COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVII 1994 FASC. 2

ANALYSE 2-MICROLOCALE ET DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE CHIRPS D'UNE FONCTION DE RIEMANN ET DE SES GÉNÉRALISATIONS

PAR

DANIEL BOICHU (COMPIÈGNE)

En dimension 1 on analyse la fonction irrégulière $r(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\sin n^p x$ (p entier ≥ 2) en un point x_0 de dérivabilité (π est un tel point) et on démontre que le terme d'erreur est un chirp de classe $\left(1+\frac{1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, \frac{p-1}{p}\right)$. La fonction $r(x)$ est dans l'espace 2-microlocal $C_{x_0}^{s,s'}$ si et seulement si $s+s' \leq 1-1/p$ et $ps+s' \leq p-1/2$.

En dimension 2, on obtient en (π,π) l'existence d'un plan tangent pour la surface $z=\sum_{m,n=1}^{\infty}(m^2+n^2)^{-\gamma}\sin(m^2x+n^2y)$ dès que $\gamma > 1$.

I. Introduction et résultats principaux. Quand on étudie la régularité d'une fonction f en 0, la première idée est celle de développement limité. On dit que f est höldérienne en 0 d'exposant $s > 0$ ($f \in C_0^s$) s'il existe un polynôme $P(x)$ tel que $f(x)-P(x)$ est $\mathcal{O}(|x|^s)$ près de 0. Cette estimation tient compte du module de $f(x)-P(x)$ mais laisse dans l'ombre d'éventuelles oscillations. L'analyse 2-microlocale d'une part, l'analyse par "chirps" d'autre part se proposent d'améliorer la mesure de la régularité ponctuelle.

L'analyse 2-*microlocale.* A partir d'une décomposition de Littlewood–Paley [8] qui réalise un découpage en bandes de fréquences, on définit une échelle d'espaces microlocaux $C_0^{s,s'}$ (s,s' réels) en introduisant une *seconde* localisation en variable d'espace. Le premier paramètre s est généralement l'exposant de Hölder en 0. Le paramètre s' mesure l'importance des oscillations éventuelles du terme d'erreur. La régularité en 0 grandit avec s'. Par exemple, si $s+s' > 0$ alors $C_0^{s,s'} \subset C_0^s \subset C_0^{s,-s}$. En particulier, f est dérivable en 0 si $f \in C_0^{s,s'}$ avec $s > 1$ et $s+s' > 0$. C'est une manière détournée très utile de prouver une dérivabilité [9].

L'analyse par "chirps" [10]. On voudrait comparer un résidu comme $f(x)-P(x)$ évoqué ci-dessus à des fonctions pour lesquelles on peut régler

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 26A15.

de façon indépendante le caractère höldérien global, le caractère höldérien local et l'oscillation. On part de u, dite *indéfiniment oscillante*; cela signifie que u est définie et bornée sur un voisinage de ∞, höldérienne d'exposant r, avec des primitives successives bornées. On construit alors les fonctions (chirps à droite) $x^\alpha u(1/x^\beta)$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$, définies sur un voisinage de 0 à droite. On définit de même les chirps à gauche. Un chirp est à la fois un chirp à droite et à gauche construit à partir de fonctions indéfiniment oscillantes différentes éventuellement mais de même triplet (α, β, r) appelé *classe* du chirp. On notera que la classe du chirp définit sa position 2-microlocale et vice-versa ([10], th. 2, p. 13, I$\Leftrightarrow$III).

Notre étude porte sur les fonctions $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin n^p x$, p entier ≥ 2. La régularité höldérienne globale de $r(x)$ est $(p-1)/p$ (c'est immédiat avec la caractérisation höldérienne à partir des blocs dyadiques d'une série de Fourier). Les points de régularité höldérienne locale maximale $\left(\frac{2p-1}{2p-2}\right)$ sont les points x_0 tels que $\exp(ix_0 n^p)$ soit N-périodique pour un certain N et $\sum_{n=0}^{N-1} \exp(ix_0 n^p) = 0$. En ces points $r(x)$ est dérivable [11]. En π, utilisé comme point régulier test (en effet, $e^{i\pi n^p}$ est 2-périodique et $e^0 + e^{i\pi} = 0$), $r(x)$ est dérivable et on verra que $r'(\pi) = -1/2$. On note alors $\omega(h) = r(\pi + h) - r(\pi) + h/2$ le terme d'erreur en π quand on remplace r par sa partie affine. On démontre que ce terme est "oscillant", précisément c'est un chirp de classe $\left(1 + \frac{1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, 1 - \frac{1}{p}\right)$. Exprimé autrement, ce résultat signifie que $r(x) \in C_\pi^{s,s'}$ si et seulement si $s + s' \leq (p-1)/p$ et $ps + s' \leq p - 1/2$.

Riemann conjecturait que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin n^2 x$ était non dérivable en tout point. Cette fonction porte maintenant son nom bien qu'en 1970, J. Gerver prouva l'existence d'un nombre dérivé $(-1/2)$ en π [5]. Depuis il y eut de nombreuses démonstrations. L'une d'elles, présentée par M. Holschneider et P. Tchamitchian, est fondée sur une analyse par ondelettes [6]. S. Jaffard montra que cette technique d'ondelettes équivaut à une analyse 2-microlocale [9]. Cette méthode temps-échelle a le défaut de reposer également sur la fonction théta de Jacobi spécifiquement liée à la fonction de Riemann. H. Queffélec s'intéressa plus généralement aux points réguliers de $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin P(n)x)/P(n)$, P polynôme [11].

S. Itatsu utilisa la formule sommatoire de Poisson pour accéder à la dérivabilité [7]. On s'inspirera de cette méthode temps-fréquence pour les analyses en chirps et 2-microlocales des fonctions $r(x)$ ci-dessus en π. On retrouvera évidemment les dérivabilités bien connues. Une réponse partielle est proposée concernant la question, posée dans [9], de la classification 2-microlocale des fonctions de H. Queffélec au point régulier π. Pour l'analyse en chirps, on propose une décomposition naturelle du terme d'erreur $\omega(h)$. Le cas $p = 2$ (fonction de Riemann) met en jeu une fonction indéfiniment oscillante *périodique* et le chirp associé est *trigonométrique* ([10], §7). Le cas $p > 2$ ($p = 3$ concerne la fonction d'Airy) fait intervenir des fonctions indéfiniment oscillantes *presque périodiques* (séries normalement convergentes de fonctions périodiques). On obtient dans les deux cas un développement asymptotique en série de chirps canoniques du terme d'erreur.

On s'intéresse ensuite à la fonction $g_\gamma(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty}(m^2 + n^2)^{-\gamma} \times \sin(m^2x + n^2y)$, au point (π, π). La méthode fréquentielle précédente se révèle infructueuse. Cette fois, c'est une analyse de Littlewood–Paley, variante de l'analyse en ondelette, qui permet de conclure. On observe ainsi que la fonction g_γ est continue pour $\gamma > 1$ et qu'au point (π, π) elle est en même temps différentiable (th. 3).

La partie II est consacrée aux fonctions indéfiniment oscillantes et aux chirps fondés sur elles (II.5). La partie III présente les espaces fonctionnels utilisés. En un point de dérivabilité x_0 de la fonction $r(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\sin n^p x$ (p entier ≥ 2) on montre dans la partie IV la nature oscillante du terme d'erreur $\omega(h) = r(x_0 + h) - r(x_0) - hr'(x_0)$ (th. 1). Dans la partie V on observe le lien entre le chirp $\omega(h)$ et les fonctions presque-périodiques (th. 2). On termine dans la partie VI par l'existence d'un plan tangent en (π, π) à la surface $z = \sum(m^2 + n^2)^{-\gamma}\sin(m^2x + n^2y)$ ($\gamma > 1$). Un appendice est consacré aux développements asymptotiques de la transformée de Fourier de e^{ix^p} (p entier ≥ 2) et de certaines fonctions associées.

II. A propos des fonctions indéfiniment oscillantes [10]

II.1. DÉFINITION 1. On dit qu'une fonction f est *indéfiniment oscillante* si f est mesurable et bornée sur un voisinage de ∞ et y admet pour tout n entier ≥ 0 une primitive n-ième bornée.

L'ensemble des fonctions indéfiniment oscillantes est notée $\mathrm{osc}(\infty)$.

EXEMPLES. • Pour c complexe tel que $\mathrm{Re}\, c < 0$ ou multiple non nul de i on a $e^{cx} \in \mathrm{osc}(\infty)$.

• $f \in \mathrm{osc}(\infty)$ si et seulement si $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{osc}(\infty)$.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{osc}(\infty)$. Plus généralement, une fonction à décroissance rapide est indéfiniment oscillante. En effet, une primitive n-ième bornée sera

$$\int_\infty^x dx_{n-1} \int_\infty^{x_{n-1}} \dots \int_\infty^{x_2} dx_1 \int_\infty^{x_1} f(u)\, du.$$

On utilise $|f(x)| < c/x^{n+2}$ pour voir cette propriété.

• Une fonction indéfiniment oscillante admet une primitive indéfiniment oscillante. Attention : $\cos \in \mathrm{osc}(\infty)$ mais sa primitive $1 + \sin \notin \mathrm{osc}(\infty)$.

• Si $f \in \mathrm{osc}(\infty)$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$, alors la série normalement convergente $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^\alpha x)/n^\beta$ est indéfiniment oscillante. En effet, si f

a pour primitives bornées $f_1, f_2, \dots$, alors g aura pour primitives bornées $\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n^\alpha x)/n^{\alpha+\beta}, \sum_{n=1}^{\infty} f_2(n^\alpha x)/n^{2\alpha+\beta}, \dots$

II.2. Soit $f = f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ une suite de primitives successives de f supposée indéfiniment oscillante. Naturellement la primitive f_n perturbée par un polynôme de degré $n-1$ reste primitive n-ième de f. Si la suite précédente est formée de primitives bornées, alors pour demeurer bornée f_n ne peut être perturbée que par une constante. On a la situation canonique suivante.

PROPOSITION 1. *Soit f indéfiniment oscillante. Il existe une unique suite $f = f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ de primitives successives bornées telle que $f'_{n+1} = f_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

Les primitives ci-dessus seront appelées *canoniques* dans la suite. La preuve de la proposition se fonde sur un lemme.

LEMME. *Si f est indéfiniment oscillante, une primitive n-ième bornée de f a ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n bornées.*

On note $f = g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ une suite de primitives successives bornées de f. Soit h_n une primitive n-ième de f supposée bornée. Il suffit pour démontrer le lemme de voir que h'_n est bornée. Mais h'_n est une primitive d'ordre $n-1$ de f et à ce titre $h'_n = g_{n-1} + P(x)$ où P est un polynôme de degré $\le n-2$. On raisonne par l'absurde pour montrer que le monôme dominant de P est constant.

La démonstration de la proposition se déduit facilement du lemme.

II.3. Pour une fonction f indéfiniment oscillante, on peut préciser l'algorithme de choix des primitives itérées canoniques dans les cas suivants.

(a) f *périodique continue* (*modèle* $\sin x$). Si on suppose f de période T alors sa valeur moyenne $\int_0^T f$ est nulle et les primitives itérées canoniques sont

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tf(t)\,dt, \ \dots,$$
$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tf_{n-1}(t)\,dt, \ \dots$$

En outre, pour une fonction périodique continue la nullité de la valeur moyenne caractérise la propriété d'être indéfiniment oscillante. En revanche, si on remplace la périodicité par la presque-périodicité, on a seulement $f \in \operatorname{osc}(\infty) \Rightarrow M(f) = 0$ où $M(f)$ est la quantité $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ qui prolonge la notion de valeur moyenne. En effet, l'exemple de Bohr ([2], p. 57) fournit une fonction à moyenne nulle de primitive non bornée.

(b) *f à décroissance rapide (modèle e^{-x})*. Dans ce cas, les primitives itérées sont $f_1(x) = \int_\infty^x f(t)\,dt, \dots, f_n(x) = \int_\infty^x f_{n-1}(t)\,dt, \dots$

II.4. *Fonction indéfiniment oscillante et développement asymptotique.* Les primitives itérées canoniques de e^{-x}, e^{ix} sont des multiples des fonctions initiales. Pour certaines fonctions indéfiniment oscillantes, cette multiplication (par une constante) devient un produit par un développement en série asymptotique. Réciproquement, si on perturbe multiplicativement une fonction indéfiniment oscillante par une série asymptotique, le caractère indéfiniment oscillant est conservé. On développe dans la suite ces deux thèmes. Les démonstrations sont fondées sur des intégrations par parties successives.

Proposition 2. (i) *Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} a < 0$ et $\beta \geq 0$. Alors $f(x) = e^{ax}/x^\beta \in \operatorname{osc}(\infty)$ et toute primitive canonique de f a un développement asymptotique en ∞ de la forme*

$$\forall N \textit{ entier}, \quad f(x)\biggl(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_N}{x^N} + \gamma_N(x)\biggr), \quad |\gamma_N(x)| \leq \frac{C_N}{x^{N+1}}.$$

(ii) *Soient $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 0$. Alors $f(x) = e^{ix^\alpha}/x^\beta \in \operatorname{osc}(\infty)$ et toute primitive canonique de f a un développement asymptotique en ∞ de la forme*

$$\forall N \textit{ entier}, \quad f(x)\biggl(\frac{a_0}{x^{\alpha-1}} + \frac{a_1}{x^{2\alpha-1}} + \dots + \frac{a_N}{x^{N\alpha-1}} + \gamma_N(x)\biggr),$$
$$|\gamma_N(x)| \leq \frac{C_N}{x^{(N+1)\alpha-1}}.$$

Par exemple, e^{-x}/x admet comme primitive $\int_\infty^x (e^{-t}/t)\,dt$ avec le développement asymptotique suivant :

$$\frac{e^{-x}}{x}\biggl(\sum_{n=0}^N (-1)^{n+1}\frac{n!}{x^n} + \gamma_N(x)\biggr), \qquad \gamma_N(x) = \mathcal{O}\biggl(\frac{1}{x^{N+1}}\biggr).$$

On reconnaît dans la parenthèse la série asymptotique partout divergente d'Euler.

C o m m e n t a i r e. Dès que $\alpha \geq 1$, e^{ix^α} est indéfiniment oscillante, en revanche $e^{i\sqrt{x}}$ ne l'est pas. Intuitivement, les oscillations à l'infini de $e^{i\sqrt{x}}$ ne sont pas assez rapides pour borner une primitive.

Le résultat précédent suggère le résultat plus systématique suivant.

Proposition 3. (i) $f \in \operatorname{osc}(\infty) \Rightarrow f(x)/x^\beta \in \operatorname{osc}(\infty)$, *$\beta \geq 0$ réel.*
(ii) $f \in \operatorname{osc}(\infty) \Rightarrow f(x^\alpha) \in \operatorname{osc}(\infty)$, *$\alpha \geq 1$ réel.*

(iii) *Si pour tout N entier ≥ 0,*

$$g(x) = f(x)\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_N}{x^N} + \gamma_N(x)\right), \qquad |\gamma_N(x)| \leq \frac{C_N}{x^{N+1}},$$

alors $f \in \operatorname{osc}(\infty) \Rightarrow g \in \operatorname{osc}(\infty)$.

A propos de (ii), on peut par exemple donner la primitive canonique de $f(x^\alpha)$: elle s'écrit

$$\int_\infty^x f(t^\alpha)\,dt = \frac{f_1(x^\alpha)}{x^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{f_N(x^\alpha)}{x^{N\alpha-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{(n+1)\alpha-1}}\right),$$

avec $f_1, \ldots, f_N$ les primitives canoniques successives de f.

II.5. *Chirps* [10]. Un *chirp à droite* g est une fonction construite sur un voisinage de 0 à droite avec une fonction $f \in \operatorname{osc}(\infty)$ et deux réels $\alpha > -1$, $\beta > 0$ à l'aide de la formule

$$g(x) = x^\alpha f(1/x^\beta). \tag{1}$$

On définit de manière analogue un *chirp à gauche*. Un *chirp* est alors un chirp à droite et à gauche. Si f est de régularité höldérienne r, on dit que le chirp associé est de classe (α, β, r).

Soit g un chirp. On note g_n, $n = 0, 1, \ldots$, la primitive n-ième de g s'annulant en 0. On a

$$|g_n(x)| \leq C_n |x|^{\alpha+n(\beta+1)}. \tag{2}$$

La propriété (2) est en fait caractéristique : si une fonction f localement intégrable près de 0 vérifie (2), alors c'est un chirp. Autrement dit, la fonction f associée à g par (1) (i.e. $f(u) = u^{-\alpha/\beta} g(1/u^{1/\beta})$) est indéfiniment oscillante. On remarque alors immédiatement qu'une primitive de chirp (paramètres α, β) est un chirp (paramètres $\alpha + \beta + 1$, β). En outre, si ce choix est construit sur une fonction indéfiniment oscillante d'exposant de Hölder r, la primitive est alors associée à une fonction indéfiniment oscillante d'exposant $\inf(r, (\alpha+1)/\beta)+1$ ([10], lemme 1 et remarque après le lemme 4).

III. Echelles de régularité fonctionnelle utilisées

III.1. (a) *Espace de Hölder global $C^s(\mathbb{R})$ (non homogène).* Si $0 < s < 1$, la fonction continue f appartient à $C^s(\mathbb{R})$ si elle est bornée et si $|f(x+h) - f(x)|/|h|^s$ est majoré uniformément par rapport aux réels x et h.

Si $m < s < m + 1$, m entier, la fonction f appartient à $C^s(\mathbb{R})$ si elle est m fois dérivable avec $f^{(m)}$ appartenant à $C^{s-m}(\mathbb{R})$.

Pour s entier, la définition est un peu différente [10]. On ne l'utilisera pas dans la suite.

(b) *Espace de Hölder local* $C^s_{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour m entier et $m < s < m+1$, la fonction f appartient à $C^s_{x_0}$ s'il existe un polynôme $P(x)$ (unique) de degré $\leq m$ tel que $f(x) - P(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|^s)$.

(c) *Espace* 2-*microlocal* $C^{s,s'}_{x_0}$. On utilise une décomposition de Littlewood–Paley dont on rappelle la définition. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit égale à 1 sur un voisinage de 0. On note alors ψ la fonction telle que $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi)$; ψ est bien sûr dans la classe de Schwartz. Soient S_0 l'opérateur de convolution par φ et Δ_j l'opérateur de convolution par $2^j\psi(2^jx)$, de sorte que

$$I = S_0 + \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots$$

C'est-à-dire que si f est une distribution tempérée, on a $f(x) = S_0 f(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f(x)$.

Pour s, s' des réels, l'espace $C^{s,s'}_{x_0}$ (local) est l'ensemble des distributions tempérées f telles qu'il existe $C = C(f)$ et $\mu = \mu(f)$ vérifiant, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout x tel que $|x - x_0| < \mu$,

$$\begin{aligned} |S_0 f(x)| &\leq C(1 + |x - x_0|)^{-s'}, \\ |\Delta_j f(x)| &\leq C 2^{-js}\big(1 + 2^j|x - x_0|\big)^{-s'}. \end{aligned} \tag{1}$$

On notera que l'appartenance 2-microlocale ne dépend pas du choix de la fonction φ utilisée dans la décomposition de Littlewood–Paley. On utilise en général une fonction φ telle que $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1/2$ et $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$ de sorte que la transformée de Fourier de $\Delta_j f$ a son support dans $2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$ ([8], [10]).

Ces espaces remplacent commodément les espaces höldériens locaux car ils possèdent de meilleures propriétés vis-à-vis des opérateurs usuels. Par exemple, $f \in C^{s,s'}_{x_0}$ si et seulement si $f' \in C^{s-1,s'}_{x_0}$.

On développe d'une manière analogue les définitions et propriétés élémentaires en dimension deux (distribution en deux variables x et y). Par exemple, si Λ_α est l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α, on a $f \in C^{s,s'}_{x_0,y_0} \Leftrightarrow \Lambda_\alpha f \in C^{s-\alpha,s'}_{x_0,y_0}$. On a également

Lemme. *Pour s, s' des réels tels que $s > 0$, $s + s' > 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$C^{s,s'}_{(x_0,y_0)} \subset C^s_{(x_0,y_0)}.$$

En particulier, si $s > 1$ et $f \in C^{s,s'}_{(x_0,y_0)}$ alors f est différentiable en (x_0, y_0).

IV. Etude de $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin n^p x$ en un de ses points de dérivabilité (p entier ≥ 2)

IV.1. La fonction $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin n^p x$ (p entier ≥ 2) est dérivable en x_0 si et seulement si $x_0 = \pi r_1/r_2$ avec $r_1 \in \mathbb{Z}$, $r_2 \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=0}^{2r_2-1} e^{i\pi n^p r_1/r_2} = 0$. H. Queffélec a donné la formule

$$r'(x_0) = -\frac{1}{2r_2} \sum_{n=1}^{2r_2} n \cos(n^p x_0).$$

En fait, $r'(x_0) = -1/2$ et c'est une conséquence du lemme suivant.

Lemme. *Soit a un nombre complexe de module* 1, *p entier* ≥ 2, *N entier. Si $a^N = 1$ et $\sum_{n=1}^{N} a^{n^p} = 0$ alors* $\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} n a^{n^p} = N/2$.

La fluctuation de r près de x_0 se réfléchit dans le reste $\omega(h) = r(x_0 + h) - r(x_0) + \frac{1}{2}h$ que nous étudierons de deux façons équivalentes.

Théorème 1. *Soit $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin n^p x$, p entier ≥ 2. Soit x_0 un point de dérivabilité de r. Alors on a*

(i) $r \in C_{x_0}^{(2p-1)/(2p-2)}$ *et* $r \in C^{(p-1)/p}$.

(ii) *Analyse* 2*-microlocale* :

$$r \in C_{x_0}^{s,s'} \Leftrightarrow s + s' \leq 1 - 1/p \text{ et } ps + s' \leq p - 1/2.$$

(iii) *Analyse par chirps* :

$$\omega(h) \text{ est un chirp de classe } \left(\frac{2p-1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, 1 - \frac{1}{p}\right).$$

Remarques. • π est un point où toutes les fonctions $r(x)$ étudiées sont dérivables.

• Dans la démonstration du théorème on retrouvera la dérivabilité de r en x_0 et la valeur $-1/2$ du nombre dérivé.

• L'équivalence des deux analyses ci-dessus est assurée par le théorème 2 de [10] qui affirme que si $f(x) = u(x) + \omega(x)$ près de 0 avec u indéfiniment dérivable alors ω est un chirp de classe (α, β, r) si et seulement si $f \in C_0^{s,s'}$ pour $s + s' \leq r$ et $(\beta + 1)s + \beta s' \leq \alpha$.

• Quand p croît, la régularité maximale ponctuelle se dégrade et la régularité minimale ponctuelle (i.e. la régularité höldérienne globale) s'améliore. Les exposants correspondants tendent vers 1. Le comportement de r a tendance à s'uniformiser pour les grandes valeurs de p.

La démonstration repose sur une représentation intégrale (unique) de la partie oscillante.

PROPOSITION 4. *Pour* $h > 0$ (*resp. pour* $h < 0$), *il existe une* unique *fonction* $\sigma_1 \in \operatorname{osc}(\infty)$ *telle que*

$$\begin{aligned}\omega(h) &= |h|^{1+1/(2p-2)}\sigma_1(|h|^{-1/(p-1)}) \\ &\quad + \int_0^h |t|^{1/(2p-2)}\sigma_1(|t|^{-1/(p-1)})\,dt + \mathcal{O}\big(|h|^N\big),\end{aligned}$$

pour tout N *entier.*

Remarques. • La formule (3) ci-dessous donnera la forme explicite de σ_1.

• Le terme intégral dans la représentation de $\omega(h)$ est évidemment un terme d'erreur car il est $\mathcal{O}(|h|^{1+3/(2p-2)})$ (c'est la primitive d'un chirp de paramètres $1/(2p-2)$ et $1/(p-1)$).

On va démontrer cette proposition de structure pour $p = 3$ (le cas général est semblable). Ce qui suit résulte d'une application judicieuse de la formule sommatoire de Poisson à coefficients périodiques qu'on rappelle maintenant.

LEMME 1. *Si* (a_n) *est une suite périodique de période* N, *on a pour* $h > 0$,

$$h\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(nh) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{p=0}^{N-1} a_p e^{2i\pi pn/N}\Big)\widehat{f}\Big(\frac{2\pi n}{hN}\Big)$$

dès que (*ce cas suffira dans la suite*) f *et* $\widehat{f}$ *sont* $\mathcal{O}(|x|^{-1-\delta})$ *à l'infini pour un certain* $\delta > 0$.

On pose $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^3x}/n^3$. Soit $x_0 = \pi r_1/r_2$ un multiple rationnel de π. La suite $a_n = e^{in^3x_0}$, $n = 0, \pm1, \ldots$, est $2r_2$-périodique. On note $f(x) = (e^{ix^3} - 1)/x_3$. Alors pour $h > 0$,

$$R(x_0 + h) - R(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^3x_0}\bigg(\frac{e^{in^3h} - 1}{n^3}\bigg) = h\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nh^{1/3}).$$

En passant à la partie imaginaire de ce qui précède, il vient

$$\begin{aligned}2i(r(x_0 + h) - r(x_0)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n h f(nh^{1/3}) - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n h\overline{f(nh^{1/3})} \\ &= h\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(nh^{1/3}) - ih.\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule de Poisson généralisée pour obtenir

$$r(x_0 + h) - r(x_0) + \frac{1}{2}h = \frac{h^{2/3}}{2i}c_0\widehat{f}(0) + \frac{h^{2/3}}{2i}\sum_{n\neq 0} c_n\widehat{f}\bigg(\frac{\pi n}{h^{1/3}r_2}\bigg). \tag{1}$$

La constante c_0 vaut $\sum_{p=0}^{2r_2-1} a_p = \sum_{n=0}^{2r_2-1} e^{i\pi n^3 r_1/r_2}$. L'égalité (1) vaut pour $h > 0$. Pour $h < 0$, on écrit $r(x_0+h) - r(x_0) + \frac{1}{2}h = \mathrm{sgn}(h)(r(-x_0+|h|) - r(-x_0) + \frac{1}{2}|h|)$. On a ainsi une équation analogue à (1) en $-x_0$. Il nous suffit donc de poursuivre l'étude dans le cas $h > 0$.

Si la constante c_0 est différente de 0, le point x_0 aura un exposant höldérien 2/3 et ne pourra être un point de dérivabilité. On se place maintenant dans le cas $c_0 = 0$ (alors $0 = c_{2r_2} = c_{4r_2} = \ldots$ car la suite c_n est également $2r_2$-périodique).

L'égalité (1) se réduit alors à

$$\omega(h) = h^{2/3} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \widehat{f}\left(\frac{\pi n}{h^{1/3} r_2}\right), \tag{2}$$

(c_n) étant une suite $2r_2$-périodique sur $\mathbb{Z}$ avec $c_0 = 0$.

Quand h est petit, toutes les valeurs de $\widehat{f}(\xi)$ figurant dans (2) correspondent à des grandes valeurs de ξ. Pour cette raison, on doit faire l'étude asymptotique de $\widehat{f}$. C'est l'objet du lemme suivant où $I_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u^3/3-u)}\,du$.

Lemme. *Pour $\xi < 0$, $\widehat{f}(\xi)$ est à décroissance rapide ainsi que ses dérivées. Pour $\xi > 0$, on a*

$$\widehat{f}(\xi) = \xi^2 \int_0^{1/\xi} \mathrm{Im}\left(I_-\left(\frac{1}{v^{3/2}}\right)\right)\sqrt{v}\,dv.$$

Ce lemme résulte facilement de l'appendice donnant le comportement de $\widehat{e^{ix^3}}$ et une représentation intégrale de $\widehat{f}$ à l'aide de $\widehat{e^{ix^3}}$.

Si on note ensuite $I_-(x) = \theta(x)/\sqrt{x}$, grâce à la partie II on sait que θ est une fonction C^∞ et indéfiniment oscillante de la forme $e^{-\frac{2}{3}ix}(a_0 + a_1/x + \ldots)$. Soit alors θ_1 la primitive canonique de θ et

$$\sigma_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_1(n^{3/2}x)}{n^{7/4}}. \tag{3}$$

La fonction $\sigma_1(x)$ est encore indéfiniment oscillante.

On reprend maintenant l'expression (2) de $\omega(h)$ qu'on écrit $\omega_1(h) + \omega_2(h)$ avec $\omega_1 = \sum_{n<0}$ et $\omega_2 = \sum_{n>0}$. Comme $\widehat{f}(\xi)$ est à décroissance rapide pour $\xi < 0$, ω_1 et ses dérivées sont $\mathcal{O}(h^N)$ pour tout entier N.

En ce qui concerne $\omega_2(h)$, en utilisant le lemme 2 et la forme de I_- il vient, à des constantes multiplicatives modifiées près,

$$\omega_2(h) = \sum_{n>0} c_n n^2 \int_0^{h^{1/3}/n} \theta\left(\frac{1}{v^{3/2}}\right) v^{5/4}\,dv. \tag{4}$$

Après le changement de variable $v = u^{2/3}$ on obtient

$$\omega_2(h) = \sum_{n>0} c_n n^2 \int_0^{h^{1/3}/n^{3/2}} \theta\left(\frac{1}{u}\right)\sqrt{u}\,du. \tag{5}$$

En remarquant que $\theta_1(1/u)' = -(1/u^2)\theta(1/u)$ on intègre par parties dans chaque intégrale ci-dessus pour obtenir (toujours à des constantes multiplicatives omises près)

$$\omega_2(h) = h^{5/4}\sigma_1\left(\frac{1}{h^{1/2}}\right) + \int_0^h t^{1/4}\sigma_1\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)dt. \tag{6}$$

On a obtenu la forme requise; l'unicité de σ_1 se démontre aisément.

Démonstration du théorème 1. Si r est l'exposant de Hölder global de σ_1, le premier terme de $\omega(h)$ est un chirp de classe $\left(1+\frac{1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, r\right)$. Le deuxième est la primitive d'un chirp de classe $\left(\frac{1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, r\right)$; c'est donc un chirp de classe $\left(1 + \frac{1}{2p-2} + \frac{1}{p-1}, \frac{1}{p-1}, r+1\right)$ (II.5).

Si $\alpha \le \alpha'$, il est immédiat d'observer que la somme de deux chirps respectivement de classe (α, β, r) et (α', β, r) est un chirp de classe (α, β, r). Par conséquent, $\omega(h)$ est un chirp de classe $\left(1 + \frac{1}{2p-2}, \frac{1}{p-1}, r\right)$. Autrement dit, $r(x) \in C^{s,s'}_{x_0}$ si et seulement si $s + s' \le r$ et

$$\frac{ps}{p-1} + \frac{s'}{p-1} \le \frac{2p-1}{2p-2}.$$

En faisant $s' = 0$ dans les inégalités précédentes, on trouve l'exposant global de Hölder de $r(x)$ comme valeur maximum de s. Cette propriété est immédiate en revenant à la définition des espaces 2-microlocaux. On trouve ainsi inf $\left(r, \frac{2p-1}{2p}\right)$. Mais un calcul direct fondé sur l'ordre de grandeur d'un bloc dyadique de $r(x)$ donne $(p-1)/p$. Comme

$$\frac{p-1}{p} < \frac{2p-1}{2p},$$

il vient $r = 1 - 1/p$ et la démonstration s'achève.

Remarque. L'unicité de σ_1 dans la proposition 4 permet de décomposer la partie oscillante en un chirp dominant et un chirp d'erreur de manière naturelle. On donnera dans la suite une autre présentation de cette partie oscillante.

IV.2. *Retour aux fonctions de Riemann et d'Airy.* Dans le cas de la fonction de Riemann ($p = 2$), à l'aide de la remarque App. 1 et du théorème 1, on observe que la fonction σ_1 est essentiellement la fonction de Riemann réduite à ses termes impairs et en se limitant à $h > 0$ on a

$$\omega(h) = h^{3/2}\sigma_1\left(\frac{1}{h}\right) + \int_0^h h^{1/2}\sigma_1\left(\frac{1}{h}\right) dh.$$

Ainsi $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots$ sont 2π-périodiques à moyenne nulle. Ces fonctions apparaissent lors d'intégrations par parties successives dans $\omega(h)$ pour obtenir

$$\omega(h) = h^{3/2}\left(\sigma_1\left(\frac{1}{h}\right) + a_2 h\sigma_2\left(\frac{1}{h}\right) + \ldots + a_{q-1}h^{q-1}\sigma_{q-1}\left(\frac{1}{h}\right)\right) + a_q \int_0^h \sigma_{q-1}\left(\frac{1}{t}\right) t^{q-1/2}\, dt$$

($a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q$ sont des constantes).

Cette partie oscillante $\omega(h)$ se révèle être un chirp trigonométrique selon la définition donnée dans [10]. Pour ces chirps, le développement asymptotique ci-dessus est unique [10].

Quand $p = 3$, la fonction indéfiniment oscillante θ qui sert à construire σ_1 est de la forme $e^{ix}(a_0 + a_1/x + \ldots)$. On a alors $\sigma_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_1(n^{3/2}x)/n^{7/4}$. On peut penser que le terme dominant du développement asymptotique de θ_1 donne les caractéristiques de $\omega(h)$. Ce point de vue conduit à la *fonction presque périodique* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in^{3/2}x}/n^{7/4} = g(x)$. L'exposant de Hölder global de cette fonction est $1/2$ alors que celui de $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \sin n^3 x$ est $2/3$. Il y a là une ambiguïté dissipée par le résultat suivant où l'on observera que la régularité $2/3$ est retrouvée pour la fonction g dès qu'on la calcule sur un intervalle borné à droite de l'origine.

V. Partie oscillante et fonction presque périodique [2]

V.1. Proposition 5. *Soit $s > 0$, $t > 1$, $t - s < 1$. La fonction continue $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^s x}/n^t$ est*

(i) *höldérienne sur $\mathbb{R}$ d'exposant $t/s - 1/s$,*
(ii) *höldérienne sur les compacts de $]0, \infty[$ d'exposant $t/s - 1/2$.*

Avec la condition $t - s < 1$, les exposants de Hölder considérés sont compris entre 0 et 1. On sera intéressé dans la suite par la série

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(3p-2)/(2p-2)} e^{in^{p/(p-1)}x}, \quad p \text{ entier} \geq 2.$$

Dans ce cas les exposants de Hölder sur $\mathbb{R}$ et sur les compacts de $]0, \infty[$ sont respectivement $1/2$ et $1 - 1/p$. Quand $p = 2$, les deux exposants sont égaux et par ailleurs la série $g(x)$ est périodique. Quand $p > 2$, on observe une amélioration de la régularité en dehors de 0. La série $g(x)$ est presque périodique mais n'est plus périodique et la propagation du mauvais comportement en 0 n'a plus lieu.

Pour démontrer (i), on estime les blocs dyadiques de S qui sont de l'ordre de $2^{-j(t-1)/s}$.

Pour démontrer (ii), on utilise cette fois une variante d'un lemme de van der Corput ([13], V, lemme 10.7, p. 226). On écrit $S(x+h)-S(x) = \sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N}^{\infty}$. La deuxième somme $\sum_{n=N}^{\infty} e^{in^s x}/n^t$ s'estime avec le lemme de van der Corput. Ainsi, dans les notations de ce lemme, pour x fixé positif, $f(u) = u^s x$, $r(u) = 1/u^t$, et il vient

$$\sum_{n=N}^{\infty} < \frac{1}{N^{t-1+s/2}\sqrt{x}} + \frac{1}{N^{s+t-1}x} + \frac{1}{N^t} + \frac{\sqrt{x}}{N^{t-s/2}} + \frac{1}{N^t} + \frac{x}{N^{t-s+1}}.$$

Des constantes multiplicatives (indépendantes de x) sont omises dans chaque terme du membre de droite. Le terme dominant est comme $1/N^{t-s/2}$. La première somme $\sum_{n=1}^{N}$ s'évalue à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. La dérivée utilisée est $\sum_{n=1}^{N} e^{ins}/n^{t-s}$ qu'on traite encore par le lemme de van der Corput (en remplaçant le t de la première utilisation par $t-s$). Cette dérivée est $\mathcal{O}(1/N^{t-3s/2})$. Par suite, sur un compact de $]0,\infty[$ on a

$$|S(x+h)-S(x)| \le |h|N^{3s/2-t} + N^{s/2-t}.$$

On choisit alors le découpage de la somme S tel que $N^s h \sim 1$, soit $N \sim 1/h^{1/s}$. Il vient $|S(x+h)-S(x)| \le C|h|^{t/s-1/2}$.

V.2. On peut maintenant utiliser des chirps explicites pour décrire la partie oscillante $\omega(h)$.

Pour $s>0$, $t>1$ on note $g_{s,t}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^s x}/n^t$, $x \ge 1$. Cette fonction est indéfiniment oscillante et presque périodique.

THÉORÈME 2. *Pour $h>0$ (resp. $h<0$), la partie oscillante $\omega(h)$ de $r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\sin n^p x$ (p entier ≥ 2) en un point de dérivabilité x_0 admet le développement en série asymptotique de chirps naturels* :

$$\omega(h) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n |h|^{1+(n+1/2)/(p-1)} g_{s,ns+t}(|h|^{-1/(p-1)})$$

avec $s = p/(p-1)$ et $t = (3p-2)/(2p-2)$; γ_n, $n = 0,1,\ldots$, sont des constantes.

R e m a r q u e s. • En dehors du cas $p=2$, le développement précédent n'est pas nécessairement unique.

• Le chirp générique dans le développement asymptotique du théorème 2 est de classe $\left(1+\frac{n+1/2}{p-1}, \frac{1}{p-1}, \frac{p-1}{p}+n\right)$.

On va obtenir le développement annoncé quand $p=3$ à l'aide de la formule (3) (voir la remarque suivant la proposition 4). La fonction $\sigma_1(x)$ s'écrit

$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_1(n^{3/2}x)/n^{7/4}$, avec $\theta_1(x)$ primitive canonique d'une fonction $\theta(x)$ indéfiniment oscillante ayant un développement asymptotique de la forme $e^{-\frac{2}{3}ix}(a_0+a_1/x+\ldots)$. La fonction $\theta_1(x)$ admet aussi un développement de la forme précédente avec des constantes $a_0, a_1, \ldots$ modifiées. Dans l'explication qui suit $e^{-\frac{2}{3}ix}$ sera remplacé par e^{ix} pour simplifier les notations. Les fonctions $e^{ix}, e^{ix}/x, \ldots, e^{ix}/x^n, \ldots$ donnent naissance dans σ_1 aux fonctions

$$g_{3/2,7/4}(x), \quad \frac{1}{x}g_{3/2,7/4+3/2}, \ \ldots, \ \frac{1}{x_n}g_{3/2,7/4+n\cdot 3/2}, \ \ldots$$

Le terme correctif $\omega(h)$ à l'aide de la proposition 4 s'écrit pour $h>0$ (situation analogue pour $h<0$)

$$h^{5/4}\sigma_1(h^{-1/2})+\int_0^h t^{1/2}\sigma_1(t^{-1/2})\,dt. \tag{1}$$

On remplace σ_1 par chacune des fonctions précédentes et on doit obtenir des contributions attendues comme $h^{5/4+n/2}g_{3/2,7/4+n\cdot 3/2}(h^{-1/2})$.

Pour la fonction e^{ix}, la représentation (1) donne

$$h^{5/4}g_{3/2,7/4}(h^{-1/2})+\int_0^h t^{1/4}g_{3/2,7/4}(t^{-1/2})\,dt. \tag{2}$$

Sachant que la dérivée de $g_{3/2,7/4+3/2}(t^{-1/2})$ est $t^{-3/2}g_{3/2,7/4}(t^{-1/2})$ à une constante multiplicative près, on intègre par parties et on obtient $h^{7/4}g_{3/2,7/4+3/2}(h^{-1/2})$. On recommence le procédé avec l'intégrale restante. Les fonctions obtenues sont celles qui étaient prévues.

Pour la fonction e^{ix}/x, la représentation (1) donne cette fois

$$h^{7/4}g_{3/2,7/4+3/2}(h^{-1/2})+\int_0^h t^{3/4}g_{3/2,7/4+3/2}(t^{-1/2})\,dt. \tag{3}$$

Après intégrations par parties, les fonctions obtenues seront encore $h^{7/4}g_{3/2,7/4+3/2}(h^{-1/2})$, $h^{9/4}g_{3/2,7/4+2\cdot 3/2}(h^{-1/2}), \ldots$

La fonction générique e^{ix}/x^n permettra d'obtenir

$$h^{5/4+n/2}g_{3/2,7/4+n\cdot 3/2}(h^{-1/2}), \ \ldots$$

On a ainsi le résultat annoncé dans le théorème 2.

VI. Différentiabilité en (π,π) de $\sum_{m,n=1}^{\infty}(m^2+n^2)^{-\gamma}\sin(m^2x+n^2y)$, $\gamma>1$

La démonstration suivante m'a été suggérée par Yves Meyer et le résultat indique les limites des méthodes des sections précédentes.

VI.1. LEMME. *Soient $s>0$ et $s'<0$. Si $f\in C_0^{s,s'}$, alors $f(x)f(y)\in C_0^{s,s'}$ si $s+s'>0$ et $f(x)f(y)\in C_0^{s,2s'+s}$ si $s+s'<0$.*

C o m m e n t a i r e. Quand on passe du cas $s + s'$ positif au cas $s + s'$ négatif on observe que le produit $f(x)f(y)$, analysé ponctuellement en 0, est plus irrégulier que prévu (s' est remplacé par $s' + (s + s')$).

Le résultat annoncé dans le théorème disparaît quand $s < 0$. En effet, $\delta \in C_0^{-1,s'}$ $\forall s'$ et pourtant on n'a que $\delta \otimes \delta \in C_{(0,0)}^{-2,s'}$ $\forall s'$.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e. On écrit une analyse de Littlewood–Paley de f en 0, soit $f(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)$, munie des conditions $|g(x)| \le C(1 + 2^j|x|)^{-s'}$ et $|u_j(x)| \le C2^{-js'}(1 + 2^j|x|)^{-s'}$. On pose $g(x) = u_{-1}(x)$ pour la commodité des notations.

Si $S_j(x) = \sum_{k=-1}^{j} u_k(x)$, on obtient

$$f(x)f(y) = \sum_{j=-1}^{\infty} w_j(x,y) \tag{1}$$

avec $w_j(x,y) = u_j(x)S_{j-1}(y) + S_{j-1}(x)u_j(y) + u_j(x)u_j(y)$. Les $w_j(x,y)$ forment un découpage fréquentiel analogue à une couronne dyadique de sorte que l'on a affaire à une analyse de Littlewood–Paley de $f(x)f(y)$ en 0.

Il reste à estimer les trois termes composant $w_j(x,y)$ et il suffira de se limiter aux cas suivants : (a) $u_j(x)S_{j-1}(y)$, (b) $u_j(x)u_j(y)$. On utilisera les remarques suivantes :

(i) comme $s' < 0$, $(1+u)^{-s'}/(1+u^{-s'})$ est bornée sur $[0,\infty[$,

(ii) comme $s > 0$, 2^{-js} est négligeable devant 1 quand $j \to \infty$,

(iii) le terme dominant dans $1 + 2^{-j(s+s')}$ (quand $j \to \infty$) est $2^{-j(s+s')}$ quand $s + s' < 0$ et 1 quand $s + s' > 0$.

(a) $u_j(x)S_{j-1}(y)$. On part de $|u_j(y)| \le C2^{-js}(1 + 2^{-js'}|y|^{-s'})$. En sommant, il vient avec des constantes C modifiées

$$|S_{j-1}(y)| \le \begin{cases} C(1 + 2^{-j(s+s')}|y|^{-s'} & \text{si } s + s' < 0, \\ C(1 + |y|^{-s'}) & \text{si } s + s' > 0. \end{cases}$$

En tenant compte du résultat escompté on prouve que pour $|x|, |y| \le 1$,

$$(1 + 2^{-js'}|x|^{-s'})(1 + 2^{-j(s+s')}|y|^{-s'}) \le C(1 + 2^{-j(s+2s')}(|x| + |y|)^{-(s+2s')})$$

pour $s + s' < 0$ et

$$(1 + 2^{-js'}|x|^{-s'})(1 + |y|^{-s'}) \le C(1 + 2^{-js'}(|x| + |y|)^{-s'})$$

pour $s + s' > 0$.

(b) $u_j(x)u_j(y)$. La majoration s'obtient sans difficulté.

VI.2. THÉORÈME 3. *Soit* $f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (m^2 + n^2)^{-\gamma} \sin(m^2x + n^2y)$ $(\gamma > 1)$. *On a* $f \in C_{(\pi,\pi)}^{3\gamma/2-1/2-\varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$. *En particulier*, f *est différentiable en* (π,π).

Remarques. • Comme la suite le prouvera, on ne peut avoir $\varepsilon = 0$ dans l'énoncé précédent.

• Quand $\gamma > 1$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (convergence normale de la série définissant f); mais en (π,π), f possède un supplément de régularité höldérienne d'exposant proche de 1 si γ est proche de 1 (d'après le th. 3). C'est ce supplément qui assure la différentiabilité de f en (π,π).

Observons la situation analogue en une variable. Si $\gamma > 1/2$ alors $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} \sin n^2 x \in C_\pi^{2\gamma-1/2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On applique pour le voir une dérivation fractionnaire à $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in^2x}/n^2$ dont on connaît le comportement 2-microlocal en π; on en déduit celui de g, à savoir : $g \in C_\pi^{s,s'} \Leftrightarrow s + s' \le \alpha - 1/2$ et $2s + s' \le 2\alpha - 1/2$. La fonction g est globalement continue quand $\gamma > 1/2$. En π, il y a un supplément de caractère höldérien (1/2) insuffisant pour obtenir la dérivabilité. En fait, la fonction g est dérivable en π dès que $\gamma > 3/4$.

Les fonctions f et g ci-dessus ont ainsi un supplément de caractère höldérien respectivement en (π,π) et π dès qu'elles sont globalement continues. C'est un phénomène de “tout ou rien”. Mais la situation est spectaculaire en deux variables car si $\gamma > 1$ la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ et aussitôt différentiable en (π,π).

Démonstration du théorème 3. On sait que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in^2x} \in C_\pi^{s,s'}$ si et seulement si $s + s' \le -1/2$ et $2s + s' \le -1/2$ (dérivée de la fonction de Riemann). D'après le lemme précédent, comme $s + s'$ est négatif, il en résulte que $\sum e^{i(m^2x+n^2y)} = (\sum e^{im^2x})(\sum e^{in^2y}) \in C_{(\pi,\pi)}^{s,s'}$ quand $s > 0$, $s + s' \le -1$ et $3s + s' \le -1$. Par ailleurs, la dérivation fractionnaire d'ordre γ agissant sur $\sum e^{i(m^2x+n^2y)}/\sqrt{n^4+m^4}^{\,\gamma}$ donne $\sum e^{i(m^2x+n^2y)}$ et transforme une distribution de $C_{(\pi,\pi)}^{s,s'}$ en une autre de $C_{(\pi,\pi)}^{s-\gamma,s'}$. Par suite, $h(x,y) = \sum e^{i(m^2x+n^2y)}/\sqrt{n^4+m^4}^{\,\gamma} \in C_{(\pi,\pi)}^{s,s'}$ si $s > 0$ et $3s + s' \le -1 + 3\gamma$. Mais on passe de h à la fonction f étudiée par action d'un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0 (symbole associé homogène de degré 0) qui conserve les espaces 2-microlocaux. En outre, si $s > 0$ et $s + s' > 0$, on a $C_{(\pi,\pi)}^{s,s'} \subset C_{(\pi,\pi)}^{s}$; on en déduit que pour $\gamma > 1$, la fonction f appartient à $C^{3\gamma/2-1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Appendice

1. On précise ici le comportement asymptotique d'une famille d'intégrales utile à notre propos.

PROPOSITION. *Soit* $I_\pm(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u^p/p \pm u)}\,du$; $\lambda \in]0,\infty[$; p *entier* ≥ 2.

(i) I_+ *et* I_- *sont indéfiniment dérivables sur* $]0,\infty[$.

(ii) *Si p est pair, alors $I_+(\lambda) = I_-(\lambda)$ et*

$$I_+(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma(p-1)}}\Big(\exp i\Big(-\frac{p-1}{p}\lambda + \frac{\pi}{4}\Big)\Big) \\ \times \Big(1 + \frac{ia_1}{\lambda} + \ldots + \frac{i^N a_N}{\lambda^N} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\lambda^N}\Big)\Big)$$

avec $a_1, a_2, \ldots$ réels.

(iii) *Si p est impair, alors I_+ est à décroissance rapide et*

$$I_-(\lambda) = 2\,\mathrm{Re}\bigg\{\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda(p-1)}}\Big(\exp i\Big(-\frac{p-1}{p} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big) \\ \times \Big(1 + \frac{ia_1}{\lambda} + \ldots + \frac{i^N a_N}{\lambda^N} + t\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\lambda^N}\Big)\Big)$$

avec $a_1, a_2, \ldots$ réels.

Les développements asymptotiques précédents sont par exemple obtenus par la méthode de la phase stationnaire ([12], p. 430). Pour $p = 2$, on a $I_+(\lambda) = I_-(\lambda) = \sqrt{2\pi/\lambda}e^{-i(\lambda/2-\pi/4)}$, formule qui s'obtient aussi à l'aide de l'intégrale de Fresnel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda v^2} dv$. Pour $p = 3$, les intégrales $I_\pm$ sont naturellement liées à la fonction d'Airy $\mathcal{A}_i(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^3/3 + \xi u)\, du$. Quand $\xi \to -\infty$, à l'aide du développement de I_- on retrouve le caractère oscillant lentement amorti de $\mathcal{A}_i$.

Corollaire. *Soit p entier ≥ 2. Avec les notations ci-dessus on a, à une constante multiplicative près,*

$$\mathcal{F}(e^{ix^p})(\xi) = \begin{cases} \xi^{1/p-1} I_-(\xi^{p/(p-1)}), & \xi > 0, \\ |\xi|^{1/p-1} I_+(|\xi|^{p/(p-1)}), & \xi < 0. \end{cases}$$

Par exemple, pour $p = 3$ on a

$$\mathcal{F}(e^{ix^3})(\xi) \sim \frac{e^{-(2/3)i\xi^{3/2}}}{\xi^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \alpha_n}{\xi^{(3/2)n}} \quad \text{en } \infty$$

($\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ réels et $\alpha_0 \neq 0$).

2. La proposition suivante permet de déduire le développement asymptotique (en $\pm\infty$) de la transformée de Fourier de $f(x) = (e^{ix^p} - 1)/x^p$ de celui de la transformée de Fourier de e^{ix^p}.

Proposition. *Soit p entier ≥ 2, $f(x) = (e^{ix^p} - 1)/x^p$, et $\phi(x) = e^{ix^p}$, $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$\widehat{f}(\xi) = pi \int_0^1 \widehat{\phi}\Big(\frac{\xi}{u}\Big) u^{p-2}\, du.$$

On remarque que f est analytique réelle et intégrable. Sa transformée de Fourier (usuelle) est continue et tend vers 0 à l'infini. En revanche, ϕ est analytique réelle bornée. Sa transformée de Fourier, définie par dualité, est malgré tout indéfiniment dérivable à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées. Elle s'écrit $\widehat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^p} e^{-ix\xi}\, dx$ (p.p.).

La proposition se démontre en écrivant $f(x) = i\int_0^1 e^{itx^p} dt$ et en développant les calculs après avoir remarqué que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = i \int_0^1 \mathcal{F}(\phi(t^{1/p}x))(\xi)\, dt.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash–Moser*, Savoirs actuels, Editions de CNRS, 1991.

[2] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, 1933.

[3] J. M. Bony, *Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations*, in: Hyperbolic Equations and Related Topics (Katata/Kyoto, 1984), Academic Press, Boston, 1986, 11–49.

[4] E. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press, 1965.

[5] J. Gerver, *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of* π, Amer. J. Math. 92 (1970), 33–55.

[6] M. Holschneider and P. Tchamitchian, *Pointwise analysis of Riemann's "non-differentiable" function*, Invent. Math. 105 (1991), 157–175.

[7] S. Itatsu, *The differentiability of the Riemann function*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 57 (1981), 492–495.

[8] S. Jaffard, *Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients*, Publ. Mat. 35 (1991), 155–168.

[9] Y. Meyer, *L'analyse par ondelettes d'un objet multifractal. La fonction* $\sum_1^\infty n^{-2} \sin n^2 t$ *de Riemann*, Colloquium mathématique de l'Université de Rennes, 1991.

[10] —, *Analyse par ondelettes et analyse deux-microlocale des chirps généralisés*, Cahiers de Mathématiques de la Décision, CEREMADE, no. 9246, 1992.

[11] H. Queffélec, *Dérivabilité de certaines sommes de séries de Fourier lacunaires*, Thèse, Orsay, 1971.

[12] F. Treves, *Introduction to Pseudo-Differential Operators and Fourier Integral Operators*, Vol. 2, Plenum, 1980.

[13] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed., Vol. 1, Cambridge University Press, 1959.

DIVISION MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DE COMPIÈGNE
BP 649
60206 COMPIÈGNE CEDEX, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 17.12.1993