COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVIII 1995 FASC. 1

CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES LOCALEMENT m-CONVEXES DONT L'ENSEMBLE DES CARACTÈRES EST ÉQUIBORNÉ

PAR

MOHAMED AKKAR (TALENCE)

1. Introduction. Dans cet article, suivant une idée de W. Żelazko dans [8], on donne plusieurs caractérisations des algèbres localement m-convexes ayant tous leurs éléments à spectre borné. Cela nous permet d'obtenir la caractérisation, parmi les algèbres localement m-convexes, de celles qui ont l'espace des caractères équiborné.

On obtient, comme conséquence immédiate de cette caractérisation, que dans une algèbre localement m-convexe complète, commutative et unitaire dont tous les éléments sont à spectre borné, tout caractère est borné.

Nous établissons un lien naturel entre notre théorème principal et celui de Żelazko dans [8] par l'introduction de la notion de topologie de Q-algèbre τ^*, associée à la topologie τ d'une algèbre et ayant les mêmes bornés (voir lemme 2 et corollaire 3).

2. Préliminaires. Dans toute la suite, E désigne une algèbre complexe, commutative unitaire, localement m-convexe et complète ([5] ou [6]). Une telle algèbre est, d'aprés le théorème de structure de [1], réunion bornologique filtrante supérieurement d'algèbres du même type qui sont en plus de Fréchet. Cela signifie que E est une réunion croissante de sous-algèbres E_α de E qui sont munies de topologies localement m-convexes de Fréchet telles que les injections canoniques soient continues et telles que, une partie de B de E est bornée si elle est contenue dans une sous algèbre E_α et y est bornée. On note $\Sigma(E)$ l'espace des fonctionnelles linéaires multiplicatives non nulles sur E et $\mathfrak{M}(E)$ le sous-espace de $\Sigma(E)$ formé des fonctionnelles continues.

Pour tout élément x de E, le spectre algébrique de x est l'ensemble

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ non inversible}\}.$$

On a

$$\widehat{x}(\Sigma(E)) = \widehat{x}(\mathfrak{M}(E)) = \sigma(x), \quad x \in E,$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46H05.

où $\widehat{x}$ désigne la transformée de Gelfand de x. On considère sur l'algèbre E la semi-norme spectrale

$$\varrho_E(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{1}$$

On sait que

$$\varrho_E(x) = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathfrak{M}(E)\} = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \Sigma(E)\}. \tag{2}$$

Pour toutes ces propriétés voir par exemple [5], [6] ou [9]. On a aussi

$$\varrho_E(x) = \sup_i\{\overline{\lim}\, |x^n|_i^{1/n} : |\cdot|, \text{ semi-normes continues sur } E\}. \tag{3}$$

Sur l'algèbre E on aura besoin de considérer la topologie de la Mackey-fermeture définie dans [4].

Rappelons d'abord la notion de convergence au sens de Mackey : une suite $(x_n)_n$ dans E est dite *Mackey-convergente* vers x, ou *converge au sens de Mackey* vers x, s'il existe une suite de scalaires $(\varepsilon_n)_n$ tendant vers 0 et un disque borné B de E tel que $x_n - x \in \varepsilon_n B$ pour tout n. Cela signifie que $(x_n)_n$ converge vers x dans l'espace semi-normé $E_B = \bigcup_{\lambda>0} \lambda B$ engendré par B et dont la semi-norme est la jauge de B.

Une partie F de E est *Mackey-fermée* dans E si toute suite d'éléments de F qui converge au sens de Mackey dans E a une limite qui appartient à F. Les parties Mackey-fermées définissent une topologie dite *de la Mackey-fermeture* pour laquelle les parties ouvertes sont appelées Mackey-ouvertes. L'algèbre E est une Q-algèbre bornologique si l'ensemble des éléments inversibles de E est Mackey-ouvert.

Un élément x de E est régulier s'il existe $\lambda > 0$ tel que la suite $(x^n/\lambda^n)_n$ est bornée [7].

3. Exemples de Q-algèbres bornologiques. a) Si E est une algèbre topologique localement convexe pour une topologie $\mathcal{J}$, si $(E, \mathcal{J})$ est une Q-algèbre topologique, c'est-à-dire si l'ensemble $G(E)$ des éléments inversibles de E est $\mathcal{J}$-ouvert, alors E est une Q-algèbre bornologique.

b) Toute algèbre de Banach et plus généralement toute "pseudo-Banach algebra" au sens de [3] est une Q-algèbre bornologique.

c) Soit E une algèbre pseudo-localement convexe (voir [7] ou [9]) dont l'ensemble des éléments inversibles est ouvert. Si tout borné convexe B est complétant (c'est-à-dire l'espace E_B est de Banach), par exemple si E est semi-complète, alors la bornologie à décroissance rapide fait de E une algèbre bornologique convexe ([7], Prop. 5, p. 28) qui est une Q-algèbre alors que E n'est pas forcément une Q-algèbre topologique localement convexe.

4. Théorème principal

THÉORÈME. *Soit E une algèbre localement m-convexe commutative, complète et unitaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Tout élément x de E a un spectre compact.*
(2) *Tout élément x de E a un spectre borné.*
(3) *Tout élément x de E est régulier.*
(4) *L'espace $\Sigma(E)$ est équiborné dans le dual $(E', \sigma(E', E))$.*
(5) *Le rayon spectral ϱ_E est borné sur E.*
(6) *Le rayon spectral ϱ_E est Mackey continu en* 0.
(7) *L'algèbre E est une Q-algèbre bornologique.*

Démonstration. (1)$\Rightarrow$(2) est évident.

(2)$\Rightarrow$(3). Si un élément x de E a un spectre borné, cela signifie que $\varrho_E(x)$ est fini. Soit $\lambda > 0$ tel que $\lambda > \varrho_E(x)$, alors $\varrho_E(x/\lambda) < 1$ et donc la série $\sum(x^n/\lambda^n)$ converge dans E d'après la propriété (3) sur $\varrho_E(x)$ rappelée dans le paragraphe 2 (Préliminaires).

(3)$\Rightarrow$(1) est bien connue (voir [7] ou [2]).

(2)$\Rightarrow$(4). La propriété (2) signifie que le rayon spectral $\varrho_E(x)$ est fini pour tout x. On sait par ailleurs que pour tout x dans E on a l'égalité (2); donc l'ensemble $\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathfrak{M}(E)\}$ est borné, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}(E)$ est simplement borné dans le dual topologique de E. Donc la restriction à tout sous-espace tonnelé de E est équicontinue d'aprés le théorème de Banach–Steinhaus. Montrons que cela a pour conséquence que $\mathfrak{M}(E)$, ainsi que $\Sigma(E)$, sont équibornés : en effet, d'aprés [1], pour tout borné de E, il existe une sous-algèbre de Fréchet E_α de E qui contient B et tel que B soit borné dans E_α mais $\mathfrak{M}(E)|_{E_\alpha}$ y est équicontinue. Donc l'ensemble $\{\varphi(B) : \varphi \in \mathfrak{M}(E)\}$ est borné. Il en est de même pour $\Sigma(E)$.

(4)$\Rightarrow$(5). Il est clair, d'aprés l'égalité (2), que ϱ_E est bornée si, et seulement si, $\mathfrak{M}(E)$ (ou $\Sigma(E)$) est équiborné.

(5)$\Rightarrow$(6). La semi-norme ϱ_E est continue en 0 pour la topologie de la Mackey-fermeture si, et seulement si, $\varrho_E(x_n)$ tend vers 0 si x_n tend vers 0 au sens de Mackey (voir [4]); ceci est équivalent au fait que ϱ_E est borné.

(6)$\Rightarrow$(7). Supposons que l'ensemble $G(E)$ des éléments inversibles de E admette l'élément unité e de l'algèbre comme point intérieur pour la topologie $\tau(E)$ de la Mackey-fermeture de E; cela signifie qu'il existe une partie P ouverte pour $\tau(E)$, équilibrée et bornivore telle que

$$e - P \subset G(E).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout λ tel que $|\lambda| > \varepsilon$, si $x \in \varepsilon P$, alors $x/\lambda \in P$ et $\lambda e - x \in G(E)$, c'est-à-dire que $\varrho_E(x) \leq \varepsilon$. D'où la continuité de ϱ_E pour $\tau(E)$ en 0. Inversement, s'il existe P partie équilibrée bornivore, voisinage de 0 pour $\tau(E)$ telle que $x \in P$, cela implique que $\varrho_E(x) < 1$. On en déduit que pour tout x de P, $e - x \in G(E)$. Donc e est intérieur à $G(E)$ et $G(E)$ est ouvert pour $\tau(E)$ dans E.

(7)⇒(1). Supposons que E est une Q-algèbre bornologique. Cela signifie qu'il existe une partie P bornivore de E telle que, pour tout réel positif α on ait

$$x \in \alpha P \Rightarrow \varrho_E(x) \le \alpha.$$

P étant bornivore, pour tout $y \in E$ il existe α positif tel que $y \in \alpha P$ et donc $\varrho_E(x) \le \alpha$. Ce qui signifie que le spectre de x est borné.

On déduit du théorème précédent le résultat bien connu suivant :

Corollaire. *Une algèbre normée E est une Q-algèbre si, et seulement si, le rayon spectral ϱ_E est borné ou, ce qui est équivalent, si*

$$\varrho_E(x) \le \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Ce résultat est également vrai pour une "pseudo-Banach algebra" de [2] si on remplace la norme $\|\cdot\|$ par

$$r(x) = \inf\{\alpha > 0 : (x^n/\alpha^n)_n \text{ soit bornée}\}.$$

5. Exemples et remarques

Proposition 1. *Soit T un espace topologique pseudo-compact (i.e. "countably compact"), localement compact, non compact. Soit $E = C(T)$ l'algèbre des fonctions continues sur l'espace T, munie de la topologie de la convergence compacte. Alors E est une algèbre localement multiplicativement convexe, commutative et complète, dont l'ensemble des caractères est équiborné et qui n'est pas une Q-algèbre topologique.*

Démonstration. Il est bien connu que l'algèbre E est localement m-convexe, complète (voir [6], Prop. 12.2). Il est clair aussi que E n'est pas une Q-algèbre topologique puisqu'elle possède des caractères non continus, alors que tous ses caractères sont bornés ([6], Prop. 12.2).

Montrons que l'espace $\Sigma(E)$ des caractères de E est équiborné ou, ce qui est équivalent, que le rayon spectral ϱ_E est borné.

Soit B une partie bornée de E; on veut montrer que l'ensemble $\{\chi(B) : \chi \in \Sigma(E)\}$ est borné. Mais $\Sigma(E)$ est en correspondance avec l'espace βT, compactifié de Stone–Čech de T. Donc

$$\{\chi(B) : \chi \in \Sigma(E)\} = \{\chi(B) : \chi \in \mathfrak{M}(E)\}.$$

Mais ceci est égal à $\{f(t) : f \in B,\ t \in \beta T\} = \{f(t) : f \in B,\ t \in T\}$, c'est-à-dire c'est $\{f(T) : f \in B\}$. Montrons que ceci est borné; dans le cas contraire, soit $t_n \in T$ tel que

$$\sup\{f(t_n) : f \in B\} > n \quad \text{pour tout entier } n.$$

T étant pseudo-compact, il existe une suite extraite $(t_{n_k})_k$ qui converge vers t dans T. Donc $\sup\{f(t_{n_k}) : f \in B\}$ n'est pas borné. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse B borné de E, c'est-à-dire borné sur tout compact de T.

Les résultats suivants donnent un lien entre la famille des Q-algèbres bornologiques et les algèbres E possédant une topologie τ^* de Q-algèbre, plus fine que la topologie τ de E mais ayant les mêmes bornés.

LEMME 2. *Soit (E,τ) une algèbre localement multiplicativement convexe vérifiant les conditions équivalentes du théorème de Żelazko* [8] (*i.e. E est une Q-algèbre pour une topologie plus fine que τ*); *alors si la topologie τ est définie par la famille $\|x\|_\alpha$ de semi-normes*, *la topologie de τ^* de Q-algèbre de Żelazko est définie par la famille*

$$\|x\|_0 = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \quad et \quad \|x\|_\alpha^* = \max(\|x\|_0, \|x\|_\alpha),$$

et les deux topologies τ et τ^* ont les mêmes bornés.

Démonstration. Tout borné de τ^* est borné pour τ. Inversement, soit B un borné de τ. D'aprés le théorème principal le rayon spectral est borné sur B, donc $\|\cdot\|_0$ est borné sur B; comme chaque $\|\cdot\|_\alpha$ est borné sur B par définition, les semi-normes $\|\cdot\|_\alpha^*$ sont donc bornées sur B, c'est-à-dire que B est τ^*-borné.

COROLLAIRE 3. *Si (E,τ) est une algèbre localement multiplicativement convexe complète unitaire*, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) *Tout élément de E a un spectre borné.*

2) *Tout élément de E a un spectre compact.*

3) *E est une Q-algèbre pour une topologie τ^* plus fine que τ ayant les mêmes bornés que τ.*

4) *E est une Q-algèbre pour une topologie τ_1 localement multiplicativement convexe complète.*

5) *E est une Q-algèbre bornologique.*

6) *Le rayon spectral est borné sur E.*

7) *L'espace $\Sigma(E)$ est équiborné.*

Ce corollaire découle du lemme précédent, du théorème principal et du théorème de Żelazko [8].

Remarque 4. Soit (E,τ) une algèbre localement multiplicativement convexe sur laquelle il existe une topologie plus fine τ^* ayant les mêmes bornés telle que (E,τ^*) soit une Q-algèbre; dans ce cas l'algèbre (E,τ) n'est pas en général une Q-algèbre (voir [8]); mais c'est une Q-algèbre bornologique. En effet, (E,τ^*), étant une Q-algèbre topologique, est par conséquent une Q-algèbre bornologique pour la bornologie de τ^* qui est la même que celle de τ.

Exemple 5. Soit $C(T)$ l'algèbre de la proposition 1. Ce n'est pas une Q-algèbre topologique pour la topologie de la convergence compacte. Considérons la topologie de Żelazko qui est plus fine que la topologie de la convergence compacte et qui fait de $C(T)$ une Q-algèbre topologique; elle est définie par la famille des semi-normes

$$\|f\|_K = \sup\{|f(t)| : t \in K\} \quad (K : \text{compact de } T) \quad \text{et}$$
$$\|f\|_0 = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\} = \sup\{|f(t)| : t \in T\}.$$

Cette topologie est en fait la topologie de la convergence uniforme sur T, i.e. la topologie usuelle d'algèbre de Banach de $C(T)$. Dans ce cas le rayon spectral est borné (voir proposition 1), mais non continu. Donc c'est une Q-algèbre bornologique qui n'est pas une Q-algèbre topologique. La topologie de Q-algèbre la plus proche de la topologie de la convergence compacte est celle d'algèbre de Banach. Le spectre $\Sigma(E)$ est équiborné et non équicontinu.

Remarque 6. Le théorème principal donné ici est l'équivalent bornologique de résultats de A. Mallios dans [5], th. 1.3 (p. 185) et lemme 1.3 (p. 187) qui donnent des équivalences entre l'équicontinuité du spectre$\mathfrak{M}(E)$, le fait que $\widehat{E}$ (donc E si celle-ci est complète) soit une Q-algèbre et la σ-compacité de $\mathfrak{M}(E)$. Le théorème 1.3 donne l'équivalence de ces trois propriétés dans le cas où $x \mapsto \widehat{x}$ (transformée de Gelfand) est continue. De ces deux résultats Mallios déduit qu'une algèbre "spectrally barreled l.m.c." complète E est une Q-algèbre si, et seulement si, $\mathfrak{M}(E)$ est équicontinu. Dans ce cas précis des algèbres "spectrally barreled", où toute partie bornée de $\mathfrak{M}(E)$ est équicontinue (c'est le cas des algèbres de Fréchet) notre théorème est équivalent à celui de Mallios. Par contre, dans le cas général, l'équicontinuité de $\mathfrak{M}(E)$ est beaucoup plus forte que l'équibornitude de $\mathfrak{M}(E)$ (voir l'exemple précédent ou l'exemple donné par Żelazko dans [8], p. 295).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Akkar, *Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), 941–944.

[2] G. R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), 399–421.

[3] G. R. Allan, H. G. Dales and J. P. McClure, *Pseudo-Banach algebras*, Studia Math. 40 (1971), 55–69.

[4] H. Hogbe-Nlend, *Théorie des bornologies et applications*, Lectures Notes in Math. 213, Springer, 1971.

[5] A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, North-Holland, 1986.

[6] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[7] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lecture Notes in Math. 230, Springer, 1971.
[8] W. Żelazko, *On maximal ideals in commutative m-convex algebras*, Studia Math. 58 (1976), 291–298.
[9] —, *Metric generalizations of Banach algebras*, Rozprawy Mat. 47 (1965).

U.F.R. MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
33405 TALENCE CEDEX
FRANCE

Reçu par la Rédaction le 5.4.1993;
en version modifiée le 12.4.1994