in G$ et tout simplexe $\sigma^r = (a_{i_0} \ldots a_{i_r})$ de K, où $r \geqslant 0$ et $i_0 < \ldots < i_r$. On a alors $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ pour tout $r \geqslant 0$, d'où $\mathrm{Im}\,\partial_{r+1} \subset \mathrm{Noy}\,\partial_r$, et on sait que pour $0 \leqslant r \leqslant d(K)$

(III) $H_r(K, G) = \mathrm{Noy}\,\partial_r / \mathrm{Im}\,\partial_{r+1}$ est un invariant combinatoire de K; il s'appelle son *groupe d'homologie* de dimension r, relatif au groupe des coefficients G.

Ainsi, dans les définitions des invariants (I)-(III) n'interviennent que

(i) la dimension des simplexes de K,

(ii) le nombre de ses simplexes de chaque dimension,

(iii) la relation entre deux simplexes de K dont les dimensions ne diffèrent que par l'unité et qui s'exprime par 0 lorsqu'aucun de ces simplexes n'est une face de l'autre et par -1 ou $+1$ lorsqu'il en est une.

Les autres invariants combinatoires connus, par exemple le groupe fondamental, les groupes de cohomologies, les opérations cohomologiques et même les groupes d'homotopie de Hurewicz, peuvent être définis en partant des propriétés analogues, mais parfois plus compliquées, en faisant intervenir encore

(iv) les relations générales entre les faces qui sont simplexes de K.

Il y a donc lieu d'envisager le problème suivant:

Quels sont les invariants combinatoires d'un complexe abstrait K qui se laissent définir à l'aide de sa structure combinatoire, en particulier à l'aide de ses propriétés (i)-(iv)?

Il semble que c'est Mayer [3] qui a été le premier à aborder le problème dans cet ordre d'idées, en établissant le théorème qui peut être formulé comme suit:

THÉORÈME 1 (Mayer). *Tout invariant combinatoire de K ayant la forme*

$$\text{(IV)} \qquad \vartheta(K) = \sum_{r=0}^{d(K)} a_r n_r(K)$$

est un multiple de la caractéristique (II) *d'Euler-Poincaré.*

Le but de cette communication [1] est d'envisager le même problème sous un aspect moins général, à savoir limité à ces invariants *numériques*,

[1] Elle a été faite à Wrocław, le 30. XII. 1957, au Séminaire de topologie de l'Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences.

et d'indiquer une méthode générale de les définir à l'aide des propriétés (i)-(iv).

En vue d'appliquer (iv), introduisons les nombres suivants:

(5) $n_{rs,k}(K)$ où $0 \leqslant \binom{r}{s} \leqslant d(K)$ et $-1 \leqslant k \leqslant \min(r, s)$,

qui est celui des couples ordonnés composés d'un simplexe de K de dimension r et d'un autre de dimension s qui ont *exactement* une face commune de dimension k;

(6) $n_{r_1 \ldots r_t}(K)$ où $t \geqslant 2$,

qui est le nombre des t-tuples $(\sigma_1, \ldots, \sigma_t)$ de simplexes de K tels que σ_q est de dimension r_q pour $1 \leqslant q \leqslant t$ et qu'aucun sommet n'est commun à tous les σ_q d'un même t-tuple.

On a en particulier

(7) $$n_{rr,r}(K) = n_r(K),$$

(8) $$n_{r_1 r_2,-1}(K) = n_{r_1 r_2}(K).$$

Posons

(V) $$\varphi(K) = \sum_{r,s=0}^{d(K)} a_{rs,k} n_{rs,k}(K),$$

(VI) $$\psi_t(K) = \sum_{r_1,\ldots,r_t=0}^{d(K)} a_{r_1\ldots r_t} n_{r_1\ldots r_t}(K).$$

Par analogie au théorème de Mayer, on a les théorèmes de Wu [5] et de Lee [2] permettant de trouver les invariants combinatoires qui sont des combinaisons linéaires de la forme (V) et (VI) des nombres (5) et (6).

Notons d'abord que la caractéristique d'Euler-Poincaré (II) est de la forme (V), car on a d'après (7)

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^{d(K)} (-1)^r n_{rr,r}(K),$$

et qu'il en est de même du carré de cette caractéristique

(9) $$\chi^2(K) = \sum_{r,s=0}^{d(K)} (-1)^{r+s} n_{rs,k}(K).$$

Quant à (VI), il s'agit du suivant

THÉORÈME 2 (Wu). *Les nombres*

(10) $$\chi_t^+(K) = \sum_{r_1,\ldots,r_t=0}^{d(K)} (-1)^{r_1+\ldots+r_t} n_{r_1\ldots r_t}(K)$$

sont des invariants combinatoires du complexe abstrait K, et même des invariants topologiques du polyèdre fini correspondant.

Pour la genèse des invariants (10) et la démonstration de leur invariance, on voudra consulter le travail [5].

Le cas particulier de (10) pour $t = 2$, c'est-à-dire le nombre qui est égal d'après (8) à

$$\chi_2^+(K) = \sum_{r,s=0}^{d(K)} (-1)^{r+s} n_{rs,-1}(K),$$

est donc en même temps de la forme (V). Or on a le

THÉORÈME 3 (Lee). *Tous les invariants combinatoires de K de la forme* (V) *sont des combinaisons linéaires des invariants $\chi(K)$, $\chi^2(K)$, et $\chi_2^+(K)$.*

Pour illustrer la méthode employée par Lee dans la démonstration de son théorème, je vais citer ici sa démonstration du théorème 1 qui est bien plus simple et naturelle que la démonstration originale de Mayer. Ce théorème étant trivialement vrai pour $d(K) = 0$, procédons par induction en admettant qu'il est vrai pour tout $d(K) < d$. Par conséquent, pour $d(K) = d$, tout invariant combinatoire de K qui est de la forme (IV) se laisse représenter par la formule

$$\vartheta(K) = a\sum_{r=0}^{d-1} (-1)^r n_r(K) + b n_d(K) = a\chi(K) + [b-(-1)^{n_d} a] n_d(K).$$

K' étant une subdivision élémentaire de K, on a donc la même formule

$$\vartheta(K') = a\chi(K') + [b-(-1)^{n_d} a] n_d(K').$$

On a $\vartheta(K) = \vartheta(K')$ par suite de l'invariance admise de $\vartheta(K)$, et en même temps $\chi(K) = \chi(K')$ par suite de l'invariance de $\chi(K)$. Les deux formules entraînent donc

$$[b-(-1)^{n_d} a][n_d(K) - n_d(K')] = 0$$

pour tout complexe abstrait K de dimension $d(K) \leqslant d$ et pour toutes les subdivisions élémentaires K' de K. En particulier, pour K et K' tels que $n_d(K) \neq n_d(K') \neq 0$, on aura par conséquent $b = (-1)^{n_d} a$, d'où $\vartheta(K) = a\chi(K)$, ce qui achève la démonstration du théorème de Mayer.

Aucun théorème analogue à celui de Lee, mais concernant les invariants combinatoires de la forme (VI), ne m'est connu jusqu'à présent. Il semble cependant qu'il existe bien des invariants de cette forme, différents de $\chi_r^+(K)$, et qu'ils peuvent être trouvés de la même manière. Enfin, en introduisant d'autres nombres, analogues à (5) et (6), et en cherchant à établir des invariants combinatoires numériques s'exprimant par leurs combinaisons linéaires, on se voit bien en possession d'une méthode générale qui se prête à les définir systématiquement au moyen des propriétés (i)-(iv) de complexes abstraits.

Ajoutons, pour terminer, deux remarques:

1. Parmi les invariants de nature algébrique (c'est-à-dire qui s'expriment par des nombres, groupes, homomorphismes etc.), les invariants topologiques les plus importants sont, presque tous, en même temps des invariants du type d'homotopie. Tels sont les groupes d'homologie, ceux d'homotopie et autres. Il y a toutefois des exceptions, comme par exemple la dimension — et, plus généralement, les invariants de la forme (10) — qui sont des invariants topologiques des espaces de complexes abstraits sans en être des invariants du type d'homotopie. On a en effet pour le segment rectiligne I et le triangle Δ, qui sont de même type d'homotopie, $\chi_2^+(I) = 2$ et $\chi_2^+(\Delta) = 0$. Ainsi, ce sont des invariants topologiques d'un genre nouveau, promettant d'être applicables avec avantage dans des problèmes de nature topologique, mais non homotopique, donc tels que celui de la classification topologique des espaces, de leur isotopie, du plongement d'un espace dans un autre etc. Ces invariants paraissent en outre les plus simples dans leur genre (excepté la dimension).

2. La topologie combinatoire, qui concentrait sur elle l'attention des topologues pendant la première trentaine d'années de ce siècle, semble cesser peu à peu de susciter leur intérêt, malgré que *tous* les invariants topologiques des polyèdres finis se trouvent parmi les invariants combinatoires des complexes abstraits. Il est donc peut-être désirable de poursuivre les recherches dans ce domaine. Ce qui vient d'être exposé ici est déstiné à montrer qu'*il y a une possibilité de faire avancer ces recherches d'une façon méthodique*, en particulier dans l'ordre d'idées des théorèmes établis par Mayer et Lee pour des invariants numériques particuliers.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. W. Alexander, *The combinatorial theory of complexes*, Annals of Mathematics 31 (1950), p. 292-320.

[2] K. C. Lee, *Über die Eindeutigkeit von einigen kombinatorischen Invarianten endlichen Komplexes*, Science Record 1 (1957), p. 279-281.

[3] W. Mayer, *A new homology theory*, Annals of Mathematics 43 (1942), p. 594-605.

[4] K. Reidemeister, *Einführung in die kombinatorische Topologie*, Braunschweig 1932.

[5] W. T. Wu, *Topological invariants of new type of finite polyhedrons*, Acta Mathematica Sinica 3 (1953), p. 261-289.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VII 1959 FASC. 1

ON CHAINS OF REGULAR TETRAHEDRA

BY

S. ŚWIERCZKOWSKI (WROCŁAW)

In this paper we present the solution of a problem of Professor H. Steinhaus (conjecture (1) in [1]). We shall prove the following

THEOREM. *If $T_0, T_1, \ldots, T_n$ are regular tetrahedra such that*

1° T_i and T_{i+1} have strictly one face in common,

2° $T_i \neq T_{i+2}$,

then T_0 and T_n are not congruent by translation(1).

Proof. Given a rotation of the space, we may represent it by the pair $\langle a, \varphi\rangle$, where a is a vector situated on the rotation axis and φ is the rotation angle. We assume that for $\varphi > 0$ the rotation $\langle a, \varphi\rangle$ has a clockwise sense for an observer looking along its axis in the direction indicated by a.

Suppose that the vertices of T_0 are A, B, C, D. We write $\vec{AB} = a$, $\vec{CD} = b$. Let φ be the angle between two faces of T_0. We define

$$\Phi = \langle a, \varphi\rangle, \quad \Psi = \langle b, \varphi\rangle.$$

We shall prove first that there exists a sequence of rotations $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ satisfying $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_i(T_0) = T_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ and such that $\Theta_i^{\varepsilon_i} = \Phi$ or Ψ for $\varepsilon_i = 1$ or -1. Our proof is by induction. The assertion is obvious for $i = 1$. Suppose that it is true for some $i < n$. Write $\Theta = \Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_i$. Observe that $T_{i+1} = \Omega(T_i)$, where $\Omega = \langle\Theta(c), \varepsilon\varphi\rangle$, $c = a$ or b, $\varepsilon = \pm 1$.

We define $\Theta_{i+1} = \langle c, \varepsilon\varphi\rangle$. Thus $\Theta_{i+1} = \Phi^{\pm 1}$ or $\Psi^{\pm 1}$.

Now observe the formula $\langle\Theta(c), \varepsilon\varphi\rangle = \Theta\langle c, \varepsilon\varphi\rangle\Theta^{-1}$. It implies $\Omega = \Theta\Theta_{i+1}\Theta^{-1}$. Thus $T_{i+1} = \Omega(T_i) = \Theta\Theta_{i+1}\Theta^{-1}\Theta(T_0) = \Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_{i+1}(T_0)$.

Let $\mathcal{T}$ be the group of translations and $\mathcal{H}$ the group of all sense-preserving isometries of E^3. We consider the quotient group $\mathcal{H}/\mathcal{T}$, i. e. the group of rotations of E^3 around a fixed point O. For $x \in \mathcal{H}$ let us denote

(1) Added in proof: We have been informed that T. J. Dekker generalized this result to simplices of more than three dimensions.