COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVIII 1995 FASC. 2

# *RESTITUTION DES COEFFICIENTS D'ONDELETTES DES SIGNAUX FILTRÉS*

PAR

E. MAGHRAS (TALENCE)

**1. Introduction.** Une ondelette est un motif $\Psi$ bien localisé en temps et en fréquences, très régulier et très oscillant tel que la famille $(\Psi_{j,l})_{j,l\in\mathbb{Z}}$, où $\Psi_{j,l}(t) = 2^{j/2}\Psi(2^j t - l)$, forme une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie.

Dans ce cas, pour tout signal $f$ d'énergie finie, on a la décomposition en série d'ondelettes de $f$ et la formule de synthèse de $f$ suivante ([5, 9]) :

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c(j,l)\Psi_{j,l},$$

où

$$c(j,l) = \langle f \mid \Psi_{j,l}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\Psi_{j,l}(t)}\,dt,$$

où $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

Les fonctions $\Psi_{j,l}$ s'appellent les *ondelettes* et $\Psi$ s'appelle l'*ondelette analysante*. Les coefficients $c(j,l)$ s'appellent les *coefficients d'ondelettes* du signal $f$.

La transformation qui à tout signal $f$ d'énergie finie associe la suite numérique $(c(j,l))_{j,l\in\mathbb{Z}}$ s'appelle la *transformation en ondelettes*.

Dans la décomposition en série d'ondelettes de $f$ on voit que l'on a une série double dont les indices $j$ et $l$ ont la signification suivante : le paramètre $j$ est lié aux fréquences, plus précisement il est lié à la position du spectre de l'ondelette $\Psi_{j,l}$; par contre, le paramètre $l$ est lié au temps, plus précisement il est lié à la position temporelle de l'ondelette $\Psi_{j,l}$.

C'est pour cela que les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$, $j,l\in\mathbb{Z}$, représentent le signal $f$ dans le domaine temps-fréquences.

Notre problème est le suivant : soient deux filtres $\mu_1$ et $\mu_2$ correspondant à des prises de moyenne

1991 *Mathematics Subject Classification*: 42A85, 42A16, 94A12, 94B10, 94A24.

$$\mu_j = \frac{1}{2r_j}\chi_{[-r_j,r_j]}, \qquad j = 1, 2,$$

où $\chi_{[-r_j,r_j]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[-r_j, r_j]$, et soit $f$ un signal d'énergie finie. Le signal $f$ est inconnu, mais on dispose de la mesure des observations de ce signal à travers les appareils $\mu_1$ et $\mu_2$, c'est-à-dire on connaît les signaux de sortie $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$, où $\star$ désigne l'opération de convolution. On veut restituer le signal $f$ à partir de $\mu_j \star f$, $j = 1, 2$, via la transformation en ondelettes.

Pour cela, on décompose $f$ en série d'ondelettes, puis on donne des formules explicites permettant de calculer ses coefficients d'ondelettes $(c(j,l))_{j,l\in\mathbb{Z}}$ à xpartir des mesures observées $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ et ce par des opérations de prises de moyenne et de sommation de manière à ne pas amplifier le bruit relatif au signal $f$ lors de sa restitution. L'idée de la méthode est basée sur les mécanismes explicites de déconvolution ([2, 3, 4, 10]).

Enfin, on établit aussi des relations entre les coefficients d'ondelettes du signal $f$ et les coefficients de Fourier des périodisées de $(\mu_1 \star f)\chi_{I_2}$ et $(\mu_2 \star f)\chi_{I_1}$, où $I_j$ désigne un intervalle de longueur $2r_j$.

**2. Ondelettes et restitution.** Nous supposons dans toute la suite que $r_1$ et $r_2$ sont deux nombres réels strictement positifs simultanément mal approchés par les rationnels, c'est-à-dire il existe deux constantes strictement positives $c$ et $k$ telles que

$$\left|\frac{r_1}{r_2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{|q|^k}, \qquad \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{Z}^*. \tag{1}$$

Un tel couple $(r_1, r_2)$ vérifiant (1) existe; en effet, si $r_1$ et $r_2$ sont deux nombres algébriques et $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors il existe deux constantes strictement positives $c$ et $k$ (en fait, $k \geq 2$) telles que $r_1/r_2$ vérifie la condition (1).

Le cas optimal où $k = 2$ est satisfait par tous les nombres quadratiques non rationnels, comme par exemple

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2}, \qquad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{3}, \quad \text{etc. ([7]).}$$

Théorème 2.1. *Soit $f$ un signal de classe $C^\infty$ et d'énergie finie sur $\mathbb{R}$. Soit*

$$\mu_j = \frac{1}{2r_j}\chi_{[-r_j,r_j]}, \qquad j = 1, 2,$$

*les filtres correspondant à des prises de moyenne, avec $r_1$ et $r_2$ vérifiant la condition* (1). *Soit $\varphi$ une fonction suffisamment régulière et telle que le support de $\varphi$ est contenu dans $[-(r_1 + r_2), r_1 + r_2]$. On peut alors calculer $\langle f \mid \varphi\rangle$ à partir de $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ par la formule suivante :*

$$\langle f \mid \varphi\rangle = \langle \nu_{1,\varphi}; \mu_1 \star f\rangle + \langle \nu_{2,\varphi}; \mu_2 \star f\rangle,$$

*où $\langle\,;\rangle$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\nu_{1,\varphi}$ et $\nu_{2,\varphi}$ étant des distributions à support compact supportées respectivement par $[-r_2,r_2]$ et $[-r_1,r_1]$ et données par*

$$\nu_{1,\varphi}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{\overline{\widehat{\varphi}(k\pi/r_2)}}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)}\,\nu_{1,k},$$
$$\nu_{2,\varphi}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{\overline{\widehat{\varphi}(k\pi/r_1)}}{\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)}\,\nu_{2,k},$$

*où $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ sont des distributions à support compact définies par leur transformée de Fourier et localisées par*

$$\widehat{\nu}_{1,k}(z)=\frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-k\pi/r_2},\qquad \mathrm{cv}(\operatorname{supp}\nu_{1,k})=[-r_2,r_2],$$
$$\widehat{\nu}_{2,k}(z)=\frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z-k\pi/r_1},\qquad \mathrm{cv}(\operatorname{supp}\nu_{2,k})=[-r_1,r_1],$$

$\mathrm{cv}(\cdot)$ *désignant la prise d'enveloppe convexe.*

Remarque. On sait que si $\mu$ est une distribution à support compact dans $\mathbb{R}$, et si $\beta$ est un zéro de sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$, alors la fonction $\widehat{\mu}(z)/(z-\beta)$ est la transformée de Fourier, au sens des distributions, de la distribution à support compact $T(\beta)$ dont l'action sur une fonction test $\varphi$ s'écrit

$$\langle T(\beta);\varphi\rangle=-i\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^x\varphi(t)e^{i\beta(t-x)}\,dt\Big)\mu(x)\,dx.$$

Or $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des mesures à support compact. D'autre part, $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ sont des mesures à support compact; par suite, on pourrait démontrer que $\nu_{1,\varphi}$ et $\nu_{2,\varphi}$ sont en fait des mesures à support compact.

Preuve du théorème 2.1. Les transformées de Fourier des mesures $\mu_j$, $j=1,2$, sont données par $\widehat{\mu}_j(z)=\sin(r_jz)/(r_jz)$, $j=1,2$.

La condition (1) implique que $r_1/r_2$ est irrationnel, donc $\widehat{\mu}_1$ et $\widehat{\mu}_2$ n'ont pas de zéros communs.

On peut construire une suite de cercles $(\Gamma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ avec $\lim_{l\to\infty}(\text{rayon}(\Gamma_l))=\infty$ et $\Gamma_l$ contenu dans l'intérieur de $\Gamma_{l+1}$ tels qu'il existe deux constantes strictement positives $\gamma_1$ et $\gamma_2$ avec

$$|\sin(r_1z)|\ge\gamma_1e^{r_1|\operatorname{Im}z|},\qquad z\in\Gamma_l,\tag{2}$$
$$|\sin(r_2z)|\ge\gamma_2e^{r_2|\operatorname{Im}z|},\qquad z\in\Gamma_l.\tag{3}$$

D'après la formule intégrale de Cauchy, on peut écrire, pour $z$ intérieur à $\Gamma_l$,

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\mu}_1(\xi)\widehat{\mu}_2(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\mu}_1(z)\widehat{\mu}_2(z)}{(\xi - z)\widehat{\mu}_1(\xi)\widehat{\mu}_2(\xi)}\,d\xi\\ &\quad + \frac{\widehat{\mu}_1(z)\widehat{\mu}_2(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma_l}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{(\xi - z)\widehat{\mu}_1(\xi)\widehat{\mu}_2(\xi)}\,d\xi.\end{aligned}$$

En vertu du théorème des résidus on a

$$\begin{aligned}(*)\qquad \widehat{\varphi}(z) &= \widehat{\mu}_1(z)\sum_{\substack{\hat{\mu}_2(\alpha)=0\\ |\alpha|<\mathrm{rayon}(\Gamma_l)}}\frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)}\cdot\frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}\\ &\quad + \widehat{\mu}_2(z)\sum_{\substack{\hat{\mu}_1(\alpha)=0\\ |\alpha|<\mathrm{rayon}(\Gamma_l)}}\frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1'(\alpha)\widehat{\mu}_2(\alpha)}\cdot\frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z-\alpha}\\ &\quad + \frac{\widehat{\mu}_1(z)\widehat{\mu}_2(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma_l}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{(\xi - z)\widehat{\mu}_1(\xi)\widehat{\mu}_2(\xi)}\,d\xi.\end{aligned}$$

Or, si $\widehat{\mu}_j(\alpha) = 0$, alors

$$(4)\qquad |\mu_j'(\alpha)| \ge 1/|\alpha|, \qquad j = 1, 2.$$

La condition arithmétique (1) nous donne

$$(5)\qquad \widehat{\mu}_2(\alpha) = 0 \Rightarrow |\widehat{\mu}_1(\alpha)| \ge c/|\alpha|^k,$$

$$(6)\qquad \widehat{\mu}_1(\alpha) = 0 \Rightarrow |\widehat{\mu}_2(\alpha)| \ge c/|\alpha|^k,$$

avec pour $k$ la même constante que celle intervenant dans (1), ce qui n'est pas forcément le cas de la constante $c$.

On va montrer la convergence dans $\widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$ des séries figurant dans l'égalité $(*)$. Pour cela on a

$$\frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|}\cdot\frac{1}{|z-\alpha|} \le \frac{1}{c}|\widehat{\varphi}(\alpha)|\,|\alpha|^{k+1}\frac{1}{||z| - |\alpha||} \qquad \text{(d'après (4), (5))}$$

et si $\varphi$ est de classe $C^{k+1+\varepsilon}$ $(\varepsilon \ge 1)$, alors il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$|\widehat{\varphi}(\alpha)| \le c_1/|\alpha|^{k+1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon \text{ entier } > 1)$$

et par conséquent

$$\frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|}\cdot\frac{1}{|z-\alpha|} \le \frac{c_1}{c}\cdot\frac{1}{|\alpha|^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{||z| - |\alpha||}.$$

Si $z$ est dans un compact $K$ de $\mathbb{R}$, alors il existe une constante $c_2(K) > 0$

telle que $|\widehat{\mu}_1(z)| \le c_2(K),\ z \in K$, ce qui implique

$$\frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|} \cdot \frac{|\widehat{\mu}_2(z)|}{|z-\alpha|} \le \frac{c_1 c_2(K)}{c} \cdot \frac{1}{|\alpha|^\varepsilon} \cdot \frac{1}{||z|-|\alpha||}, \qquad z \in K,$$

tandis que

$$\frac{c_1 c_2(K)}{c} \cdot \frac{1}{|\alpha|^\varepsilon} \cdot \frac{1}{||z|-|\alpha||} \sim c'(K)\frac{1}{|\alpha|^{1+\varepsilon}}, \qquad |\alpha| \to \infty,$$

avec $c'(K) = c_1 c_2(K)/c$. Donc la série

$$\sum_{\hat{\mu}_2(\alpha)=0} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ (car la série $\sum_{\hat{\mu}_2(\alpha)=0} 1/|\alpha|^{1+\varepsilon}$ converge).

De plus, on peut montrer qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que

$$\frac{|\widehat{\mu}_2(z)|}{|z-\alpha|} \le c_3 e^{r_2|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (\text{avec } \widehat{\mu}_2(\alpha) = 0).$$

Donc si l'on pose $\varrho_l = \text{rayon}(\mathit{\Gamma}_l)$,

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{\substack{\hat{\mu}_2(\alpha)=0\\ 0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{\hat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}\Bigg| &\le \sum_{\substack{\hat{\mu}_2(\alpha)=0\\ 0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|}\left|\frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}\right| \\ &\le c_3 \sum_{\substack{\hat{\mu}_2(\alpha)=0\\ 0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|} e^{r_2|\operatorname{Im} z|}.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)||\widehat{\mu}_2'(\alpha)|} \le \frac{c_1}{c}\frac{1}{|\alpha|^\varepsilon},$$

ce qui implique que si $\varepsilon > 1$, alors la série

$$\sum_{\hat{\mu}_2(\alpha)=0} \frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)||\widehat{\mu}_2'(\alpha)|}$$

converge.

On suppose $\varepsilon > 1$ et on pose

$$c_4 = \sum_{\hat{\mu}_2(\alpha)=0} \frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)||\widehat{\mu}_2'(\alpha)|}.$$

On a

$$\Big| \sum_{\substack{\hat\mu_2(\alpha)=0\\0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}\Big| \le \sum_{\substack{\hat\mu_2(\alpha)=0\\0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{|\widehat{\varphi}(\alpha)|}{|\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)|} \cdot \frac{|\widehat{\mu}_2(z)|}{|z-\alpha|}$$
$$\le c_3c_4e^{r_2|\operatorname{Im} z|}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Donc la suite

$$\Big( \sum_{\substack{\hat\mu_2(\alpha)=0\\0<|\alpha|<\varrho_l}} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}\Big)_{l\in\mathbb{N}}$$

est bornée dans $\widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$. Il en résulte que la série

$$\sum_{\hat\mu_2(\alpha)=0} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha}$$

converge dans $\widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$.

On fait le même raisonnement pour l'autre série car $\widehat{\mu}_1$ et $\widehat{\mu}_2$ jouent des rôles symétriques.

Donc les séries figurant dans l'égalité $(*)$ convergent dans $\widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$; le choix de $\varepsilon$ ($\varepsilon > 1$) assure qu'il y a convergence au sens des mesures. De plus, d'après le théorème de Paley–Wiener, on a une estimation sur $\widehat{\varphi}$ et on utilise les estimations (2) et (3) pour montrer que

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\Gamma_l} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{(\xi-z)\widehat{\mu}_1(\xi)\widehat{\mu}_2(\xi)}\, d\xi = 0.$$

On fait tendre $l$ vers $\infty$ dans l'égalité $(*)$ et l'on obtient

$$\widehat{\varphi}(z) = \widehat{\mu}_1(z) \sum_{\hat\mu_2(\alpha)=0} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1(\alpha)\widehat{\mu}_2'(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-\alpha} + \widehat{\mu}_2(z) \sum_{\hat\mu_1(\alpha)=0} \frac{\widehat{\varphi}(\alpha)}{\widehat{\mu}_1'(\alpha)\widehat{\mu}_2(\alpha)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z-\alpha}.$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse et

$$\widehat{\mu}_j(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi/r_j,\ k \in \mathbb{Z}^*,\ j = 1,2,$$

il vient

$$\varphi = \mu_1 \star \Big[ \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_2)}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)} \nu_{1,k} \Big]$$
$$+ \mu_2 \star \Big[ \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_1)}{\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \nu_{2,k} \Big],$$

où $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ sont des mesures à support compact définies par

$$\widehat{\nu}_{1,k}(z) = \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z-k\pi/r_2}, \qquad \widehat{\nu}_{2,k}(z) = \frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z-k\pi/r_1},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{cv}(\operatorname{supp}\nu_{1,k}) &= [-r_2, r_2] \\ \mathrm{cv}(\operatorname{supp}\nu_{2,k}) &= [-r_1, r_1] \end{aligned}\right. \quad \text{(d'après le théorème des supports).}$$

Si $f$ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$, nous pouvons alors calculer $\langle f \mid \varphi\rangle$ par

$$\begin{aligned} \langle f \mid \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f\overline{\varphi}\, dt = (\check{f} * \overline{\varphi})(0) \qquad (\overline{\varphi} = \text{conjugué de } \varphi) \\ &= [\check{f} * (\mu_1 * \nu_{1,\varphi} + \mu_2 * \nu_{2,\varphi})](0), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \nu_{1,\varphi} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\overline{\widehat{\varphi}(k\pi/r_2)}}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)}\,\nu_{1,k}, \\ \nu_{2,\varphi} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\overline{\widehat{\varphi}(k\pi/r_1)}}{\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)}\,\nu_{2,k}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle f \mid \varphi\rangle &= (\nu_{1,\varphi} \star \mu_1 \star \check{f} + \nu_{2,\varphi} \star \mu_2 \star \check{f})(0) \\ &= \langle \nu_{1,\varphi}; \mu_1 \star f\rangle + \langle \nu_{2,\varphi}; \mu_2 \star f\rangle. \end{aligned}$$

D'où le théorème. ■

Remarque. Dans le théorème 2.1, il suffit que $\varphi$ soit de classe $C^{k+1+\varepsilon}$ où $k$ est la constante intervenant dans la condition arithmétique (1) et $\varepsilon$ entier $>1$. Par exemple, dans le cas où $r_1 = 1$ et $r_2 = \sqrt{2}$ on aura $k = 2$, donc $\varphi$ sera de classe $C^{3+\varepsilon}$; si l'on prend $\varepsilon = 2$, dans le cas $r_1 = 1$ et $r_2 = \sqrt{2}$, il suffit que $\varphi$ soit de classe $C^5$.

Proposition 2.2. *Les mesures à support compact $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$, définies par leur transformée de Fourier dans le théorème* 2.1, *sont données pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^*$ par*

$$\begin{aligned} \nu_{1,k}(t) &= \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_2)(t+r_2)} - 1)\chi_{[-r_2,r_2]}(t), \\ \nu_{2,k}(t) &= \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_1)(t+r_1)} - 1)\chi_{[-r_1,r_1]}(t). \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\widehat{\nu}_{1,k}(z) = \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z - k\pi/r_2}$$

(rappelons que $\widehat{\mu}_2(k\pi/r_2) = 0$). Donc

$$\begin{aligned} \langle \nu_{1,k}; \varphi\rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \Big( \int_0^x \varphi(t) e^{i(k\pi/r_2)(t-x)}\, dt\Big) \mu_2(x)\, dx \\ &= \frac{-i}{2r_2} \int_{-r_2}^{r_2} \Big( \int_0^x \varphi(t) e^{i(k\pi/r_2)(t-x)}\, dt\Big)\, dx, \end{aligned}$$

d'après la remarque suivant la formulation du théorème 2.1. Grâce au théorème de Fubini on aura

$$\langle \nu_{1,k}; \varphi\rangle = \frac{i}{2r_2}\Big[\int_{-r_2}^{0} \varphi(t)\Big(\int_{-r_2}^{t} e^{i(k\pi/r_2)(t-x)}\,dx\Big)\,dt - \int_{0}^{r_2} \varphi(t)\Big(\int_{t}^{r_2} e^{i(k\pi/r_2)(t-x)}\,dx\Big)\,dt\Big].$$

On intègre et on aura l'expression donnée de $\nu_{1,k}$. De même pour $\nu_{2,k}$. ■

D'après la proposition 2.2, on constate que $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ ne sont autres que des fonctions à support compact et d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, de support respectivement $[-r_2, r_2]$ et $[-r_1, r_1]$.

Par conséquent, $\nu_{1,\varphi}$ et $\nu_{2,\varphi}$ sont des fonctions à support compact et d'énergie finie sur $\mathbb{R}$. Donc le produit de dualité figurant dans le théorème 2.1 s'exprime à l'aide du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$. Plus précisément, on a

$$\langle \nu_{1,\varphi}; \mu_1 \star f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \nu_{1,\varphi}(\mu_1 \star f)\,dx = \langle \mu_1 \star f \mid \overline{\nu}_{1,\varphi}\rangle = \langle \mu_1 \star f \mid \nu_{1,\overline{\varphi}}\rangle$$

De même, $\langle \nu_{2,\varphi}; \mu_2 \star f\rangle = \langle \mu_2 \star f \mid \nu_{2,\overline{\varphi}}\rangle$.

Par suite, la formule de reconstruction figurant dans le théorème 2.1 s'écrit

$$\langle f \mid \varphi\rangle = \langle \mu_1 \star f \mid \nu_{1,\overline{\varphi}}\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \nu_{2,\overline{\varphi}}\rangle.$$

D'après le théorème 2.1, cette formule est vraie pour tout signal $f$ d'énergie finie et de classe $C^\infty$. En utilisant la densité de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans l'espace des signaux d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, on déduit que cette formule est vraie pour tout signal $f$ appartenant à $L^2(\mathbb{R})$.

2.3. *Restitution des coefficients d'ondelettes.* Nous savons qu'il existe une ondelette analysante $\psi$ réelle de classe $C^m$, à support compact et d'énergie 1, telle que la collection des fonctions $(\psi_{j,l})_{j,l\in\mathbb{Z}}$, où $\psi_{j,l}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - l)$, constitue une base orthonormée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie ([5]).

De plus, on peut avoir une ondelette réelle $\psi$ telle que le support de $\psi$ vit dans l'intervalle $[1-N, N]$, où $N \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre lié à la régularité de l'ondelette $\psi$ ([5]).

Plus précisément, plus $N$ est grand, plus l'ondelette $\psi$ est régulière. Par exemple, pour $N = 4$, $\psi$ est de classe $C^1$; pour $N = 7$, $\psi$ est de classe $C^2$; pour $N = 11$, $\psi$ est de classe $C^3$.

Ceci étant, on va prendre dorénavant une ondelette $\psi$ correspondant à un $N$ grand pour que l'ondelette soit suffisamment régulière.

On va déterminer les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$, $j, l \in \mathbb{Z}$, de $f$ à partir de $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ avec $c(j,l) = \int_{\mathbb{R}} f\psi_{j,l}\,dt$.

2.3.1. *Détermination des coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $j$ grand*

THÉORÈME 2.3. *Soient $f$ un signal d'énergie finie et*

$$\mu_j = \frac{1}{2r_j}\chi_{[-r_j,r_j]}, \qquad j = 1,2,$$

*deux filtres correspondant à des prises de moyenne, avec $r_1$ et $r_2$ vérifiant la condition* (1). *Il existe un procédé explicite pour exprimer les coefficients d'ondelettes $c(j,0)$ à partir de $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ pour les entiers $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$. D'une façon plus précise, on a*

$$c(j,0) = 2^{j/2}(\langle \mu_1 \star f \mid \theta_j^1\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \theta_j^2\rangle)$$

*pour tout entier $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$, où $\theta_j^1$ et $\theta_j^2$ sont des fonctions à support compact et d'énergie finie sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$\theta_j^1(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_2)}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_2)(t+r_2)} - 1)\chi_{[-r_2,r_2]}(t),$$

$$\theta_j^2(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_1)}{\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_1)(t+r_1)} - 1)\chi_{[-r_1,r_1]}(t),$$

$$\operatorname{supp}\theta_j^1 = [-r_2,r_2], \qquad \operatorname{supp}\theta_j^2 = [-r_1,r_1].$$

Preuve. Le support de l'ondelette $\psi$ est contenu dans $[1-N,N]$, donc le support de $\psi(2^j\cdot)$ est inclus dans $[(1-N)2^{-j}, N2^{-j}]$.

Pour que le support de $\psi(2^j\cdot)$ soit contenu dans $[-(r_1+r_2), r_1+r_2]$, il suffit que $[(1-N)2^{-j}, N2^{-j}] \subset [-(r_1+r_2), r_1+r_2]$, et cette inclusion est réalisée si $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$.

Par conséquent, le support de $\psi(2^j\cdot)$ est inclus dans $[-(r_1+r_2), r_1+r_2]$ pour tout $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$.

On applique le théorème 2.1 pour $\varphi = \psi(2^j\cdot)$ avec $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$ et l'on pose $\theta_j^1 = \nu_{1,\overline{\varphi}}$ et $\theta_j^2 = \nu_{2,\overline{\varphi}}$ ($\overline{\varphi} = \psi(2^j\cdot) = \varphi$), on remplace $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ par leur expression donnée par la proposition 2.2 et l'on a le théorème. ∎

Remarque. Le théorème précédent nous permet de calculer les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $l=0$. Mais pour $l \neq 0$, on remarque que $\psi(2^j(\cdot)-l) = \psi(2^j\cdot) \star \delta_{l2^{-j}}$ et les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$ et $l \in \mathbb{Z}$ sont donnés par

$$c(j,l) = 2^{j/2}[\langle \mu_1 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta_j^1\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta_j^2\rangle].$$

2.3.2. *Détermination des coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $j \leq -2$ et $l \in \mathbb{Z}$ lorsque* $r_1 = 1$. Nous supposerons dans toute cette section $r_1 = 1$, cas auquel on se ramène sans difficultés. On sait qu'il existe une ondelette $\psi$ de support contenu dans $[1-N,N]$, où $N \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre lié à la régularité de $\psi$.

Plus précisément, on se donne une suite finie $(h(n))_{n=0,\dots,2N-1}$ vérifiant certaines hypothèses (voir [5]) et à partir de cette suite on construit une fonction $\phi$ définie par sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega) \quad \text{avec} \quad m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{2N-1} h(n) e^{in\omega};$$

le support de $\phi$ est inclus dans $[0, 2N-1]$ et l'on a, le choix de $h$ étant fait de telle sorte,

$$m_0(\omega) = \Big(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\Big)^N \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) e^{in\omega}\Big), \qquad (f(n))_n \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Donc

$$\widehat{\phi}(\omega) = \Big(\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\Big(\frac{1+e^{i2^{-k}\omega}}{2}\Big)^{N-1}\Big[\sum_{n} f(n) e^{in2^{-k}\omega}\Big]\Big)\Big)\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1+e^{i2^{-k}\omega}}{2}\Big).$$

Or

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1+e^{i2^{-k}\omega}}{2}\Big) &= \prod_{k=1}^{\infty} e^{i2^{-k}\omega/2}\Big(\frac{e^{-i2^{-k}\omega/2}+e^{i2^{-k}\omega/2}}{2}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} e^{i2^{-k}\omega/2}\cos(2^{-k}\omega/2) \\
&= e^{i\Sigma_{k=1}^{\infty}2^{-k}\omega/2}\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \qquad \Big(\text{car } \prod_{k=1}^{\infty}\cos(2^{-k}x) = \frac{\sin x}{x}\Big) \\
&= e^{i\omega/2}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \qquad \Big(\text{car } \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{\phi}(\omega) = e^{i\omega/2}\Big(\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1+e^{i2^{-k}\omega}}{2}\Big)^{N-1}\Big[\sum_{n} f(n) e^{in2^{-k}\omega}\Big]\Big)\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}.$$

Introduisons la fonction $\theta$ définie par sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\theta}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1+e^{i2^{-k}\omega}}{2}\Big)^{N-1}\Big(\sum_{n} f(n) e^{in2^{-k}\omega}\Big).$$

et de support inclus dans $[0, 2N-2]$. Il vient

$$\widehat{\phi}(\omega) = e^{i\omega/2}\widehat{\theta}(\omega)\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}.$$

Or l'ondelette $\psi$ est définie par

$$\widehat{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n(-1)^n h(1-n)e^{in\omega/2}\widehat{\phi}(\omega/2)\qquad([5]).$$

Son support est inclus dans $[1-N,N]$, donc

$$\widehat{\psi}(\omega)=e^{i\omega/4}\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n(-1)^n h(1-n)e^{in\omega/2}\widehat{\theta}(\omega/2).$$

On définit la fonction $\varrho$ par sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\varrho}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n(-1)^n h(1-n)e^{in\omega/2}\widehat{\theta}(\omega/2);$$

son support est inclus dans $[3/2-N,N-1/2]$ (car celui de $\theta$ est inclus dans $[0,2N-2]$); alors

$$\widehat{\psi}(\omega)=e^{i\omega/4}\widehat{\varrho}(\omega)\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}.$$

On applique cette formule à $\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)$ pour les entiers $j\le -2$.

Remarque. $\varrho$ peut s'obtenir exactement comme $\psi$ dans [5] en ayant recours à un algorithme itératif construit à partir d'une suite $(h(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Pour $j=-2$,

$$\widehat{\psi}(4\omega)=e^{i\omega}\widehat{\varrho}(4\omega)\frac{\sin\omega}{\omega}=\frac{1}{4}e^{i\omega}\widehat{\varrho\left(\frac{\cdot}{4}\right)}(\omega)\widehat{\mu}_1(\omega).$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse on a

$$\psi\left(\frac{\cdot}{4}\right)=\varrho\left(\frac{\cdot+1}{4}\right)\star\mu_1=\varrho_{-2}\star\mu_1,\quad \text{où}\quad \varrho_{-2}=\varrho\left(\frac{\cdot+1}{4}\right).$$

Pour $j\le -2$,

$$\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)=e^{i2^{-j}\omega/4}\widehat{\varrho}(2^{-j}\omega)\frac{\sin(2^{-j}\omega/4)}{2^{-j}\omega/4}=e^{i2^{-j-2}\omega}\widehat{\varrho}(2^{-j}\omega)\frac{\sin(2^{-j-2}\omega)}{2^{-j-2}\omega}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sin(2^{-j-2}\omega)&=2\sin(2^{-j-3}\omega)\cos(2^{-j-3}\omega)\\&=2\cdot 2\sin(2^{-j-4}\omega)\cos(2^{-j-4}\omega)\cos(2^{-j-3}\omega)\\&=2^{-j-2}(\cos(2^{-j-3}\omega)\cos(2^{-j-4}\omega)\dots\cos\omega)\sin\omega.\end{aligned}$$

On a donc la formule

$$\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)=e^{i2^{-j-2}\omega}\widehat{\varrho}(2^{-j}\omega)[\cos(2^{-j-3}\omega)\cos(2^{-j-4}\omega)\dots\cos\omega]\frac{\sin\omega}{\omega}.\tag{7}$$

Soit $\varrho_j,\ j\le -2$, les fonctions telles que

$$\psi(2^j\cdot)=\varrho_j(\cdot)\star\mu_1.\tag{8}$$

On écrit l'égalité (8) en termes de transformée de Fourier et l'on identifie avec (7); on voit que $\varrho_j$, pour chaque $j \leq -2$, est défini par sa transformée de Fourier :

(9) $$\widehat{\varrho}_j(\omega) = 2^{-j} e^{i2^{-j-2}\omega} \widehat{\varrho}(2^{-j}\omega)[\cos(2^{-j-3}\omega)\cos(2^{-j-4}\omega)\ldots\cos\omega].$$

Les $\varrho_j$ sont à support compact car $\varrho$ l'est aussi.

Finalement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. *Soit $f$ un signal d'énergie finie. Il existe un procédé explicite pour exprimer les coefficients d'ondelettes $c(j,0)$ à partir de $\mu_1 \star f$ pour les entiers $j \leq -2$. Plus précisément, on a*

$$c(j,0) = 2^{j/2}\langle \varrho_j \mid \mu_1 \star f\rangle \qquad \text{pour tout entier } j \leq -2,$$

*où $\varrho_j$ est défini par* (9).

Remarque. Les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$, $j \leq -2$ et $l \in \mathbb{Z}$, se calculent à partir de $\mu_1 \star f$ par

$$c(j,l) = 2^{j/2}\langle \delta_{l2^{-j}} \star \varrho_j \mid \mu_1 \star f\rangle, \qquad j \leq -2,\ l \in \mathbb{Z},$$

car $\psi(2^j(\cdot) - l) = \delta_{l2^{-j}} \star \psi(2^j\cdot)$ et $\psi(2^j\cdot) = \varrho_j \star \mu_1$.

2.3.3. *Détermination des coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour les entiers $j$ tels que $-1 \leq j < \log_2(N/(r_1+r_2))$*

THÉORÈME 2.5. *Soit $f$ un signal d'énergie finie. Soit*

$$\mu_j = \frac{1}{2r_j}\chi_{[-r_j,r_j]}, \qquad j = 1,2,$$

*les filtres correspondant à des prises de moyenne, avec $r_1$ et $r_2$ vérifiant la condition* (1). *Soit $\varphi$ une fonction suffisamment régulière de support contenu dans $[-(r_1+r_2+\varepsilon), r_1+r_2+\varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$ est tel que $\widehat{\mu}_j, j = 1,2,$ et $p(z) = \sin(\varepsilon z)/(\varepsilon z)$ n'ont pas de zéros communs. Alors on peut calculer $\langle f \mid \varphi\rangle$ à partir de $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ par*

$$\langle f \mid \varphi\rangle = \langle \mu_1 \star f \mid \nu_{1,\varphi,\varepsilon}\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \nu_{2,\varphi,\varepsilon}\rangle,$$

*où $\nu_{1,\varphi,\varepsilon}$ et $\nu_{2,\varphi,\varepsilon}$ sont des fonctions à support compact supportées respectivement par $[-(r_2+\varepsilon), r_2+\varepsilon], [-(r_1+\varepsilon), r_1+\varepsilon]$ et définies par*

$$\begin{aligned}
\widehat{\nu}_{1,\varphi,\varepsilon}(z) =& p(z)\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_2)}{p(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z - k\pi/r_2},\\
\widehat{\nu}_{2,\varphi,\varepsilon}(z) =& p(z)\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_1)}{p(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \cdot \frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z - k\pi/r_1}\\
&+ \widehat{\mu}_1(z)\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/\varepsilon)}{p'(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_1(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_2(k\pi/\varepsilon)} \cdot \frac{p(z)}{z - k\pi/\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Preuve. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.1. On remplace $\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2$ par $p\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2$.

On suppose que $f$ est de classe $C^\infty$ et d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, puis on utilise la densité de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, après avoir constaté que les fonctions

$$\frac{\widehat{\mu}_1(z)}{z - k\pi/r} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{\mu}_2(z)}{z - k\pi/r_2}$$

sont les transformées de Fourier respectivement de $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ que l'on a déjà calculées dans la proposition 2.2.

De même, on remarque que la fonction $p(z)/(z - k\pi/\varepsilon)$ est la transformée de Fourier d'une mesure à support compact (en fait, c'est une fonction à support compact) que l'on peut calculer de la même façon que $\nu_{1,k}$ et $\nu_{2,k}$ en remplaçant $r_1$ ou $r_2$ par $\varepsilon$. ■

Ainsi, en utilisant la transformée de Fourier inverse on a

$$\begin{aligned}
\nu_{1,\varphi,\varepsilon}(t) &= \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t) \star \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_2)}{p(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)} \\
&\quad \times \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_2)(t+r_2)} - 1)\chi_{[-r_2,r_2]}(t)\Big), \\
\nu_{2,\varphi,\varepsilon}(t) &= \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t) \star \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/r_1)}{p(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \\
&\quad \times \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_1)(t+r_1)} - 1)\chi_{[-r_1,r_1]}(t)\Big) \\
&\quad + \mu_1(t) \star \Big( \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\varphi}(k\pi/\varepsilon)}{p'(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_1(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_2(k\pi/\varepsilon)} \\
&\quad \times \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/\varepsilon)(t+\varepsilon)} - 1)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)\Big).
\end{aligned}$$

On rappelle que le support de l'ondelette $\psi$ vit dans $[1-N, N]$. Donc le support de $\psi(2^j\cdot)$ est contenu dans $[(1-N)2^{-j}, N2^{-j}]$. Par conséquent, pour que le support de $\psi(2^j\cdot)$ soit contenu dans $[-r_1 - r_2 - \varepsilon, r_1 + r_2 + \varepsilon]$ pour les entiers $j$ tels que $-1 \le j < \log_2(N/(r_1 + r_2))$, il suffit que l'on ait $[(1-N)2^{-j}, N2^{-j}] \subset [-r_1 - r_2 - \varepsilon, r_1 + r_2 + \varepsilon]$. Ceci est réalisé si l'on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $[2(1-N), 2N] \subset [-r_1 - r_2 - \varepsilon, r_1 + r_2 + \varepsilon]$.

D'après ce qui précède, on a un procédé explicite qui nous permet de calculer les coefficients d'ondelettes $c(j, 0)$ pour les entiers $j$ tels que $-1 \le j < \log_2(N/(r_1 + r_2))$. Plus précisement, on a

$$c(j, 0) = 2^{j/2}[\langle \mu_1 \star f \mid \theta^1_{j,\varepsilon}\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \theta^2_{j,\varepsilon}\rangle],$$

où $\theta^1_{j,\varepsilon} = \nu_{1,\varphi,\varepsilon}$ et $\theta^2_{j,\varepsilon} = \nu_{2,\varphi,\varepsilon}$ pour $\varphi = \psi(2^j\cdot)$.

Remarque. Les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $l \in \mathbb{Z}$ et $-1 \le j < \log_2(N/(r_1+r_2))$ sont donnés par

$$c(j,l) = 2^{j/2}[\langle \mu_1 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta^1_{j,\varepsilon}\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta^2_{j,\varepsilon}\rangle].$$

Conclusion. L'étude faite dans les trois sous-sections précédentes permet le calcul de tous les coefficients d'ondelettes dans le cas particulier où $r_1 = 1$ et $r_1, r_2$ satisfont la condition (1).

**3. Relations entre coefficients d'ondelettes du signal $f$ et coefficients de Fourier des périodisées de $(\mu_1 \star f)\chi_{[-r_2+l2^{-j}, r_2+l2^{-j}]}$ et $(\mu_2 \star f)\chi_{[-r_1+l2^{-j}, r_1+l2^{-j}]}$.** On rappelle le procédé explicite qui nous permet de calculer les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $l \in \mathbb{Z}$ et $j$ entier $\ge \log_2(N/(r_1+r_2))$, à partir de $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ :

$$c(j,l) = 2^{j/2}[\langle \mu_1 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta^1_j\rangle + \langle \mu_2 \star f \mid \delta_{l2^{-j}} \star \theta^2_j\rangle],$$

où $\theta^1_j$ et $\theta^2_j$ sont des fonctions à support compact, supportées respectivement par $[-r_2, r_2]$ et $[-r_1, r_1]$ et données par

$$\theta^1_j(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_2)}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}'_2(k\pi/r_2)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_2)(t+r_2)} - 1)\chi_{[-r_2,r_2]}(t),$$

$$\theta^2_j(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_1)}{\widehat{\mu}'_1(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_1)(t+r_1)} - 1)\chi_{[-r_1,r_1]}(t).$$

Posons

$$\theta^1_{j,l} = \delta_{l2^{-j}} \star \theta^1_j = \theta^1_j(\cdot - l2^{-j}), \qquad \theta^2_{j,l} = \delta_{l2^{-j}} \star \theta^2_j = \theta^2_j(\cdot - l2^{-j}).$$

Donc $\theta^1_{j,l}$ et $\theta^2_{j,l}$ sont aussi des fonctions d'énergie finie sur $\mathbb{R}$ à support compact, supportées respectivement par $[-r_2 + l2^{-j}, r_2 + l2^{-j}]$ et $[-r_1 + l2^{-j}, r_1 + l2^{-j}]$.

Par suite, d'après les expressions ci-dessus de $\theta^1_j$ et $\theta^2_j$, on peut représenter $\theta^1_{j,l}$ et $\theta^2_{j,l}$ en série de Fourier respectivement dans $L^2[-r_2+l2^{-j}, r_2+l2^{-j}]$ et $L^2[-r_1+l2^{-j}, r_1+l2^{-j}]$, au sens $L^2$ :

$$\theta^1_{j,l}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(\theta^1_{j,l})e^{i(m\pi/r_2)t}, \qquad \theta^2_{j,l}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(\theta^2_{j,l})e^{i(m\pi/r_1)t},$$

où $d_m(\theta^1_{j,l})$ et $d_m(\theta^2_{j,l}), m \in \mathbb{Z}$, sont respectivement les coefficients de Fourier de $\theta^1_{j,l}$ et $\theta^2_{j,l}$, et sont donnés par

$$d_0(\theta^1_{j,l}) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2k\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_2)}{\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}'_2(k\pi/r_2)},$$

$$d_m(\theta^1_{j,l}) = \frac{(-1)^m}{2m\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(m\pi/r_2)}{\widehat{\mu}_1(m\pi/r_2)\widehat{\mu}'_2(m\pi/r_2)} e^{-i(m\pi/r_2)l2^{-j}}, \qquad m \in \mathbb{Z}^*,$$

$$d_0(\theta^2_{j,l}) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2k\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_1)}{\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)},$$

$$d_m(\theta^2_{j,l}) = \frac{(-1)^m}{2m\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(m\pi/r_1)}{\widehat{\mu}_1'(m\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(m\pi/r_1)} e^{-i(m\pi/r_1)l2^{-j}}, \qquad m\in\mathbb{Z}^*.$$

Les signaux de sortie $\mu_1 \star f$ et $\mu_2 \star f$ sont des signaux d'énergie finie et vivant sur $\mathbb{R}$. Mais on peut les tronquer respectivement à travers les fenêtres rectangulaires $\chi_{[-r_2+l2^{-j},r_2+l2^{-j}]}$ et $\chi_{[-r_1+l2^{-j},r_1+l2^{-j}]}$, puis périodiser les signaux tronqués.

On représente $(\mu_1\star f)\chi_{[-r_2+l2^{-j},r_2+l2^{-j}]}$ et $(\mu_2\star f)\chi_{[-r_1+l2^{-j},r_1+l2^{-j}]}$ en séries de Fourier respectivement dans $L^2([-r_2+l2^{-j}, r_2+l2^{-j}])$ et $L^2([-r_1+l2^{-j}, r_1+l2^{-j}])$; au sens $L^2$, en posant

$$s^1_{j,l} = (\mu_1\star f)\chi_{[-r_2+l2^{-j},r_2+l2^{-j}]} \quad \text{et} \quad s^2_{j,l} = (\mu_2\star f)\chi_{[-r_1+l2^{-j},r_1+l2^{-j}]},$$

on a

$$s^1_{j,l} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^1_{j,l}) e^{i(m\pi/r_2)t}, \qquad s^2_{j,l} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^2_{j,l}) e^{i(m\pi/r_1)t}.$$

En utilisant la formule de Plancherel dans la relation

$$c(j,l) = 2^{j/2}[\langle \mu_1\star f \mid \theta^1_{j,l}\rangle + \langle \mu_2\star f \mid \theta^2_{j,l}\rangle],$$

respectivement dans $L^2([-r_2+l2^{-j}, r_2+l2^{-j}])$ et $L^2([-r_1+l2^{-j}, r_1+l2^{-j}])$, on a aussi des relations entre les coefficients d'ondelettes du signal $f$ et les coefficients de Fourier de $\mu_1\star f$ et $\mu_2\star f$ lus à travers des fenêtres : pour $j \geq \log_2(N/(r_1+r_2))$ et $l\in\mathbb{Z}$,

$$c(j,l) = 2^{j/2}\Big[2r_2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^1_{j,l})\overline{d_m(\theta^1_{j,l})} + 2r_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^2_{j,l})\overline{d_m(\theta^2_{j,l})}\Big].$$

On rappelle le procédé explicite pour calculer les coefficients d'ondelettes $c(j,l)$ pour $l\in\mathbb{Z}$ et $j$ entier tel que $1\leq j<\log_2(N/(r_1+r_2))$, à partir de $\mu_1\star f$ et $\mu_2\star f$ :

$$c(j,l) = 2^{j/2}[\langle \mu_1\star f \mid \delta_{l2^{-j}}\star\theta^1_{j,\varepsilon}\rangle + \langle \mu_2\star f \mid \delta_{l2^{-j}}\star\theta^2_{j,\varepsilon}\rangle],$$

où $\theta^1_{j,\varepsilon}$ et $\theta^2_{j,\varepsilon}$ sont définis dans le paragraphe 2.3.3. On peut écrire facilement ce procédé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} c(j,l) = 2^{j/2}\bigg[&\bigg\langle \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\star(\mu_1\star f) \;\bigg|\; \delta_{l2^{-j}}\star D^{1,\varepsilon}_j\bigg\rangle \\ &+ \bigg\langle \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\star(\mu_2\star f) \;\bigg|\; \delta_{l2^{-j}}\star D^{2,\varepsilon}_j\bigg\rangle + \langle \mu_1\star(\mu_2\star f) \mid \delta_{l2^{-j}}\star D^{3,\varepsilon}_j\rangle\bigg], \end{aligned}$$

où $D^{1,\varepsilon}_j$, $D^{2,\varepsilon}_j$ et $D^{3,\varepsilon}_j$ sont des fonctions à support compact supportées respectivement par $[-r_2,r_2]$, $[-r_1,r_1]$ et $[-\varepsilon,\varepsilon]$ et données par

$$D_j^{1,\varepsilon}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_2)}{p(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_2)(t+r_2)} - 1)\chi_{[-r_2,r_2]}(t),$$

$$D_j^{2,\varepsilon}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_1)}{p(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/r_1)(t+r_1)} - 1)\chi_{[-r_1,r_1]}(t),$$

$$D_j^{3,\varepsilon}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/\varepsilon)}{p'(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_1(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_2(k\pi/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{2k\pi}(e^{i(k\pi/\varepsilon)(t+\varepsilon)} - 1)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t).$$

On pose

$$D_{j,l}^{1,\varepsilon} = \delta_{l2^{-j}} \star D_j^{1,\varepsilon}, \quad D_{j,l}^{2,\varepsilon} = \delta_{l2^{-j}} \star D_j^{2,\varepsilon} \quad \text{et} \quad D_{j,l}^{3,\varepsilon} = \delta_{l2^{-j}} \star D_j^{3,\varepsilon}.$$

$D_{j,l}^{1,\varepsilon}, D_{j,l}^{2,\varepsilon}$ et $D_{j,l}^{3,\varepsilon}$ sont aussi des fonctions d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, supportées respectivement par : $[-r_2 + l2^{-j}, r_2 + l2^{-j}], [-r_1 + l2^{-j}, r_1 + l2^{-j}]$ et $[-\varepsilon + l2^{-j}, \varepsilon + l2^{-j}]$. D'après les expressions de $D_j^{1,\varepsilon}$, $D_j^{2,\varepsilon}$ et $D_j^{3,\varepsilon}$, on peut représenter $D_{j,l}^{1,\varepsilon}$, $D_{j,l}^{2,\varepsilon}$ et $D_{j,l}^{3,\varepsilon}$ en séries de Fourier respectivement dans $L^2([-r_2 + l2^{-j}, r_2 + l2^{-j}]), L^2([-r_1 + l2^{-j}, r_1 + l2^{-j}])$ et $L^2([-\varepsilon + l2^{-j}, \varepsilon + l2^{-j}])$, au sens $L^2$, par

$$D_{j,l}^{1,\varepsilon}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(D_{j,l}^{1,\varepsilon})e^{i(m\pi/r_2)t},$$
$$D_{j,l}^{2,\varepsilon}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(D_{j,l}^{2,\varepsilon})e^{i(m\pi/r_1)t},$$
$$D_{j,l}^{3,\varepsilon}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(D_{j,l}^{3,\varepsilon})e^{i(m\pi/\varepsilon)t},$$

où $d_m(D_{j,l}^{1,\varepsilon})$, $d_m(D_{j,l}^{2,\varepsilon})$ et $d_m(D_{j,l}^{3,\varepsilon})$, $m \in \mathbb{Z}$, sont respectivement les coefficients de Fourier de $D_{j,l}^{1,\varepsilon}$, $D_{j,l}^{2,\varepsilon}$ et $D_{j,l}^{3,\varepsilon}$ et sont donnés par

$$d_0(D_{j,l}^{1,\varepsilon}) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2k\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_2)}{p(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_1(k\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(k\pi/r_2)},$$

$$d_m(D_{j,l}^{1,\varepsilon}) = \frac{(-1)^m}{2m\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(m\pi/r_2)}{p(m\pi/r_2)\widehat{\mu}_1(m\pi/r_2)\widehat{\mu}_2'(m\pi/r_2)} e^{-i(m\pi/r_2)l2^{-j}}, \ m \in \mathbb{Z}^*,$$

$$d_0(D_{j,l}^{2,\varepsilon}) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{2k\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(k\pi/r_1)}{p(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_1'(k\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(k\pi/r_1)},$$

$$d_m(D_{j,l}^{2,\varepsilon}) = \frac{(-1)^m}{2m\pi} \cdot \frac{\widehat{\psi(2^j\cdot)}(m\pi/r_1)}{p(m\pi/r_1)\widehat{\mu}_1'(m\pi/r_1)\widehat{\mu}_2(m\pi/r_1)} e^{-i(m\pi/r_1)l2^{-j}}, \ m \in \mathbb{Z}^*,$$

$$d_0(D^{3,\varepsilon}_{j,l}) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{2k\pi}\cdot\frac{\psi\widehat{(2^j\cdot)}(k\pi/\varepsilon)}{p'(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_1(k\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_2(k\pi/\varepsilon)},$$

$$d_m(D^{3,\varepsilon}_{j,l}) = \frac{(-1)^m}{2m\pi}\cdot\frac{\psi\widehat{(2^j\cdot)}(m\pi/\varepsilon)}{p'(m\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_1(m\pi/\varepsilon)\widehat{\mu}_2(m\pi/\varepsilon)}e^{-i(m\pi/\varepsilon)l2^{-j}}, \quad m\in\mathbb{Z}^*.$$

Posons

$$\begin{aligned}
s^{1,\varepsilon}_{j,l} &= \frac{1}{2\varepsilon}(\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\star(\mu_1\star f))\chi_{[-r_2+l2^{-j},r_2+l2^{-j}]},\\
s^{2,\varepsilon}_{j,l} &= \frac{1}{2\varepsilon}(\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\star(\mu_2\star f))\chi_{[-r_1+l2^{-j},r_1+l2^{-j}]},\\
s^{3,\varepsilon}_{j,l} &= (\mu_1\star(\mu_2\star f))\chi_{[-\varepsilon+l2^{-j},\varepsilon+l2^{-j}]}.
\end{aligned}$$

On représente $s^{1,\varepsilon}_{j,l}$, $s^{2,\varepsilon}_{j,l}$ et $s^{3,\varepsilon}_{j,l}$ en séries de Fourier respectivement dans $L^2([-r_2+l2^{-j},r_2+l2^{-j}]), L^2([-r_1+l2^{-j},r_1+l2^{-j}])$ et $L^2([-\varepsilon+l2^{-j},\varepsilon+l2^{-j}])$; au sens $L^2$, on a

$$\begin{aligned}
s^{1,\varepsilon}_{j,l}(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{1,\varepsilon}_{j,l})e^{i(m\pi/r_2)t},\\
s^{2,\varepsilon}_{j,l}(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{2,\varepsilon}_{j,l})e^{i(m\pi/r_1)t},\\
s^{3,\varepsilon}_{j,l}(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{3,\varepsilon}_{j,l})e^{i(m\pi/\varepsilon)t},
\end{aligned}$$

et en utilisant la formule de Plancherel on a

$$\begin{aligned}
c(j,l) = 2^{j/2}\Bigg[&2r_2\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{1,\varepsilon}_{j,l})\overline{d_m(D^{1,\varepsilon}_{j,l})}\\
&+2r_1\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{2,\varepsilon}_{j,l})\overline{d_m(D^{2,\varepsilon}_{j,l})}+2\varepsilon\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_m(s^{3,\varepsilon}_{j,l})\overline{d_m(D^{3,\varepsilon}_{j,l})}\Bigg]
\end{aligned}$$

pour $l\in\mathbb{Z}$ et $-1\le j<\log_2(N/(r_1+r_2))$.

**4. Conclusions.** On a construit des procédés explicites qui nous permettent sans redondance d'analyser les signaux et de les restituer à partir de leurs prises de moyenne, via la transformation en ondelettes, et ceci sans utiliser les opérations de dérivation de manière à ne pas amplifier les phénomènes de bruit.

Plus précisement, on décompose un signal dans une base orthonormée d'ondelettes, puis on calcule tous ses coefficients d'ondelettes à partir de versions de ce signal filtré à travers deux filtres correspondant à des prises de moyenne (filtres du type passebas) et ce, d'une part, par des opérations de moyennisation pour ne pas amplifier les phénomènes de bruit, et d'autre part, en utilisant des ondelettes orthogonales, ce qui nous permet d'avoir un outil non redondant pour la décomposition et la recomposition des signaux.

On peut adapter tous les mécanismes que l'on a utilisé pour restituer les coefficients d'ondelettes des signaux d'énergie finie sur $\mathbb{R}$, filtrés à travers deux filtres de réponse impulsionnelle $\mu_1$ et $\mu_2$ qui sont par exemple des fonctions splines d'ordre 1 à support compact : $\mu_1(t) = (r_1 - |t|)\chi_{[-r_1,r_1]}(t)$ et $\mu_2(t) = (r_2 - |t|)\chi_{[-r_2,r_2]}(t)$; $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des filtres du type passebas (plus précisement, correspondant à des prises de moyenne concentrées autour de l'origine).

On peut aisément généraliser au cas où $\mu_1$ et $\mu_2$ correspondent à des fonctions à support compact affines par morceaux ou à des fonctions à support compact splines d'ordre $k \geq 1$ déduites l'une de l'autre par l'homothétie de rapport $r_2/r_1$. La transformée de Fourier d'une fonction affine par morceaux et à support compact est en effet de la forme

$$\frac{\sum_{k,l} a_{k,l} z^k \exp(i\alpha_l z)}{P(z)}, \quad \text{où } P \text{ est un polynôme.}$$

On a un résultat analogue pour les fonctions splines à support compact. La condition arithmétique est remplacée par le fait que $r_1/r_2$ doit être mal approché par les quotients des zéros distincts d'une exponentielle-polynôme.

En utilisant les mêmes méthodes, on peut établir des procédés qui nous permettent d'analyser et de restituer les coefficients d'ondelettes d'un signal de durée finie et d'énergie finie, c'est-à-dire un signal $f$ appartenant à $L^2(]-R, R[)$ $(R > 0)$. Dans ce cas, le problème est de construire une base orthonormée explicite d'ondelettes dans $L^2(]-R, R[)$. On sait qu'une telle base existe ([6]), mais on ne peut pas expliciter toutes les ondelettes, comme dans le cas global, à partir d'une ondelette originelle $\psi$ ([6]).

Enfin, on peut aussi généraliser tous les procédés établis ci-dessus pour restituer les coefficients d'ondelettes d'un signal d'énergie finie sur $\mathbb{R}^n$, filtré à travers $n+1$ filtres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$ où $\mu_j = \chi_{[-r_j,r_j]^n}$, $j = 1, \ldots, n+1$ ([1]). Pour avoir une base orthonormée d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit d'utiliser le passage de construction d'une base orthonormée d'ondelettes dans $L^2(\mathbb{R})$ à une base dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ ([8]).

Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

## *RÉFÉRENCES*


[1] C. A. Berenstein, R. Gay and A. Yger, *The three squares theorem. A local version*, in: Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 122, Dekker, 1990, 35–50.

[2] C. A. Berenstein, B. A. Taylor et A. Yger, *Sur quelques formules explicites de déconvolution*, J. Optics 14 (1983), 75–82.

[3] C. A. Berenstein et A. Yger, *Le problème de la déconvolution*, J. Funct. Anal. 54 (1983), 113–160.

[4] S. D. Casey and D. F. Walnut, *Systems of convolution equations*, *deconvolution*, *Shannon sampling*, *and the wavelet and Gabor transforms*, SIAM Rev. 36 (1994), 537–577.

[5] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909–996.

[6] S. Jaffard et Y. Meyer, *Base d'ondelettes dans des ouverts de* $\mathbb{R}^n$, J. Math. Pures Appl. 68 (1989), 95–108.

[7] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximations*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[8] S. G. Mallat, *A theory of multiresolution signal decomposition*: *the wavelet representation*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence 11 (7) (1989), 674–693.

[9] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs I*, Hermann, Paris, 1990.

[10] A. Yger et C. A. Berenstein, *Traitement du signal et algorithmes explicites de déconvolution*, Séminaire Bony–Sjöstrand–Meyer, École Polytechnique, 1984–1985.



CENTRE DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX, FRANCE
E-mail: MAGHRAS@MATH.U-BORDEAUX.FR


*Reçu par la Rédaction le 21.7.1994*