COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVIII 1995 FASC. 2

MOYENNES SPHÉRIQUES ET OPÉRATEUR DE HELMHOLTZ ITÉRÉ

PAR

FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ VIELI (LAUSANNE)

1. Introduction. Il est bien connu qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ est harmonique — $\Delta f = 0$ — si et seulement si sa moyenne sur toute sphère est égale à sa valeur au centre de cette sphère.

De manière semblable, f vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta f + cf = 0$ si et seulement si sa moyenne sur la sphère de centre x et de rayon r vaut $\Gamma(n/2)(r\sqrt{c}/2)^{(2-n)/2}J_{(n-2)/2}(r\sqrt{c}) \cdot f(x)$.

Dans ce travail, nous généralisons ces résultats à l'opérateur $(\Delta + c)^k$ où k est un entier strictement positif et c une constante non nulle. Bien qu'une méthode pour y parvenir soit esquissée dans [CH] (pp. 286–289), il semble que les calculs explicites nécessaires n'aient jamais été faits en toute généralité pour cet opérateur (voir, pour le cas $n = 3$, [F], p. 87).

La formule de la moyenne à laquelle nous aboutissons permet de démontrer — résultat cité par Herz ([H], p. 711) — qu'une fonction bornée f dont le spectre est dans S^{n-1} vérifie $(\Delta + 4\pi^2)^k f = 0$ où $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, et ceci sans utiliser Beurling–Pollard.

2. Notations. Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 3$) muni de la norme euclidienne $\|\ \|$, nous notons $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, $B'(x,r)$ son adhérence, $S(x,r)$ la sphère de centre x et de rayon r, $d\sigma_r(y)$ l'élément d'aire sur $S(x,r)$. Si f est intégrable sur $S(x,r)$ nous posons

$$\mathfrak{M}(f,x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x,r)} f(y)\, d\sigma_r(y)$$

où ω_n est l'aire de $S^{n-1} = S(0,1)$ — i.e. $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Nous désignons par Δ le laplacien usuel : $\sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$, et par Δ^k k itérés successifs de Δ, avec $\Delta^0 = \mathrm{id}$.

Nous notons $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$; si T en est une, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ est la fonction (analytique) en x, $T(y \mapsto e^{-2\pi i (x|y)})$ (voir [S]).

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 35J30; Secondary 42B10.

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν est définie par (cf. [W])

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Le coefficient binomial $\binom{m}{r}$ est posé égal à zéro pour $r < 0$ ou $r > m$.

Le polynôme $[y]_m$ en y de degré m est défini par $[y]_0 = 1$ et $[y]_m = y(y-1)\dots(y-m+1)$ pour $m \geq 1$. Enfin, nous notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x.

3. Dérivabilité

Définition 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous posons $C^0_\Delta(U) = C^0(U)$; puis, par récurrence, $C^{2k}_\Delta(U) = \{f \in C^2(U) \mid \Delta f \in C^{2k-2}_\Delta(U)\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; et enfin $C^\infty_\Delta(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^{2m}_\Delta(U)$.

Propriétés.

$$C^{2k}(U) \subset C^{2k}_\Delta(U) \supset C^{2k+2}_\Delta(U) \supset C^\infty_\Delta(U) \supset C^\infty(U).$$

Supposons qu'une fonction $f \in C^0(U)$ vérifie, pour toute boule $B'(x,r) \subset U$, une formule de la moyenne du type

$$\mathfrak{M}(f,x,r) = \varphi(r)f(x) \tag{1}$$

où φ est une fonction analytique ne dépendant pas de x, avec $\varphi(0) = 1$. Nous avons

$$\int_{S(x,r)} f(y)\,d\sigma_r(y) = \omega_n r^{n-1}\varphi(r)f(x),$$

d'où

$$\int_0^R dr \int_{S(x,r)} f(y)\,d\sigma_r(y) = f(x)\int_0^R \omega_n r^{n-1}\varphi(r)\,dr,$$

c'est-à-dire

$$\int_{B(x,R)} f(z)dz = \psi(R)f(x) \tag{2}$$

pour toute boule $B'(x,R) \subset U$, avec ψ analytique non nulle.

On démontre en dérivant que, réciproquement, si (2) a lieu dans toute boule $B'(x,R) \subset U$, alors (1) est vérifiée pour toute boule $B'(x,r)$ dans U.

Remarquons encore que, puisque les zéros de ψ sont isolés, il suffit de vérifier (2) hors de ceux-ci pour l'avoir partout, vu la continuité en R de $\int_{B(x,R)} f(z)\,dz$.

Si f est continue, la fonction $x \mapsto \int_{B(x,R)} f(z)\,dz$ est continûment dérivable par rapport à la l^{e} variable ([Vo], II, p. 150). D'après (2) c'est donc aussi le cas de $f(x)$ et nous avons (même référence)

$$\psi(R)\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial}{\partial x_l}\int_{B(x,R)} f(z)\,dz = \int_{B(x,R)} \frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\,dz.$$

Par induction il vient que si $f\in C^0(U)$ vérifie, pour toute boule $B'(x,r)\subset U$, $\mathfrak{M}(f,x,r) = \varphi(r)f(x)$ où φ est analytique, avec $\varphi(0) = 1$, alors f est de classe C^∞ sur U et ses dérivées de tous ordres vérifient cette même formule de la moyenne.

Soient maintenant $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{2k}_\Delta(U)$ qui vérifie, pour toute boule $B'(x,r) \subset U$, une formule de la moyenne du type

$$\mathfrak{M}(f,x,r) = \sum_{p=0}^{k} \varphi_p(r)\Delta^p f(x)$$

où les φ_p sont analytiques indépendantes de x, $\varphi_0(0) = 1$ et $\varphi_1(0) = \ldots = \varphi_k(0) = 0$. Ainsi,

$$\varphi_k(r)\Delta^k f(x) = \mathfrak{M}(f,x,r) - \sum_{p=0}^{k-1} \varphi_p(r)\Delta^p f(x)$$

et, comme plus haut, ceci équivaut à

$$\psi_k(R)\Delta^k f(x) = \int_{B(x,R)} f(z)\,dz - \sum_{p=0}^{k-1} \psi_p(R)\Delta^p f(x) \tag{3}$$

pour toute boule $B'(x,R) \subset U$, avec ψ_k analytique non nulle.

Puisque, par hypothèse, le membre de droite dans (3) est, comme fonction de x, de classe C^2, c'est aussi le cas du membre de gauche; d'où $f \in C^{2k+2}_\Delta(U)$ et

$$\psi_k(R)\Delta^{k+1} f(x) = \int_{B(x,R)} \Delta f(z)\,dz - \sum_{p=0}^{k-1} \psi_p(R)\Delta^{p+1} f(x)$$

Par induction il vient que si $f\in C^{2k}_\Delta(U)$ vérifie, pour toute boule $B'(x,r)\subset U$, $\mathfrak{M}(f,x,r) = \sum_{p=0}^{k}\varphi_p(r)\Delta^p f(x)$ où $\varphi_0,\ldots,\varphi_k$ sont analytiques, avec $\varphi_0(0) = 1$ et $\varphi_l(0) = 0$ pour $1 \le l \le k$, alors $f \in C^\infty_\Delta(U)$ et $\Delta^m f$ vérifie cette même formule de la moyenne, quel que soit $m \in \mathbb{N}$.

4. Moyennes sphériques. Ce paragraphe étant essentiellement une généralisation à $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ quelconque, d'un travail de Pizetti en dimension 3 (cf. [P]), nous nous permettrons d'omettre le détail des calculs, que le lecteur intéressé pourra reconstruire aisément.

Fixons-nous U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et $R > 0$ tel que $B'(x,R) \subset U$. Si f est une fonction C^2 sur U, on obtient, en appliquant la formule de Green

$$\int_{\Omega} (f \cdot \Delta g \,-\, g \cdot \Delta f)\, dz = \int_{\partial\Omega} (f \cdot \partial_\nu g \,-\, g \cdot \partial_\nu f)\, d\sigma$$

à

$$g(z) = \frac{1}{\|z-x\|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}$$

et $\Omega = B(x,R) \setminus B'(x,\delta)$ et en faisant $\delta \to 0_+$, l'identité

$$(n-2)\omega_n f(x) = \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_{S(x,R)} f(y)\, d\sigma_R(y) + \int_{B(x,R)} \Delta f(z) \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{\|z-x\|^{n-2}} \right) dz.$$

D'où

$$\mathfrak{M}(f,x,R) = f(x) + \frac{1}{n-2} \int_0^R \left(\varrho - \frac{\varrho^{n-1}}{R^{n-2}} \right) \mathfrak{M}(\Delta f, x, \varrho)\, d\varrho. \tag{4}$$

Ceci justifie l'introduction de la

Définition 2. Si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, nous notons $(\mathcal{I}_m g)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ définies par récurrence ainsi :

$$\mathcal{I}_0 g = g,$$
$$\mathcal{I}_m g(t) = \frac{1}{n-2} \int_0^t \left(\varrho - \frac{\varrho^{n-1}}{t^{n-2}} \right) \mathcal{I}_{m-1} g(\varrho)\, d\varrho \quad \text{ si } m \ge 1.$$

Nous notons encore en particulier $I_m = \mathcal{I}_m 1$.

Propriétés. On a

$$I_m(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{m!\,\Gamma(m+n/2)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2m},$$
$$\mathcal{I}_k(\mathcal{I}_l g) = \mathcal{I}_{k+l} g, \qquad \mathcal{I}_m(g+h) = \mathcal{I}_m g + \mathcal{I}_m h,$$
$$|\mathcal{I}_m g(t)| \le \sup_{0\le a\le t} |g(a)| \cdot I_m(t).$$

On démontre aisément par récurrence à l'aide de la formule (4) la

Proposition 1. *Si* $f \in C^{2m+2}_{\Delta}(U)$ *et* $B'(x,r) \subset U$, *alors*

$$\mathfrak{M}(f,x,R) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{j=0}^{m} \frac{\Delta^j f(x)}{j!\,\Gamma(j+n/2)} \left(\frac{R}{2} \right)^{2j} + \mathcal{I}_{m+1} \mathfrak{M}(\Delta^{m+1} f, x, \varrho)(R).$$

Il en découle, avec la majoration $|\mathfrak{M}(g,x,\varrho)| \le \sup_{y\in B'(x,r)}|g(y)|$ si $0 \le \varrho \le r$:

Proposition 2. *Si $f \in C^{2m+2}_{\Delta}(U)$ et $x \in U$, alors*

$$\Delta^m f(x) = \lim_{r\to 0_+} \frac{m!\Gamma(m+n/2)}{\Gamma(n/2)} \times \left(\frac{2}{r}\right)^{2m}\left(\mathfrak{M}(f,x,r) - \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\Delta^j f(x)}{j!\Gamma(j+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}\right).$$

5. Calculs combinatoires. Soient k un entier ≥ 1 et c une constante non nulle. Supposons qu'une fonction u sur $\mathbb{R}^n$ vérifie l'équation

$$(\Delta + c)^k u = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}c^{k-p}\Delta^p u = 0.$$

Ainsi $\Delta^k u$ est combinaison linéaire des $\Delta^0 u, \dots, \Delta^{k-1}u$:

$$\Delta^k u = -\sum_{p=0}^{k-1}\binom{k}{p}c^{k-p}\Delta^p u.$$

Il en est bien sûr de même pour les $\Delta^{k+l}u$ avec $l \ge 0$; posons donc

$$\Delta^{k+l}u = (-1)^{l+1}\sum_{p=0}^{k-1} a(p,l)c^{k+l-p}\Delta^p u, \tag{5}$$

les coefficients $a(p,l)$ dépendant également de k et de n.

Il découle de l'équation (5) les formules suivantes :

$$a(p,0) = \binom{k}{p} \qquad \text{pour } 0 \le p \le k-1,$$
$$a(0,l+1) = a(k-1,l) \qquad \text{pour } l \ge 0,$$
$$a(p,l+1) = \binom{k}{p}a(k-1,l) - a(p-1,l) \qquad \text{pour } 1 \le p \le k-1 \text{ et } l \ge 0,$$

qui déterminent entièrement les coefficients $a(p,l)$.

En calculant quelques termes $a(p,l)$ pour $k = 2,3,4$ et $0 \le l \le 4$, on remarque que $a(0,l) = \binom{k+l-1}{k-1}$; à partir de cette hypothèse il vient, pour tous $l \ge 0$ et $1 \le p \le k-1$,

$$a(p,l) = \sum_{r=0}^{p}(-1)^r\binom{k}{p-r}\binom{k+l-1-r}{k-1} \tag{6}$$

et il suffit, pour vérifier la validité de cette formule, de constater que l'identité $a(0, l+1) = a(k-1, l)$, qui s'écrit maintenant

$$\binom{k+l}{k-1} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k}{k-1-r} \binom{k+l-1-r}{k-1},$$

découle, par exemple, de l'identité (5a), p. 6 de [R].

Nous voulons maintenant étudier la série indiquée par la proposition 1 :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)} \left(\frac{R}{2}\right)^{2j} \Delta^j u,$$

en la réduisant à une combinaison linéaire de $\Delta^0 u, \ldots, \Delta^{k-1} u$. Pour cela transformons le terme

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)} \left(\frac{R}{2}\right)^{2j} \Delta^j u \\
&\qquad = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)} \left(\frac{R}{2}\right)^{2j} \Big((-1)^{j-k+1} \sum_{p=0}^{k-1} a(p, j-k) c^{j-p} \Delta^p u\Big) \\
&\qquad = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{-k+1} c^{-p} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j a(p, j-k)}{j!\Gamma(j+n/2)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j} \right) \Delta^p u \\
&\qquad = (-1)^{k-1} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{-\nu} \\
&\qquad\qquad \times \sum_{p=0}^{k-1} c^{-p} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j a(p, j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu} \right) \Delta^p u
\end{aligned}$$

où nous notons $\nu = (n-2)/2$.

Comme

$$a(p, x-k) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{k}{p-r} \frac{[x-1-r]_{k-1}}{(k-1)!}, \tag{7}$$

$a(p, x-k)$ est un polynôme en x de degré $k-1$ (ceci implique la convergence absolue et uniforme sur tout compact — en z — des séries

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j a(p, j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)} \left(\frac{z\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu}$$

pour $p = 0, \ldots, k-1$). Nous pouvons donc définir des coefficients $b(p, m)$

pour $0 \leq p,\ m \leq k-1$ par

$$a(p, x-k) = \sum_{m=0}^{k-1} b(p,m)[x+\nu]_m. \tag{8}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu} \\
&\quad = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\sum_{m=0}^{k-1} b(p,m)[j+\nu]_m}{\Gamma(1+j+\nu)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{k-1} b(p,m) \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(1+j+\nu-m)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{k-1} b(p,m) \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m} \\
&\qquad \times \left(J_{\nu-m}(R\sqrt{c}) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(1+j+\nu-m)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu-m} \right) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{k-1} b(p,m) \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m} J_{\nu-m}(R\sqrt{c}) \\
&\qquad - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{b(p,m)}{\Gamma(1+j+\nu-m)} \\
&\quad = \sum_{m=0}^{k-1} b(p,m) \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m} J_{\nu-m}(R\sqrt{c}) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)} \left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu}.
\end{aligned}$$

Les coefficients $a(p,l)$ n'ont d'abord été définis que pour $l \geq 0$, mais la formule (7) permet de les généraliser à $l < 0$, justifiant la dernière expression ci-dessus. Un calcul dans quelques cas permettra au lecteur de soupçonner que, pour tous $0 \leq p, r \leq k-1$,

$$a(p, r-k) = (-1)^{r-k+1} \delta_{p,r},$$

ce qui devient évident si l'on considère la signification de la formule (5) pour $-k \leq l < 0$, les $\Delta^0 u, \ldots, \Delta^{k-1} u$ ayant été implicitement supposées linéairement indépendantes.

Remarquons que ceci implique l'identité, pour $0 \leq p \leq k-1$,

$$a(p, x-k) = \frac{1}{p!(k-1-p)!} \frac{[x]_k}{(x-p)}, \tag{9}$$

puisque ce sont là deux polynômes de degré $k-1$ prenant la même valeur aux points $0,\dots,k-1$. En particulier, en comparant le coefficient dominant de $a(p,x-k)$ dans (9) et (8) nous obtenons

$$b(p,k-1)=\frac{1}{p!(k-1-p)!}=\frac{1}{(k-1)!}\binom{k-1}{p}. \tag{10}$$

Nous avons donc

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2j+\nu}$$
$$=\sum_{m=0}^{k-1}b(p,m)\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m}J_{\nu-m}(R\sqrt{c})-(-1)^{1-k}\frac{1}{p!\Gamma(1+p+\nu)}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2p+\nu}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)}\left(\frac{R}{2}\right)^{2j}\Delta^j u$$
$$=(-1)^{k-1}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{-\nu}\sum_{p=0}^{k-1}c^{-p}\left(\sum_{m=0}^{k-1}b(p,m)\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m}J_{\nu-m}(R\sqrt{c})\right)\Delta^p u$$
$$-\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{-\nu}\sum_{p=0}^{k-1}c^{-p}\frac{1}{p!\Gamma(1+p+\nu)}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{2p+\nu}\Delta^p u.$$

D'où enfin la formule

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)}\left(\frac{R}{2}\right)^{2j}\Delta^j u \tag{11}$$
$$=(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{m-\nu}J_{\nu-m}(R\sqrt{c})\Big(\sum_{p=0}^{k-1}b(p,m)c^{-p}\Delta^p u\Big).$$

6. Résultats

THÉORÈME. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, k un entier ≥ 1, u une fonction de $C^0(U)$ et c une constante non nulle.*

(i) *Supposons $u\in C^{2k-2}_{\Delta}(U)$. Si, pour tout $x\in U$, il existe $r_0=r_0(x)>0$ avec $B'(x,r_0)\subset U$ tel que, quel que soit $0<r\leq r_0$,*

$$\mathfrak{M}(u,x,r)=\Gamma(n/2)(-1)^{k-1}$$
$$\times\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{m-\nu}J_{\nu-m}(r\sqrt{c})\Big(\sum_{p=0}^{k-1}b_k(p,m)c^{-p}\Delta^p u(x)\Big),$$

alors $(\Delta+c)^k u=0$ sur U.

(ii) *Réciproquement, si* $(\Delta + c)^k u = 0$ *sur* U, *alors la formule de la moyenne ci-dessus est vérifiée pour tous* $x \in U$ *et* $r > 0$ *avec* $B'(x, r) \subset U$.

R e m a r q u e. Les coefficients $b_k(p, m)$ sont définis, pour $0 \le p$, $m \le k-1$, par

$$\sum_{m=0}^{k-1} b_k(p,m)[x+\nu]_m = \frac{1}{p!(k-1-p)!}\frac{[x]_k}{(x-p)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{n-2}{2}.$$

P r e u v e d u T h é o r è m e. Supposons d'abord que, pour tout $x \in U$, il existe $r_0 > 0$ avec $B'(x, r_0) \subset U$ tel que, quel que soit $0 < r \le r_0$, la formule de la moyenne énoncée en (i) soit vérifiée. Alors, vu le paragraphe 3, $u \in C^\infty_\Delta(U)$ et, utilisant la proposition 2, nous avons

$$\Delta^k u(x) = \lim_{r \to 0_+} -\sum_{p=0}^{k-1} A(p,r) \cdot \Delta^p u(x)$$

où

$$\begin{aligned} &A(p,r) \\ &= k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{2k} \\ &\quad \times \left[(-1)^k c^{-p}\left(\sum_{m=0}^{k-1} b(p,m)\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{m-\nu} J_{\nu-m}(r\sqrt{c})\right) + \frac{1}{p!\Gamma(p+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\right] \\ &= k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{2}{r}\right)^{2k} \\ &\quad \times \left[(-1)^k c^{-p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)}\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{2j} + \frac{1}{p!\Gamma(p+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p}\right] \end{aligned}$$

(voir calculs après la formule (8)).

La série définissant $A(p, r)$ étant uniformément convergente dans $B'(0, r_0)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0_+} A(p,r) \\ &\quad = k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\left[(-1)^k c^{-p}\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{(-c)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)}\lim_{r\to 0_+}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j-2k}\right] \\ &\qquad + \lim_{r\to 0_+} k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)\left[(-1)^k c^{-p}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-c)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)} 1 \left(\frac{r}{2}\right)^{2j-2k}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{p!\Gamma(p+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2p-2k}\right] \end{aligned}$$

$$+\lim_{r\to 0_+} k!\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)(-1)^k c^{k-p}\frac{(-1)^k a(p,0)}{k!\Gamma(1+k+\nu)}$$
$$= 0+0+c^{k-p}\binom{k}{p},$$

parce que $a(p,j-k) = (-1)^{j-k+1}\delta_{p,j}$ si $0 \le j \le k-1$ et $a(p,0) = \binom{k}{p}$. Bref,

$$\Delta^k u(x) = -\sum_{p=0}^{k-1} c^{k-p}\binom{k}{p}\Delta^p u(x);$$

d'où $(\Delta+c)^k u(x) = 0$ et (i) est établi.

Supposons ensuite que $(\Delta+c)^k u = 0$ sur U. Comme l'opérateur $(\Delta+c)^k$ est hypoelliptique, u est C^∞ sur U (cf. [S], p. 143); par le paragraphe 5 nous savons que la série

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}\Delta^j u(x)$$

converge uniformément sur tout compact et vaut, d'après (11),

$$(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{m-\nu} J_{\nu-m}(r\sqrt{c})\Big(\sum_{p=0}^{k-1} b(p,m)c^{-p}\Delta^p u(x)\Big).$$

La proposition 1 appliquée à u et à $B'(x,r)\subset U$ donne

$$\mathfrak{M}(u,x,r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!\Gamma(j+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2j}\Delta^j u(x)$$
$$+\mathcal{I}_{m+1}\mathfrak{M}(\Delta^{m+1}u,x,\varrho)(r).$$

De plus,

$$|\mathcal{I}_{m+1}\mathfrak{M}(\Delta^{m+1}u,x,\varrho)(r)|$$
$$\le \frac{\Gamma(n/2)}{(m+1)!\Gamma(m+1+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2m+2}\sup_{y\in B'(x,r)}|\Delta^{m+1}u(y)|$$
$$\le \frac{\Gamma(n/2)}{(m+1)!\Gamma(m+1+n/2)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2m+2}$$
$$\times\sum_{p=0}^{k-1}|a(p,m+1-k)c^{m+1-p}|\sup_{y\in B'(x,r)}|\Delta^p u(y)|;$$

comme les séries

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j a(p,j-k)}{j!\Gamma(1+j+\nu)}\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{2j},\qquad p=0,\dots,k-1,$$

convergent absolument et uniformément sur tout compact, nous en déduisons que

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{I}_{m+1}\mathfrak{M}(\Delta^{m+1}u, x, \varrho)(r) = 0.$$

La conclusion suit.

Remarque. Une autre méthode pour obtenir ce résultat consisterait à calculer l'équation différentielle vérifiée par la fonction radiale $r \mapsto \mathfrak{M}(u, x, r)$, puis à l'intégrer (cf., pour $k = 1$, [FH], prop. II.3, p. 25; voir aussi [Va] dans ce même cercle d'idées).

COROLLAIRE 1. *Soit* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *une distribution à support dans* S^{n-1}. *Notons* $\tau = \mathcal{F}T$ *et prenons* k *un entier* ≥ 1. *La fonction* τ *vérifie sur tout* $\mathbb{R}^n$ *l'équation* $(\Delta + 4\pi^2)^k\tau = 0$ *si et seulement si, quel que soit* $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}(\tau, x, r) = O(r^{k-(n+1)/2})$ *à l'infini.*

Preuve. La condition $\mathfrak{M}(\tau, x, r) = O(r^{k-(n+1)/2})$ à l'infini est nécessaire d'après la partie (ii) du théorème et parce que $J_\mu(t) = O(t^{-1/2})$ à l'infini pour tous $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (cf. [W], p. 199).

Montrons qu'elle est suffisante. Nous savons déjà qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $(\Delta + 4\pi^2)^l\tau = 0$ sur tout $\mathbb{R}^n$ (voir [S], pp. 128 et 284). Si l est inférieur ou égal à k, il n'y a rien à établir. Supposons donc $l > k$. Vu le théorème, partie (ii),

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\tau, x, r) &= \Gamma(n/2)(-1)^{l-1} \\ &\quad\times \sum_{m=0}^{l-1} \left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{m-\nu} J_{\nu-m}(r\sqrt{c})\Big(\sum_{p=0}^{l-1} b_l(p, m)c^{-p}\Delta^p\tau(x)\Big)\end{aligned}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, où $c = 4\pi^2$. Comme

$$\left(\frac{r\sqrt{c}}{2}\right)^{l-1-\nu} J_{\nu-l+1}(r\sqrt{c}) = O(r^{l-1-(n-2)/2-1/2}) = O(r^{l-(n+1)/2}),$$

l'hypothèse entraîne

$$\sum_{p=0}^{l-1} b_l(p, l-1)c^{-p}\Delta^p\tau(x) = 0,$$

c'est-à-dire (voir (10))

$$\sum_{p=0}^{l-1} \frac{1}{(l-1)!}\binom{l-1}{p} c^{-p}\Delta^p\tau(x) = 0$$

ou encore, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{(4\pi^2)^{1-l}}{(l-1)!}(\Delta + 4\pi^2)^{l-1}\tau(x) = 0.$$

En procédant par induction, on montre que $(\Delta + 4\pi^2)^k \tau = 0$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{spec} f \subset S^{n-1}$. *Alors* $(\Delta + 4\pi^2)^k f = 0$ *sur tout* $\mathbb{R}^n$, *où* $k = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

Preuve. Comme le spectre de f est inclus dans S^{n-1}, f est la transformée de Fourier d'une distribution à support dans S^{n-1}. Parce que f est bornée, $\mathfrak{M}(f, x, r) = O(1)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Soit $l \in \mathbb{N}$ minimal pour lequel $(\Delta + 4\pi^2)^l f = 0$, c'est-à-dire, vu le corollaire 1, minimal pour lequel $\mathfrak{M}(f, x, r) = O(r^{l-(n+1)/2})$ à l'infini; nous devons avoir $l - (n+1)/2 \le 0$, i.e. $l \le \lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

BIBLIOGRAPHIE

[CH] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience, New York, 1966.

[FH] J. Faraut et Kh. Harzallah, *Deux cours d'analyse harmonique*, Birkhäuser, Boston, 1987.

[F] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Krieger, Malabar, 1983.

[H] C. S. Herz, *Spectral synthesis for the circle*, Ann. of Math. 68 (1958), 709–712.

[P] P. Pizetti, *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera*, Accad. Naz. Lincei 18 (1909), 182–185.

[R] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, Wiley, New York, 1968.

[S] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[Va] N. Th. Varopoulos, *Spectral synthesis on spheres*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 379–387.

[Vo] Vo-Khac Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, Vuibert, Paris, 1972.

[W] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1922.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE LAUSANNE
1015 LAUSANNE, SWITZERLAND

Reçu par la Rédaction le 13.4.1994