COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVI 1993 FASC. 2

INDÉPENDANCE LINÉAIRE ET CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES ESPACES NORMÉS

PAR

ROBERT CAUTY (PARIS)

1. Introduction. Tous les espaces considérés ici sont supposés métrisables et séparables. Si Y est un sous-ensemble d'un espace normé E, nous notons $E(Y)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par Y. L'une des méthodes les plus classiques pour construire des espaces normés non complets étranges est de plonger un compact K comme sous-ensemble linéairement indépendant dans un espace de Banach E et de regarder les sous-espaces $E(X)$ engendrés par certains sous-ensembles de K. Ce procédé a, entre autres, été utilisé dans [1, chapitre VIII, §2 et 5], [5] et [8]. Nous nous proposons ici d'étudier la classification topologique et les produits de tels espaces.

Pour ce qui est de la classification topologique, nous prouverons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Pour $i = 1, 2$, soit K_i un sous-ensemble σ-compact linéairement indépendant d'un espace normé E_i, et soit X_i un sous-ensemble infini de K_i. Alors, $E(X_1)$ et $E(X_2)$ sont homéomorphes si, et seulement si, X_1 est homéomorphe à un fermé de $E(X_2)$ et X_2 homéomorphe à un fermé de $E(X_1)$.*

Pour tout espace X, nous noterons X^n le produit de n copies de X et X^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de X. Si E est un espace normé, nous noterons $W(E, 0)$ le sous-ensemble de E^∞ formé des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Pour une meilleure appréciation du résultat suivant, rappelons que l'on connaît des exemples d'espaces normés E qui ne sont pas homéomorphes à $E \times \mathbb{R}$ ou à $E \times E$ ([13]–[15]).

THÉORÈME 2. *Soient K un sous-ensemble σ-compact linéairement indépendant d'un espace normé E et X un sous-ensemble infini de K. Alors, $E(X)$, $E(X) \times \mathbb{R}$, $E(X) \times E(X)$ et $W(E(X), 0)$ sont homéomorphes.*

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 57N17.

La démonstration de ces théorèmes utilisera la théorie des ensembles absorbants développée dans [2]. Quelques définitions sont nécessaires pour pouvoir rappeler ce dont nous avons besoin. Si f et g sont deux fonctions de Y dans X et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X, nous dirons que f est *$\mathcal{U}$-proche* de g si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$. Un sous-ensemble F d'un rétracte absolu de voisinage X est appelé un *Z-ensemble* (resp. *Z-ensemble au sens fort*) dans X si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathcal{U}$-proche de l'identité et vérifiant $f(X) \cap F = \emptyset$ (resp. $\overline{f(X)} \cap F = \emptyset$). Une fonction $f : Y \to X$ est appelée un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(Y)$ est un Z-ensemble dans X. Un sous-espace A d'un espace X est dit *localement homotopiquement négligeable* dans X si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \setminus A$ dans X est une équivalence homotopique faible.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces. Un rétracte absolu de voisinage X est dit *fortement $\mathcal{C}$-universel* si, pour tout espace C appartenant à $\mathcal{C}$, tout fermé D de C, toute fonction continue $f : C \to X$ dont la restriction à D est un Z-plongement et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g : C \to X$ qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $f|D = g|D$.

Une classe $\mathcal{C}$ d'espaces est dite (i) *topologique* si tout espace homéomorphe à un espace appartenant à $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$, (ii) *additive* si tout espace qui est réunion de deux fermés appartenant à $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$ et (iii) *héréditaire pour les fermés* si tout fermé d'un espace appartenant à $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est une classe topologique, additive et héréditaire pour les fermés, un sous-ensemble Ω de l'espace de Hilbert ℓ^2 est dit *$\mathcal{C}$-absorbant dans ℓ^2* s'il vérifie les trois conditions suivantes :

(I) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, où chaque Z_n est un Z-ensemble dans Ω et appartient à $\mathcal{C}$,

(II) $\ell^2 \setminus \Omega$ est localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2,

(III) Ω est fortement $\mathcal{C}$-universel.

Le théorème 3.1 de [2] garantit que si E_1 et E_2 sont des copies de ℓ^2 et Ω_1, Ω_2 des sous-ensembles $\mathcal{C}$-absorbants dans E_1 et E_2 respectivement, alors Ω_1 et Ω_2 sont homéomorphes. Nous prouverons les théorèmes 1 et 2 à l'aide de ce résultat. La seule des conditions (I)–(III) dont la vérification présente des difficultés est l'universalité forte, aussi commencerons-nous par prouver quelques théorèmes très généraux sur ce sujet.

Pour tout espace X, nous notons $\mathcal{F}_0(X)$ la classe des espaces qui sont homéomorphes à des fermés de X.

THÉORÈME 3. *Si X est un fermé linéairement indépendant d'un espace normé de dimension infinie E, alors E est fortement $\mathcal{F}_0(X)$-universel.*

Nous notons I le segment $[0, 1]$.

THÉORÈME 4. *Soient E un sous-espace vectoriel de dimension infinie d'un espace normé E', K un compact linéairement indépendant de E' et $X = E \cap K$. Supposons $E \cap E'(K) = E(X)$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, E est fortement $\mathcal{F}_0(X^n \times I^n)$-universel.*

THÉORÈME 5. *Tout espace normé E homéomorphe à son carré est fortement $\mathcal{F}_0(E)$-universel.*

Ce dernier théorème nous permettra de caractériser les espaces normés E qui sont homéomorphes à des sous-espaces de ℓ^2 engendrés par des sous-ensembles de compacts linéairement indépendants; cette caractérisation peut aussi être regardée comme une sorte de réciproque du théorème 2.

THÉORÈME 6. *Soit E un espace normé de dimension infinie. Pour qu'il existe un sous-ensemble X d'un compact linéairement indépendant K de l'espace de Hilbert ℓ^2 tel que E soit homéomorphe à $\ell^2(X)$, il faut et il suffit que E soit homéomorphe à son carré et réunion dénombrable de Z-ensembles.*

Dans la dernière section, nous donnerons deux applications de ces théorèmes.

Rappelons quelques faits dont nous aurons besoin. Le théorème 2.3 de [17] entraîne que si E est un sous-espace vectoriel partout dense d'un espace normé F, alors $F \setminus E$ est localement homotopiquement négligeable dans F; en particulier, pour vérifier que E est $\mathcal{C}$-absorbant dans son complété, il est inutile de se soucier de la condition (II). Si E est un espace normé de dimension infinie, tout Z-ensemble dans E est un Z-ensemble au sens fort (cas particulier de la proposition 1.7 de [2]) et tout compact de E est un Z-ensemble (cas particulier du corollaire 1.8 de [2]). Nous utiliserons de façon répétée le lemme suivant, dont la vérification facile est laissée au lecteur.

LEMME. *Soient $B \subset A$ des fermés d'un espace normé de dimension infinie E. Si B est un Z-ensemble et $A \setminus B$ localement homotopiquement négligeable dans E, alors A est un Z-ensemble dans E.*

Nous dirons qu'une fonction $f : X \to Y$ est *fermée au-dessus d'un sous-ensemble* A de Y si, pour tout a dans A et tout voisinage U de $f^{-1}(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f^{-1}(V) \subset U$. Si $\mathcal{U}$ est une famille de sous-ensembles d'un espace X et A un sous-espace de X, nous notons $\mathrm{St}(A,\mathcal{U})$ la réunion des éléments de $\mathcal{U}$ qui rencontrent A; si $A = \{x\}$, nous notons $\mathrm{St}(x,\mathcal{U})$ au lieu de $\mathrm{St}(\{x\},\mathcal{U})$. Nous définissons par récurrence $\mathrm{St}^n(\mathcal{U})$ par $\mathrm{St}^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ et $\mathrm{St}^n(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U, \mathrm{St}^{n-1}(\mathcal{U})) : U \in \mathcal{U}\}$ pour $n \geq 1$. Nous notons $B(x,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε.

2. Démonstration du théorème 3. Nous pouvons supposer la dimension algébrique de E indénombrable, car sinon E est homéomorphe au sous-espace σ de ℓ^2 formé des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls ([1], chapitre VIII, théorème 3.1), et il est connu que σ est fortement $\mathcal{F}_0(\sigma)$-universel. Soit Y une base algébrique de E contenant X. Prenons un sous-ensemble dénombrable P de Y de façon que $E(P)$ soit dense dans E.

Soient $C \in \mathcal{F}_0(X)$, D un fermé de C, f une fonction continue de C dans E dont la restriction à D est un Z-plongement et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de E. Nous pouvons supposer que C est un fermé de X. Soit $\mathcal{U}'$ un recouvrement ouvert de E tel que $\mathrm{St}(\mathcal{U}')$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. Puisque tout Z-ensemble dans E est un Z-ensemble au sens fort, le lemme 1.1 de [2] nous permet de trouver une fonction continue $\widehat{f} : C \to E$ vérifiant

(1) $\widehat{f}$ est $\mathcal{U}'$-proche de f,

(2) $\widehat{f}|D = f|D$,

(3) $\widehat{f}(C \setminus D) \subset E \setminus f(D)$,

(4) $\widehat{f}$ est fermée au-dessus de $f(D)$.

Soit $V = E \setminus f(D)$, et soit $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ un recouvrement ouvert de V tel que $\mathrm{St}^3(\mathcal{V})$ soit plus fin que $\mathcal{U}'$ et vérifiant

$$\forall x \in V, \quad \mathrm{St}(x, \mathrm{St}^3(\mathcal{V})) \subset B(x, \tfrac{1}{2}d(x, f(D)))\,. \tag{5}$$

Puisque C est séparable et V un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un complexe simplicial localement fini N et des fonctions continues $\varphi : C \setminus D \to N$ et $\psi : N \to V$ vérifiant

$$\psi \circ \varphi \text{ est } \mathcal{V}\text{-proche de } \widehat{f}|C \setminus D\,. \tag{6}$$

En fait (voir [11, section 4.8]), nous pouvons prendre pour N le nerf d'un recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de $C \setminus D$ et pour φ une application canonique de $C \setminus D$ dans N; ce recouvrement $\mathcal{H}$ peut être pris arbitrairement fin, et si nous le choisissons formé d'ensembles bornés, la condition suivante est alors vérifiée :

$$\text{Pour tout compact } L \text{ de } N,\ \varphi^{-1}(L) \text{ est borné dans } E\,. \tag{7}$$

Affirmation 1. *Il existe une fonction continue propre μ de N dans V vérifiant* :

(8) $\mu(N) \subset V \cap E(P)$,

(9) *μ est $\mathcal{V}$-proche de ψ.*

En effet, soit $\widehat{E}$ le complété de E et, pour j dans J, soit $\widehat{V}_j$ un ouvert de $\widehat{E}$ tel que $\widehat{V}_j \cap E = V_j$. Alors, $\widehat{V} = \bigcup_{j\in J} \widehat{V}_j$ est un ouvert de $\widehat{E}$ tel que $\widehat{V} \cap E = V$. Puisque $\widehat{E}$ est homéomorphe à ℓ^2, ψ peut être approximée par un plongement fermé $\widehat{\psi}$ de N dans $\widehat{V}$. Puisque $E(P)$ est dense dans

E, donc dans $\widehat{E}$, $\widehat{\psi}$ peut être approximé arbitrairement par une fonction μ de N dans $E(P) \cap \widehat{V} = E(P) \cap V$. L'affirmation résulte alors du fait que, N étant localement compact, toute application qui approxime suffisamment un plongement fermé est propre.

D'après (6) et (9), la fonction $g = \mu \circ \varphi : C \setminus D \to E(P) \cap V$ vérifie

(10) $$g \text{ est } \mathrm{St}^2(\mathcal{V})\text{-proche de } \widehat{f}|C \setminus D\,.$$

Affirmation 2. *Pour tout sous-ensemble infini dénombrable Q de Y, il existe une fonction continue bornée $\xi : N \to E(Q) \setminus \{0\}$ telle que, pour tout couple de points distincts z, z' de N, les vecteurs $\xi(z)$ et $\xi(z')$ ne soient pas proportionnels.*

Pour montrer cela, il suffit, notant $Q' = \{q/\|q\| : q \in Q\}$ et Δ l'enveloppe convexe de Q', de construire une fonction continue injective ξ de N dans Δ, car deux points distincts de Δ ne sont pas proportionnels. Soit $\{q'_n\}_{n=1}^{\infty}$ une énumération de Q'; étant donnés des entiers $n \le m$, soient $Q'(n,m) = \{q'_n, \dots, q'_m\}$ et $\Delta(n,m)$ l'enveloppe convexe de $Q'(n,m)$. Puisque N est localement fini, nous pouvons le représenter comme réunion d'une suite $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de compacts de dimension finie telle que, pour tout i, B_i soit contenu dans l'intérieur de B_{i+1}. Nous pouvons alors trouver par récurrence une suite d'entiers $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ telle que, pour tout i, il existe un plongement de B_i dans $\Delta(n_{2i-1}, n_{2i})$. Pour $i \ge 1$, soit $\alpha_i : N \to \Delta(n_{2i-1}, n_{2i})$ une fonction continue dont la restriction à B_i est un plongement, et soit $\lambda_i : N \to I$ une fonction continue telle que $\lambda_i^{-1}(0) = B_{i-1}$ ($B_0 = \emptyset$). On vérifie alors facilement que la formule

$$\xi(z) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(z)\Big)^{-1} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(z)\alpha_i(z)\Big)$$

définit une fonction continue injective de N dans Δ.

Soient Q_1, Q_2, Q_3 des sous-ensembles infinis dénombrables disjoints de $Y \setminus P$. Pour $i = 1,2,3$, soit $\xi_i : N \to E(Q_i) \setminus \{0\}$ une fonction comme dans l'affirmation 2. Définissons $\overline{\xi} : N \to E(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3)$ par

$$\overline{\xi}(z) = \xi_1(z) + \xi_2(z) + \xi_3(z)\,.$$

Soit $\omega : V \to \,]0,1]$ une fonction continue vérifiant

(11) pour y dans V et z dans E, $\|y - z\| < \omega(y)$ entraîne que y et z appartiennent à un même élément de $\mathcal{V}$.

Soit $\zeta : N \to \,]0,1]$ une fonction continue vérifiant

(12) $$\forall \alpha > 0,\ \zeta^{-1}([\alpha, 1]) \text{ est compact}\,.$$

(Puisque le compactifié d'Alexandroff $\widehat{N} = N \cup \{\infty\}$ de N est métrisable, on peut prendre pour ζ la restriction d'une fonction continue $\widehat{\zeta} : \widehat{N} \to I$

telle que $\widehat{\zeta}^{-1}(0) = \{\infty\}$.) Définissons $\eta : C \setminus D \to]0,1]$ par

$$\eta(c) = \min(\zeta(\varphi(c)), \omega(g(c)))\,. \tag{13}$$

Posons, pour c dans $C \setminus D$,

$$h(c) = g(c) + \frac{1}{2A}\eta(c)\overline{\xi}(\varphi(c)) + \frac{1}{2}\eta(c)\frac{c}{\|c\|}\,,$$

où A est un majorant de $\|\overline{\xi}(z)\|$. Nous avons alors

$$\|h(c) - g(c)\| \le \eta(c) \le \omega(g(c))\,, \tag{14}$$

ce qui, d'après (11) entraîne que h est $\mathcal{V}$-proche de g, donc $\mathrm{St}^3(\mathcal{V})$-proche de $\widehat{f}|C \setminus D$ d'après (10). Compte tenu du choix de $\mathcal{V}$, cela implique, avec (1), que h est $\mathrm{St}(\mathcal{U}')$-proche, donc $\mathcal{U}$-proche de $f|C \setminus D$ et, d'autre part, d'après (5), que

$$\|h(c) - \widehat{f}(c)\| < \tfrac{1}{2}d(\widehat{f}(c), f(D)) \quad \forall c \in C \setminus D\,. \tag{15}$$

Cette inégalité montre que $h(C\setminus D) \subset E\setminus f(D)$ et que l'on peut prolonger h continûment à C en posant $h(c) = \widehat{f}(c) = f(c)$ pour $c \in D$. Montrons que cette fonction est injective. Puisque $h(D) \cap h(C \setminus D) = \emptyset$ et que $h|D = f|D$ est un plongement, il suffit de vérifier que $h|C \setminus D$ est injective. Soient c, c' deux points de $C \setminus D$ tels que $h(c) = h(c')$. Il existe un $i \in \{1,2,3\}$ tel que Q_i ne contienne aucun des points c, c'. Regardant les composantes de $h(c) = h(c')$ dans Q_i, nous obtenons l'égalité

$$\frac{1}{2A}\eta(c)\xi_i(\varphi(c)) = \frac{1}{2A}\eta(c')\xi_i(\varphi(c'))\,.$$

D'après le choix de ξ_i, cela entraîne $\varphi(c) = \varphi(c')$ et $\eta(c) = \eta(c')$, donc aussi $\overline{\xi}(\varphi(c)) = \overline{\xi}(\varphi(c'))$ et $g(c) = \mu \circ \varphi(c) = \mu \circ \varphi(c') = g(c')$, d'où il suit que $\frac{1}{2}\eta(c)c/\|c\| = \frac{1}{2}\eta(c)c'/\|c'\|$, donc $c = c'$ puisque $\eta(c) \neq 0$.

Puisque h est injective, il suffit, pour montrer que c'est un plongement fermé dans E, de vérifier que si $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de C telle que $\{h(c_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers un point e de E, alors $\{c_i\}$ a une sous-suite qui converge dans C. Puisque $h|D$ est un plongement fermé, il suffit de considérer le cas où les c_i appartiennent à $C \setminus D$. Nous pouvons supposer que les suites $\{\eta(c_i)\}$, $\{\zeta(\varphi(c_i))\}$ et $\{\omega(g(c_i))\}$ convergent vers des limites η_0, ζ_0 et ω_0 resp. Distinguons deux cas :

a) $\eta_0 = 0$. Alors $e \in f(D)$. En effet, supposons au contraire que $e \in V$. D'après (14), $\{g(c_i)\}$ converge aussi vers e, donc $\{\omega(g(c_i))\}$ tend vers $\omega_0 = \omega(e) > 0$. Puisque $g(c_i) = \mu\circ\varphi(c_i)$ et que μ est application propre de N dans V, la suite $\{\varphi(c_i)\}$ a une sous-suite qui converge vers un élément y de N; par continuité de ζ, $\zeta_0 = \zeta(y) > 0$. Mais, d'après (13), $\eta_0 = \min(\omega_0, \zeta_0) > 0$, ce qui est contradictoire. Puisque $e \in f(D)$, (15) garantit que la suite $\{\widehat{f}(c_i)\}$ converge aussi vers e, et (4) entraîne alors la convergence de la suite $\{c_i\}$.

b) $\eta_0 > 0$. Soit $0 < \delta < \eta_0$. Nous pouvons supposer $\eta(c_i) > \delta$ pour tout i. Alors, $\zeta(\varphi(c_i)) > \delta$ et, d'après (12), nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $\{\varphi(c_i)\}$ converge vers un élément z de N. Alors $\{g(c_i)\}$ converge vers $\mu(z)$ et $\{\overline{\xi}(\varphi(c_i))\}$ vers $\overline{\xi}(z)$. En outre, (12) et (7) garantissent que la suite $\{c_i\}$ est bornée dans E, donc nous pouvons supposer que $\{\|c_i\|\}$ tend vers une limite finie M; puisque X est fermé dans E, $M > 0$. La définition de h garantit alors que $\{c_i\}$ converge vers le point

$$c_0 = \frac{2M}{\eta_0}\left[e - \mu(z) - \frac{1}{2A}\eta_0\overline{\xi}(z)\right].$$

Puisque C est fermé dans E, $c_0 \in C$.

D'après le lemme, pour voir que $h(C)$ est un Z-ensemble dans E, il suffit, puisqu'il est fermé et que $h(D) = f(D)$ est un Z-ensemble, de vérifier que $h(C \setminus D)$ est localement homotopiquement négligeable dans E, ce qui résulte du fait que les relations $\xi_i(\varphi(c)) \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ garantissent que $h(C \setminus D) \subset E \setminus E(P)$.

3. Démonstration du théorème 4. La démonstration est parallèle à celle du théorème 3, dont nous reprendrons les notations et la numérotation. Ici encore, nous pouvons suppose la dimension algébrique de E indénombrable, complétons X en une base algébrique Y de E et prenons un sous-ensemble dénombrable P de Y tel que $E(P)$ soit dense dans E.

Fixons un entier $n \geq 1$. Soient $C \in \mathcal{F}_0(X^n \times I^n)$, D un fermé de C, f une fonction continue de C dans E dont la restriction à D est un Z-plongement et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de E. Nous pouvons supposer que C est un fermé de $X^n \times I^n$. Construisons $\mathcal{U}'$, $\widehat{f}$, $\mathcal{V}$, N, φ, ψ, μ et g comme précédemment. Prenons $2n+1$ sous-ensembles dénombrables deux à deux disjoints $Q_1, \ldots, Q_{2n+1}$ de $Y \setminus P$ et, pour $1 \leq i \leq 2n+1$, soit $\xi_i : N \to E(Q_i) \setminus \{0\}$ une fonction comme dans l'affirmation 2. Définissons $\overline{\xi} : N \to E$ par

$$\overline{\xi}(z) = \sum_{i=1}^{2n+1} \xi_i(z).$$

Soient ω, ζ et η comme précédemment. Prenons des entiers $m_1, \ldots, m_n \geq 1$ de façon que, pour tout couple σ, τ de sous-ensembles non vides distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $\sum_{r\in\sigma} m_r \neq \sum_{r\in\tau} m_r$ (il suffit de prendre $m_1 = 1$ et $m_i > m_1 + \ldots + m_{i-1}$ pour $1 < i \leq n$). Soit $M = (m_1 + \ldots + m_n) \sup_{z\in K} \|z\| < \infty$. Considérons la fonction $\varrho : K^n \to E'(K)$ définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, par

$$\varrho(x) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Cette fonction est continue et vérifie

(16) $\|\varrho(x)\| \le 1,\ \forall x \in K^n$,

(17) $\varrho^{-1}(E) = X^n$,

(18) ϱ est injective.

Les relations (16) et (17) sont évidentes. Pour vérifier (18), remarquons que la coordonnée de $\varrho(x)$ sur un élément y de la base K de $E'(K)$ est non nulle si, et seulement si, y est l'un des x_i et que cette coordonnée vaut alors $(1/M)\sum_{r\in\sigma} m_r$, où σ est l'ensemble des indices r tels que $x_r = y$; (18) résulte alors du choix des m_i.

Fixons $2n^2+n$ points y_r^i ($1 \le r \le n$, $1 \le i \le 2n+1$) dans $Y \setminus (P \cup \bigcup_{i=1}^{2n+1} Q_i)$ et définissons $h : C \setminus D \to E$ en posant, pour $c = (x, t_1, \ldots, t_n)$ dans C ($x \in X^n$, $0 \le t_r \le 1$),

$$h(c) = g(c) + \frac{\eta(c)}{3}\varrho(x) + \frac{\eta(c)}{3A}\overline{\xi}(\varphi(c)) + \frac{\eta(c)}{3n(2n+1)}\sum_{r=1}^{n} t_r\biggl(\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{y_r^i}{\|y_r^i\|}\biggr),$$

où A est un majorant de $\|\overline{\xi}(z)\|$. La relation (14) est encore vérifiée, donc, comme dans la démonstration précédente, h se prolonge continûment à C si l'on pose $h|D = f|D$, et la fonction ainsi obtenue est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $h(D) \cap h(C \setminus D) = \emptyset$.

Pour prouver l'injectivité de h, il suffit encore de vérifier que $h|C \setminus D$ est injective. Soient $c = (x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)$ et $c' = (x'_1, \ldots, x'_n, t'_1, \ldots, t'_n)$ ($x_r, x'_r \in X$, $0 \le t_r, t'_r \le 1$) deux points de $C \setminus D$ tels que $h(c) = h(c')$; notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$. Il y a un $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$ tel que Q_i ne contienne aucun des $2n$ points $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$; comme précédemment, cela permet de voir que $\varphi(c) = \varphi(c')$ et $\eta(c) = \eta(c')$, donc $\overline{\xi}(\varphi(c)) = \overline{\xi}(\varphi(c'))$ et $g(c) = g(c')$. Pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ il y a un $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$ tel que $y_r^i \ne x_j, x'_j$ pour $1 \le j \le n$. Regardant les coordonnées de $h(c)$ et $h(c')$ sur y_r^i, nous en déduisons que $\eta(c)t_r = \eta(c)t'_r$, d'où $t_r = t'_r$ pour tout r. Compte tenu de tout cela, l'égalité $h(c) = h(c')$ entraîne alors $\frac{\eta(c)}{3}\varrho(x) = \frac{\eta(c)}{3}\varrho(x')$, donc $\varrho(x) = \varrho(x')$ puisque $\eta(c) > 0$; d'après (18), $x = x'$, d'où finalement $c = c'$.

Pour prouver que h est un plongement fermé, nous suivons l'argument de la démonstration précédente. Le cas $\eta_0 = 0$ se traite sans changement. Si $\eta_0 > 0$, nous pouvons supposer, posant $c_i = (x^i, t_1^i, \ldots, t_n^i)$ ($x^i \in X^n$, $0 \le t_r^i \le 1$), que $\{x^i\}$ converge vers un point x^0 de K^n et que les suites $\{t_r^i\}_{i=1}^{\infty}$ ont des limites t_r, $1 \le r \le n$. Comme précédemment, nous pouvons supposer qu'il existe un $z \in N$ tel que $\{g(c_i)\}$ converge vers $\mu(z)$ et que $\{\overline{\xi}(\varphi(c_i))\}$ converge vers $\overline{\xi}(z)$. Passant à la limite dans la définition de h, nous obtenons

$$e=\mu(z)+\frac{\eta_0}{3}\varrho(x^0)+\frac{\eta_0}{3A}\bar{\xi}(z)+\frac{\eta_0}{3n(2n+1)}\sum_{r=1}^{n}t_r\biggl(\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{y_r^i}{\|y_r^i\|}\biggr).$$

Puisque $\eta_0>0$, cette formule montre que $\varrho(x^0)$ appartient à E, donc $x^0\in X^n$ d'après (17). Que $h(C)$ soit un Z-ensemble se prouve comme précédemment.

4. Démonstration du théorème 5. Ici encore, la démonstration est analogue à celle du théorème 3, que nous suivrons du plus près possible. Nous pouvons à nouveau supposer la dimension de E indénombrable, ce qui entraîne

($*$) E contient deux sous-espaces vectoriels partout denses E_0 et E_1 tels que $E_0\cap E_1=\{0\}$.

En effet, soit E_0 un sous-espace vectoriel partout dense de E ayant une base dénombrable P. Soit $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense de E; pour $n\geq 1$, soit $x_n\in E_0$ tel que $\|q_n-x_n\|<1/n$. Construisons par récurrence des vecteurs y_n de façon que, $\forall n\geq 1$, $P\cup\{y_1,\ldots,y_n\}$ soit linéairement indépendant et que $\|y_n\|<1/n$. Alors, le sous-espace E_1 engendré par les vecteurs x_n+y_n, $n\geq 1$, est dense et vérifie $E_0\cap E_1=\{0\}$.

Nous pouvons en outre supposer que

($**$) E contient un fermé X homéomorphe à E tel que deux points distincts de X ne soient pas proportionnels.

En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer E par son carré $E\times E$ et de prendre $X=\{e\}\times E$, où e est un vecteur non nul de E.

Il suffit de montrer que $E\times E$ est fortement $\mathcal{F}_0(E)$-universel. Soient $C\in\mathcal{F}_0(E)$, D un fermé de C, f une fonction continue de C dans $E\times E$ dont la restriction à D est un Z-plongement et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $E\times E$. D'après ($**$), nous pouvons supposer que C est un fermé de X. Posons $V=E\times E\setminus f(D)$ et prenons $\mathcal{U}'$, $\widehat{f}$, $\mathcal{V}$, N, φ, ψ comme dans la démonstration du théorème 3, puis une fonction continue propre μ de N dans V vérifiant (9) et

$$\mu(N)\subset V\cap(E_0\times E_1)\,. \tag{8'}$$

Construisons g, ω, ζ et η comme dans la démonstration du théorème 3. Définissons $\delta:E\to E\times E$ par $\delta(x)=(x,x)$. D'après ($**$), aucun élément de X n'est nul, et nous pouvons définir $h:C\setminus D\to E\times E$ par

$$h(c)=g(c)+\eta(c)\frac{\delta(c)}{\|\delta(c)\|}\,.$$

La relation (14) est encore vérifiée, et h se prolonge en une fonction $\mathcal{U}$-proche de f en posant $h|D=f|D$; elle vérifie $h(D)\cap h(C\setminus D)=\emptyset$.

Pour prouver l'injectivité, il faut encore vérifier que $h|C\setminus D$ est injective. Soient c et c' deux points de $C\setminus D$ tels que $h(c)=h(c')$, ce qui implique

$$g(c)-g(c')=\eta(c)\frac{\delta(c)}{\|\delta(c)\|}-\eta(c')\frac{\delta(c')}{\|\delta(c')\|}=\delta\biggl(\eta(c)\frac{c}{\|\delta(c)\|}-\eta(c')\frac{c'}{\|\delta(c')\|}\biggr).$$

La condition $(*)$ garantit que $(E_0\times E_1)\cap\delta(E)=\{0\}=\delta(\{0\})$; comme $g(c)-g(c')$ est dans $E_0\times E_1$, nous avons donc $\eta(c)c/\|\delta(c)\|=\eta(c')c'/\|\delta(c')\|$; puisque $\eta(c)\neq 0$, $c=c'$ d'après $(**)$.

Pour prouver que h est un plongement fermé, il suffit encore de vérifier que si $\{c_i\}$ est une suite de points de $C\setminus D$ telle que la suite $\{h(c_i)\}$ converge vers un point e de E, alors $\{c_i\}$ a une sous-suite qui converge dans C. Nous pouvons supposer que $\{\eta(c_i)\}$ a une limite η_0. Le cas $\eta_0=0$ se traite comme dans la démonstration du théorème 3. Supposons $\eta_0>0$. Comme au théorème 3, nous pouvons supposer qu'il existe un point z de N tel que $\{g(c_i)\}$ converge vers $\mu(z)$, et que $\{\|\delta(c_i)\|\}$ tend vers une limite finie M. D'après $(**)$, 0 n'appartient pas au fermé X, donc $M>0$. Alors, $\{\delta(c_i)\}$ tend vers $(M/\eta_0)(e-\mu(z))$, donc $\{c_i\}$ converge dans E, et sa limite appartient au fermé C.

Pour voir que $h(C)$ est un Z-ensemble, il suffit encore de vérifier que $h(C\setminus D)$ est localement homotopiquement négligeable dans $E\times E$, ce qui résulte du fait que $h(C\setminus D)\subset E\times E\setminus E_0\times E_1$.

5. Démonstration des théorèmes 1, 2 et 6. Pour tout espace X, soit $\mathcal{C}(X)$ la classe des espaces C de la forme $C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$, où les C_i sont des fermés de C pour lesquels il existe des entiers n_i tels que C_i appartienne à $\mathcal{F}_0(X_i^{n_i}\times I^{n_i})$. Evidemment, la classe $\mathcal{C}(X)$ est topologique, héréditaire pour les fermés, multiplicative (i.e., si C_1 et C_2 appartiennent à $\mathcal{C}(X)$, $C_1\times C_2$ aussi) et dénombrablement additive (i.e., si $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ où les C_n sont des fermés appartenant à $\mathcal{C}(X)$, alors C appartient à $\mathcal{C}(X)$). Nous déduirons les théorèmes 1, 2 et 6 du suivant.

THÉORÈME 7. *Soit K un sous-ensemble σ-compact linéairement indépendant d'un espace normé E, et soit X un sous-ensemble infini de K. Alors, $\mathcal{F}_0(E(X))=\mathcal{C}(X)$ et $E(X)$ est $\mathcal{C}(X)$-absorbant dans son complété.*

Démonstration. Soit $K=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$, où les K_i sont compacts et vérifient $K_i\subset K_{i+1}$ pour tout i; soit $X_i=K_i\cap X$. Pour $n\geq 1$, soit $\varphi_n: K^n\times\mathbb{R}^n\to E$ l'application définie par $\varphi_n(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$. Pour i, n, k entiers, posons $A_k=[-k,-1/k]\cup[1/k,k]$, $D_i(n,k)=\{(x_1,\ldots,x_n)\in K_i^n:\|x_j-x_{j'}\|\geq 1/k \text{ pour } j\neq j'\}$, $E_i(n,k)=D_i(n,k)\cap X_i^n$, $Y_i(n,k)=\varphi_n(D_i(n,k)\times A_k^n)$ et $Z_i(n,k)=\varphi_n(E_i(n,k)\times A_k^n)$ $=Y_i(n,k)\cap E(X)$. Alors, $Y_i(n,k)$ est un compact de E, donc un Z-ensemble;

par suite, $Z_i(n,k)$ est un Z-ensemble (au sens fort) dans $E(X)$. Nous avons

$$E(X) = \{0\} \cup \bigcup_{i,n,k=1}^{\infty} Z_i(n,k)\,,$$

donc, pour vérifier la condition (I) de la définition d'un ensemble absorbant et montrer que $\mathcal{F}_0(E(X)) \subset \mathcal{C}(X)$, il suffit de vérifier que les $Z_i(n,k)$ appartiennent à $\mathcal{C}(X)$. Si $(x_1,\ldots,x_n)$ est un point de $E_i(n,k)$ et $V_1,\ldots,V_n$ des voisinages fermés disjoints de $x_1,\ldots,x_n$ dans le compact K_i, alors la restriction de φ_n à $W = ((V_1\times\ldots\times V_n)\cap E_i(n,k))\times A_k^n$ est un homéomorphisme de W sur un voisinage fermé de x dans $Z_i(n,k)$, donc tout point de $Z_i(n,k)$ a, dans $Z_i(n,k)$, un voisinage fermé homéomorphe à un fermé de $E_i(n,k)\times A_k^n$. Mais ce dernier ensemble est homéomorphe à un fermé de $X^n \times I^n$, donc, recouvrant $Z_i(n,k)$ par une famille dénombrable de tels voisinages fermés, nous constatons que $Z_i(n,k)$ appartient à $\mathcal{C}(X)$.

Soit $\mathcal{E} = \bigcup_{i,n=1}^{\infty} \mathcal{F}_0(X_i^n \times I^n)$. Le théorème 3 garantit que $E(X)$ est fortement $\mathcal{E}$-universel. Puisque $E(X)$ est, comme nous venons de le voir, réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort, la proposition 2.3 de [2] entraîne que $E(X)$ est fortement $\mathcal{E}_\sigma$-universel, où $\mathcal{E}_\sigma$ est la famille des ensembles qui sont réunions dénombrables de fermés appartenant à $\mathcal{E}$ (l'hypothèse d'additivité dans l'énoncé de cette proposition 2.3 n'est pas utilisée dans sa démonstration). Mais il est facile de vérifier $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{C}(X)$, donc la condition (III) de la définition d'un ensemble absorbant est vérifiée. En outre, la $\mathcal{C}(X)$-universalité forte implique que $\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{F}_0(E(X))$, d'où l'égalité de ces deux classes.

Démonstration du théorème 1. D'après le théorème 7 et l'unicité des ensembles absorbants, il suffit de vérifier que $\mathcal{C}(X_1) = \mathcal{C}(X_2)$. Par hypothèse, X_1 appartient à $\mathcal{F}_0(E(X_2)) = \mathcal{C}(X_2)$. Puisque $\mathcal{C}(X_2)$ est multiplicative, elle contient $X_1^n \times I^n$ pour tout n, donc aussi $\mathcal{C}(X_1)$ par additivité dénombrable. De même, $\mathcal{C}(X_1)$ contient $\mathcal{C}(X_2)$.

Démonstration du théorème 2. Il suffit de montrer que $E(X)\times\mathbb{R}$, $E(X)\times E(X)$ et $W(E(X),0)$ sont $\mathcal{C}(X)$-absorbants dans leurs complétions. Puisque $E(X)$ appartient à $\mathcal{C}(X)$, la multiplicativité et l'additivité dénombrable de $\mathcal{C}(X)$ impliquent que $E(X)\times\mathbb{R}$, $E(X)\times E(X)$ et $W(E(X),0)$ appartiennent à $\mathcal{C}(X)$; puisque $E(X)$ est réunion dénombrable de Z-ensembles, il en est de même de ces trois espaces, d'où (I). Puisqu'ils sont réunions dénombrables de Z-ensembles (nécessairement au sens fort), nous pouvons encore utiliser le théorème 4 et la proposition 2.3 de [2], pour vérifier leur $\mathcal{C}(X)$-universalité forte.

Démonstration du théorème 6. La condition est nécessaire d'après le théorème 2. Inversement, supposons que E soit homéomorphe à son carré et réunion dénombrable de Z-ensembles. Soit K une copie linéairement indépendante du cube de Hilbert dans ℓ^2, et soit X un sous-ensemble de K homéomorphe à E. Pour vérifier que E est homéomorphe à $\ell^2(X)$, il suffit, d'après le théorème 7, de montrer qu'il est $\mathcal{C}(E)$-absorbant dans son complété. Seule l'universalité forte demande une vérification. Le théorème 5 garantit que E est fortement $\mathcal{F}_0(E)$-universel. Puisque E est homéomorphe à son carré, $\mathcal{F}_0(E)$ contient $E^n \times I^n$ pour tout $n \geq 1$. Comme E est réunion dénombrable de Z-ensembles, la proposition 2.3 de [2] garantit qu'il est fortement $\mathcal{C}(E)$-universel.

6. Deux applications. Pour tout ordinal dénombrable α, nous notons $\mathfrak{M}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{A}_\alpha$) la collection des espaces qui sont absolument des boréliens de classe multiplicative (resp. additive) α; pour $n \geq 1$, nous notons $\mathfrak{L}_n$ la $n^{\text{ème}}$ classe projective. L'existence d'un ensemble absorbant Ω_α (resp. Λ_α) pour la classe $\mathfrak{M}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{A}_\alpha$), $\alpha \geq 1$, a été prouvée dans [2], et celle d'un ensemble absorbant Π_n pour la classe $\mathfrak{L}_n$, $n \geq 1$, a été établie dans [4]. La proposition suivante fournit, en particulier, une réponse affirmative à la question 6.1 de [9].

PROPOSITION 1. *Soit E un espace normé appartenant à $\mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha \geq 1$ (resp. $\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \geq 2$, resp. $\mathfrak{L}_n$, $n \geq 1$). Si E est réunion dénombrable de Z-ensembles et contient un fermé linéairement indépendant homéomorphe à Ω_α (resp. Λ_α, resp Π_n), alors E est homéomorphe à Ω_α (resp. Λ_α, resp. Π_n).*

Il suffit pour le voir de montrer que E est $\mathfrak{M}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{A}_\alpha$, resp. $\mathfrak{L}_n$)-absorbant dans son complété. La seule condition à vérifier est l'universalité forte, qui résulte du théorème 3.

La proposition suivante concerne la classification des espaces de [1, chapitre VIII, §2].

PROPOSITION 2. *Pour $i = 1, 2$, soient K_i un sous-ensemble σ-compact linéairement indépendant d'un espace normé E_i et X_i un sous-ensemble de dimension zéro de K_i. Si, pour un ordinal dénombrable $\alpha \geq 2$, X_1 et X_2 appartiennent tous deux à $\mathfrak{M}_\alpha \setminus \mathfrak{A}_\alpha$ ou à $\mathfrak{A}_\alpha \setminus \mathfrak{M}_\alpha$, alors $E(X_1)$ et $E(X_2)$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Puisqu'ils sont de dimension zéro, X_1 et X_2 sont homéomorphes à des sous-ensembles de l'ensemble de Cantor. Le lemme 3 de [16] entraîne alors que chacun est homéomorphe à un fermé de l'autre, d'où la conclusion d'après le théorème 1.

Remarque. La proposition 2 ne s'étend pas aux classes ambiguës : Si T est un arc linéairement indépendant dans ℓ^2 et $\alpha = \alpha' + 1$ un ordinal non limite ≥ 2, alors T contient une famille indénombrable de sous-ensembles de dimension zéro X_j, $j \in J$, appartenant à $\mathfrak{M}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\alpha \setminus (\mathfrak{M}_{\alpha'} \cup \mathfrak{A}_{\alpha'})$ tels que les espaces $\ell^2(X_j)$ soient deux à deux non homéomorphes. En effet, $\ell^2(X_j)$ appartient alors à $\mathfrak{M}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\alpha \setminus (\mathfrak{M}_{\alpha'} \cup \mathfrak{A}_{\alpha'})$ ([6, lemme 6.6]), donc il appartient à une petite classe borélienne $\mathfrak{F}^\beta_{\alpha'}$, où β est un ordinal dénombrable (voir [12, §33 IV] pour cette notion), et il en est de même de tout fermé de $\ell^2(X_j)$. Notre affirmation résulte alors du fait que, pour tout β, l'ensemble des irrationnels contient un sous-ensemble appartenant à $\mathfrak{F}^\beta_{\alpha'} \setminus \bigcup_{\beta'<\beta} \mathfrak{F}^{\beta'}_{\alpha'}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math. 138 (1991), 35–58.

[4] —, *Ensembles absorbants pour les classes projectives*, ibid., à paraître.

[5] —, *Une famille d'espaces préhilbertiens σ-compacts ayant la puissance du continu*, Bull. Polish Acad. Sci. 40 (1992), 41–43.

[6] R. Cauty and T. Dobrowolski, *Applying coordinate products to the topological identification of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 625–649.

[7] D. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Some applications of the topological characterization of the sigma-compact spaces ℓ^2_f and Σ*, ibid. 284 (1984), 837–846.

[8] T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Absorbing sets in the Hilbert cube related to transfinite dimension*, Bull. Polish Acad. Sci. 38 (1990), 185–188.

[9] —, —, *Problems on topological classification of incomplete metric spaces*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1990, 409–429.

[10] D. W. Henderson, *Z-sets in ANR's*, Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 205–216.

[11] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[12] C. Kuratowski, *Topologie I*, 4ème édition, PWN, Warszawa, 1958.

[13] W. Marciszewski, *A pre-Hilbert space without any continuous maps onto its own square*, Bull. Polish Acad. Sci. 31 (1983), 393–396.

[14] J. van Mill, *Domain invariance in infinite-dimensional linear spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), 173–180.

[15] R. Pol, *An infinite-dimensional pre-Hilbert space not homeomorphic to its own square*, ibid. 90 (1984), 450–454.

[16] J. R. Steel, *Analytic sets and Borel isomorphisms*, Fund. Math. 108 (1980), 83–88.

[17] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, ibid. 101 (1978), 93–110.

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 24.6.1992;
en version modifiée le 29.3.1993