C O L L O Q U I U M   M A T H E M A T I C U M

VOL. LXVI | 1993 | FASC. 1

LACUNARITÉ À LA HADAMARD ET ÉQUIRÉPARTITION

PAR

AI HUA FAN (ORSAY)

On introduit une nouvelle méthode pour démontrer le théorème de Weyl et le théorème de Erdős–Taylor concernant l'équirépartition mod 1 de $\{\lambda_n x\}$. Cette méthode fait intervenir des produits de Riesz et s'adapte bien au cas de plusieures dimensions.

1. Introduction. Etant donnée une suite de réels $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$, on connaît les résultats suivants ([1, 10]; voir §2 pour la notion de l'équirépartition mod 1).

THÉORÈME (Weyl). *Si la suite* $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ *satisfait à*

$$\liminf_{N\to\infty} \inf_{n\ne m;n,m\ge N} |\lambda_n - \lambda_m| > 0\,,$$

la suite $\{\lambda_n x\}$ *est équirépartie* mod 1 *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 1. *Soit* $\theta > 1$. *La suite* $\{\theta^n x\}$ *est équirépartie* mod 1 *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME (Erdős–Taylor). *Soit* $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ *une suite de positifs lacunaire à la Hadamard*, *i.e. pour un certain* $\theta > 1$,

$$\lambda_{n+1} \ge \theta\lambda_n\,.$$

Pour tout interval $[a,b]$, *l'ensemble des* $x \in [a,b]$ *tels que* $\{\lambda_n x\}$ *ne soit pas équirépartie* mod 1 *est de dimension* 1.

Le théorème de Weyl constate que l'ensemble des x tels que $\{\lambda_n x\}$ ne soit pas équirépartie mod 1 est de mesure de Lebesgue nulle, tandis que le théorème de Erdős–Taylor constate que, pour les suites $\{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ lacunaires, la dimension de cet ensemble peut être optimale.

Ces deux théorèmes sont bien connus. Mais on va leur donner de nouvelles démonstrations et des généralisations au cas de plusieures dimensions. En fait, notre motif initial est de redémontrer le théorème de Erdős–Taylor

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11K55, 42A55, 42A61.
Key words and phrases: dimension, equidistribution, lacunarity, Riesz products.

en faisant appel à certains produits de Riesz. L'idée essentielle consiste à construire des mesures portées par l'ensemble en considération et à estimer les dimensions de ces mesures au lieu d'estimer la dimension de l'ensemble. Pour ce faire, on entreprend de chercher des systèmes orthogonaux et d'établir leur convergence presque partout par rapport à ces mesures. Ces orthogonalités sont obtenues par une technique de décomposer une suite lacunaire en un nombre fini de sous-suites très lacunaires; et les convergences sont alors assurées par le théorème de Men'shov–Rademacher ([9, 15]). L'avantage d'utiliser des produits de Riesz est que la minoration de la dimension d'un produit de Riesz se fait aisément par l'évaluation de l'indice d'énergie ([2]).

D'ailleurs, cette méthode s'adapte bien au cas de plusieures dimensions, ce qui est de grand intérêt, que l'on va décrire maintenant. Prenons une suite d'endomorphismes $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Nous nous préoccupons de l'équirépartition mod 1 des suites $\{A_n x\}_{n\geq 0}$ (avec $x \in \mathbb{R}^d$). Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Weyl.

Théorème 1. *Si la suite d'endomorphismes* $\{A_n\}_{n\geq 0}$ *de* $\mathbb{R}^d$ *satisfait*

$$\liminf_{N\to\infty} \inf_{n\neq m; n,m\geq N} \|(A_n^* - A_m^*)h\| > 0, \qquad \forall h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},$$

$\|\cdot\|$ *désignant la norme euclidienne, la suite* $\{A_n x\}$ *est équirépartie* mod 1 *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

Corollaire 2. *Soit* A *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^d$. *Supposons que le rayon spectral* $\varrho(A) > 1$ *et que pour tout* $h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ *il existe un vecteur propre généralisé* v *correspondant à une valeur propre* > 1 *tel que* $\langle h, v\rangle \neq 0$. *Alors la suite* $\{A^n x\}$ *est équirépartie* mod 1 *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

Corollaire 3. *Soit* A *un endomorphisme dont les valeurs propres sont toutes dehors du disque unité. On a la même conclusion que dans le corollaire* 2.

Dans l'autre sens, on a

Théorème 2. *Soit* A *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^d$. *Si* $\varrho(A) > 1$, *l'ensemble des* x *dans* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $\{A^n x\}$ *ne soit pas équirépartie* mod 1 *est de dimension* d.

Remarque 1. Le problème est déjà résolu si A est un automorphisme de $\mathbb{T}^d$, c'est-à-dire que A est représenté par une matrice à éléments entiers rationnels dont le déterminant est différent de 0. Car, on sait que A est ergodique (par rapport à la mesure de Haar) si et seulement si A n'admet pas de racines d'unité comme valeurs propres, et que A n'est pas ergodique si et seulement s'il existe un point périodique de A dans $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, A étant considéré comme endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ ([6, 7]). Par conséquent, la suite $\{A^n x\}$ est équirépartie mod 1 pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si A

est ergodique; et si A n'est pas ergodique, aucun point n'est tel que $\{A^n x\}$ soit équirépartie mod 1.

Remarque 2. Dans le cas de dimension 1, d'autres problèmes intéressants sont considérés dans [1, 5, 8]. Une preuve simple du théorème de Erdős–Taylor est donnée dans [12] pour θ entier.

Remarque 3. Les résultats présentés ici ont été annoncés dans la note [4].

2. Préliminaire. Rappelons ici la notion d'équirépartition d'une suite ([10, 14]) et la notion de dimension d'une mesure ([2, 3]).

Une suite $\{t_n\} \subset \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est dite *équirépartie* si pour tout intervalle $I \subset \mathbb{T}$ on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\{1 \le n \le N : t_n \in I\} = |I|\,, \tag{1}$$

$|I|$ désignant la mesure de Lebesgue de I. Soit $\{t_n\}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Si la suite des parties fractionnaires de $\{t_n\}$ est équirépartie, on dit que $\{t_n\}$ est *équirépartie* mod 1 (ou mod $\mathbb{Z}$).

Il y a une généralisation naturelle de l'équirépartition. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{T}$. Si la limite dans (1) est $\mu(I)$ au lieu de $|I|$, on dit que $\{t_n\}$ est *asymptotiquement répartie* ou bien qu'elle admet μ comme la *répartition asymptotique*. Plus précisément, si μ est différente de la mesure de Lebesgue, la suite sera dite *Weyl-répartie*.

Le critère de Weyl fournit une définition équivalente de la répartition asymptotique : une suite $\{t_n\} \subset \mathbb{T}$ a une répartition asymptotique si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi i m t_n} \tag{2}$$

existe. Dans ce cas-là, la limite est $\widehat{\mu}(m)$, le coefficient de la répartition asymptotique.

Signalons qu'avec des modifications minimes et évidentes, on a une même théorie sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Rappelons maintenant que la *dimension* d'une mesure positive μ définie sur $\mathbb{R}^d$ est définie par

$$\dim \mu = \inf\{\dim F : F \text{ borélien tel que } \mu(F^{\mathrm{c}}) = 0\}$$

où $\dim F$ désigne la dimension de Hausdorff de F. Dans [3], elle s'appelle dimension supérieure de μ. On y en a donné d'autres définitions équivalentes. On y a donné aussi une méthode très pratique pour une minoration. C'est de faire appel à l'intégrale d'énergie. Rappelons que *l'intégrale d'énergie* d'ordre α de μ est par définition

$$I_\alpha^\mu = \int\int \frac{d\mu(t)\, d\mu(s)}{\|t-s\|^\alpha}\,.$$

On définit *l'indice énergétique* de μ par

$$e(\mu) = \sup\{\alpha \ge 0 : I_\alpha^\mu < \infty\}\,.$$

Dans [3], on a démontré que $\dim \mu \ge e(\mu)$. On verra au §4 que pour les produits de Riesz, l'indice énergétique se calcule effectivement.

3. Quelques lemmes combinatoires. Ces lemmes seront contribués aux démonstrations du théorème de Erdős–Taylor et du théorème 2. Il s'agit de relations entre la lacunarité et la dissociation.

Soit $\{h_n\}_{n\ge 0}$ une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^d$ étant considéré comme le groupe dual de lui-même). Elle est dite *dissociée* si tout vecteur dans $\mathbb{R}^d$ s'écrit au plus d'une façon sous la forme de somme finie

$$\sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j h_j \tag{3}$$

où les nombres ε_j valent -1, 0 ou 1. (Il en est de même pour ε_j dans toute la suite). Elle est dite *fortement dissociée* s'il existe un $\delta > 0$ tel que les boules de rayon δ et de centres représentés par (3) soient toutes disjointes. Il est clair que la forte dissociation entraîne la dissociation.

Ici nous ne nous intéressons qu'aux suites lacunaires. Nous étudierons d'abord les suites lacunaires dans $\mathbb{R}$ et puis certaines suites dans $\mathbb{R}^d$ ($d \ge 2$). Soit A et B deux ensembles dans $\mathbb{R}^d$. Désignons par $D(A,B)$ leur distance.

Une suite de positifs $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ est dite *lacunaire* (*à la Hadamard*) s'il existe un $\theta > 1$ tel que $\lambda_n \le \theta^{-1}\lambda_{n+1}$ ($n \ge 0$); ceci est équivalent à

$$\lambda_n \le \theta^{-r}\lambda_{n+r} \qquad (n \ge 0,\ r \ge 0)\,. \tag{4}$$

Pour une telle suite, on définit un nouvel ensemble symétrique

$$\Lambda^* = \Big\{ \sum_{\text{finie}} \varepsilon_j \lambda_j : \varepsilon_j = -1, 0 \text{ ou } 1 \text{ et } \lambda_j \in \Lambda \Big\}\,.$$

Désormais on fixe une telle suite lacunaire $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\ge 0}$ avec $\theta > 1$. La relation suivante est bien connue ([15], Vol. 1, p. 208).

Lemme 1. *Si la suite Λ est lacunaire avec $\theta > 3$, elle est fortement dissociée.*

Soit $q \ge 2$ un entier. Décomposons la suite Λ en q parties de la manière suivante :

$$\Lambda = \bigcup_{p=0}^{q-1} \Lambda_p, \quad \Lambda_p = \{\lambda_{qn+p}\}_{n\ge 0} \quad (0 \le p < q)\,.$$

Pour chaque sous-suite Λ_p $(0 \le p < q)$ on a une telle inégalité, conséquence immédiate de (4), qui sera la clé dans la suite :

$$\Big|\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \lambda_{jq+p}\Big| < \frac{1}{\theta^q - 1}\lambda_{q(n+1)+p}\,. \tag{5}$$

LEMME 2. *Soit* $0 < \delta < \lambda_0(\theta - 1)$. *Il existe un* $q_0 = q_0(\delta)$ *tel que si* $q \ge q_0$ *on ait*

$$D(\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_{q-1}, \Lambda_0^*) \ge \delta\,.$$

Preuve. Supposons que la conclusion soit fausse. Alors, pour une infinité de q, il existe un terme $\lambda_{qn+p} \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ et une suite finie $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k \ne 0$ tels que

$$\Big|\lambda_{qn+p} - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \lambda_{qj}\Big| < \delta\,. \tag{6}$$

On peut en déduire d'abord que $\varepsilon_k = 1$. Sinon, d'après (5) et (4) on aura

$$\lambda_{qn+p} + \lambda_{qk} \le \delta + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{qj} \le \delta + \frac{1}{\theta^q - 1}\lambda_{qk}\,.$$

Or ceci n'est pas possible si q est grand. Comme $\varepsilon_k = 1$, (6) implique

$$-\delta + \frac{\theta^q - 2}{\theta^q - 1}\lambda_{qk} < \lambda_{qn+p} < \delta + \frac{\theta^q}{\theta^q - 1}\lambda_{qk}\,. \tag{7}$$

On peut ensuite déduire que $k \ge n$, si q est suffisamment grand tel que

$$\frac{\delta}{\lambda_q} + \frac{1}{\theta^q - 1} < 1$$

en vertu de la seconde inégalité dans (7), de (4) et de la croissance de Λ, car

$$\lambda_{qn+p} \le \left(\frac{\delta}{\lambda_q} + \frac{1}{\theta^q - 1}\right)\lambda_{q(k+1)}\,.$$

Finalement, on peut déduire que $n = k$. Sinon, $k \ge n + 1$. Cela, avec la première inégalité dans (7), entraîne

$$-\frac{\delta}{\lambda_q} + \frac{\theta^q - 2}{\theta^q - 1} < \theta^{-(q-p)} \le \theta^{-1}\,.$$

Or ceci n'est pas vrai si q est suffisamment grand. Comme $n = k$ et $\varepsilon_k = 1$, selon (6) on a donc

$$(\theta^p - 1)\lambda_{qn} \le \lambda_{qn+p} - \lambda_{qn} \le \delta + \frac{1}{\theta^q - 1}\lambda_{qn} \le \left(\frac{\delta}{\lambda_0} + \frac{1}{\theta^q - 1}\right)\lambda_{qn}\,.$$

Par conséquent,

$$\theta - 1 \le \theta^p - 1 \le \frac{\delta}{\lambda_0} + \frac{1}{\theta^q - 1}\,.$$

C'est impossible si q est grand et que $\delta < \delta_0(\theta - 1)$. ■

Lemme 3. *Soit $0 < \delta < \lambda_0(\theta - 1)$. Il existe un $q_0 = q_0(\delta)$ tel que si $q \ge q_0$ on ait*

$$D(\lambda_{qn+p} - \lambda_{qm+p}, \Lambda_0^*) \ge \delta$$

pour $n \ge 0, m \ge 0, n \ne m$ et $1 \le p < q$.

Preuve. La preuve est similaire à celle qui précède. Supposons que la conclusion soit fausse. Pour une infinité de q, il existe certains λ_{qn+p}, λ_{qm+p} et $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k \ne 0$ tels que

$$\Big|\lambda_{qn+p} - \lambda_{qm+p} - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \lambda_{qj}\Big| < \delta\,.$$

Supposons que $n > m$. On a comme conséquence

$$-\delta + \frac{\theta^q - 2}{\theta^q - 1}\lambda_{qk} < \lambda_{qn+p} - \lambda_{qm+p} < \delta + \frac{\theta^q}{\theta^q - 1}\lambda_{qk}\,.$$

On peut en déduire successivement:

1) $\varepsilon_k = 1$ si

$$\frac{1}{\theta^q - 1} < 1\,,$$

2) $n \le k$ si

$$\frac{\delta}{\lambda^q} + \frac{1}{\theta^q} + \frac{1}{\theta^q - 1} < 1\,,$$

3) $n \ge k$ si

$$-\frac{\delta}{\lambda^q} + \frac{\theta^q - 2}{\theta^q - 1} > \theta^{-1}\,.$$

Maintenant, comme $k = n$ et $\varepsilon_k = 1$ on a, d'une part,

$$\lambda_{qn+p} - \lambda_{qn} \ge (\theta^p - 1)\lambda_{qn}\,,$$

et d'autre part,

$$\lambda_{qn+p} - \lambda_{qn} < \delta + \lambda_{qm+p} + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{qj} \le \delta + \lambda_{qn}[\theta^{-q(n-m)+p} + (\theta^q - 1)^{-1}]\,.$$

En combinant ces deux dernières inégalités et en les divisant par λ_{qn}, on obtient

$$\theta^p - 1 \le \frac{\delta}{\lambda_0} + \theta^{p-q} + \frac{1}{\theta^q - 1}\,.$$

Ceci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\theta^p\left(1-\frac{1}{\theta^q}\right) \le 1+\frac{\delta}{\lambda_0}+\frac{1}{\theta^{-q}-1}\,,$$

qui est impossible si q est grand et que $\delta < \lambda_0(\theta-1)$. ∎

Maintenant on va étudier les suites dans $\mathbb{R}^d$ définies par l'itération d'un endomorphisme auxquelles seront transférés les résultats obtenus précédemment. Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. Soit h_0 un vecteur dans $\mathbb{R}^d$. Nous nous intéressons à la suite $H = \{h_n\}_{n\ge 0}$ définie par $h_n = A^{*n}h_0$ où A^* désigne la transposée de A.

Désignons par

$$(\xi-\xi_1)^{d_1}, (\xi-\xi_2)^{d_2}, \ldots, (\xi-\xi_r)^{d_r}$$

les diviseurs élémentaires de A. Supposons que $|\xi_1| \ge |\xi_2| \ge \ldots \ge |\xi_r|$. Soit J_k $(1 \le k \le r)$ le bloc de Jordan correspondant au k-ième diviseur cité ci-dessus. Il existe une matrice de transformation T, qui est non singulière, telle que

$$A = TDT^{-1} \quad \text{où} \quad D = \operatorname{diag}\{J_1,\ldots,J_r\}\,.$$

Soit $T = (v_{11},\ldots,v_{1d_1};\ldots;v_{r1},\ldots,v_{rd_r})$. L'égalité précédente s'exprime comme suit :

$$Av_{k1} = \xi_k v_{k1}, \quad Av_{k,j} = \xi_k v_{k,j} + v_{k,j-1} \quad (1 \le k \le r,\ 2 \le j \le d_k)\,.$$

Quel que soit $h_0 \in \mathbb{R}^d$, on a

$$h_n = T^{*-1}\operatorname{diag}\{J_1^{*n},\ldots,J_r^{*n}\}T^*h_0$$

où

$$T^*h_0 = {}^t(\langle v_{11},h_0\rangle,\ldots,\langle v_{rd_r},h_0\rangle)\,.$$

Signalons qu'il existe toujours un $h_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\langle v_{11},h_0\rangle \ne 0$ et il suffit de chercher dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

LEMME 4. *Supposons* $\varrho(A) > 3$. *Si* h_0 *est tel que* $\langle v_{11},h_0\rangle \ne 0$, *la suite* H *définie ci-dessus est fortement dissociée.*

Preuve. Remarquons que

$$\sum_{j=0}^n(\varepsilon_j-\varepsilon'_j)h_j = T^{*-1}\sum_{j=0}^n(\varepsilon_j-\varepsilon'_j)\operatorname{diag}\{J_1^{*j},\ldots,J_r^{*j}\}T^*h_0\,.$$

On a

$$\Big\|\sum_{j=0}^n(\varepsilon_j-\varepsilon'_j)h_j\Big\| \ge \|T^*\|^{-1}|\langle v_{11},h_0\rangle|\Big\|\sum_{j=0}^n(\varepsilon_j-\varepsilon'_j)\xi_1^j\Big\|\,,$$

d'où le résultat selon le lemme 1. ∎

Décomposons H en q parties ($q \geq 2$) :

$$H = \bigcup_{p=0}^{q-1} H_p, \quad H_p = \{A^{*qn+p} h_0\}_{n \geq 0} \quad (0 \leq p < q)\,.$$

LEMME 5. *Supposons $\varrho(A) > 1$ et $\langle v_{11}, h_0 \rangle \neq 0$. Soit $0 < \delta < (\varrho - 1)|\langle v_{11}, h_0\rangle|/\|T\|$. Il existe un $q_0 \geq 2$ tel que si $q \geq q_0$ on ait*

$$D(H_1 \cup \ldots \cup H_{q-1}, H_0^*) \geq \delta$$

où H_0^* est l'ensemble des sommes finies de la forme $\sum \varepsilon_j A^{*qj} h_0$ avec $\varepsilon_j = -1, 0$ ou 1.

Preuve. Soit

$$v = h_{qn+p} - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j h_{qj}\,.$$

Comme il peut s'écrire

$$v = T^{*-1}\Big(D^{*qn+p} h_0 - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j D^{*qj}\Big) T^* h_0\,,$$

sa norme euclidienne vérifie

$$\|v\| \geq \|T^*\|^{-1} \Big\|\Big(D^{*qn+p} - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j D^{*qj}\Big) T^* h_0\Big\|$$

$$\geq \|T^*\|^{-1} |\langle v_{11}, h_0\rangle| \Big\|\xi_1^{qn+p} - \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \xi_1^{qj}\Big\|\,,$$

d'où le résultat si l'on applique le lemme 2. ∎

De même, le lemme suivant se démontre comme conséquence du lemme 3.

LEMME 6. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 5 on a*

$$D(h' - h'', H_0^*) \geq \delta$$

pour $h', h'' \in H_p$ $(1 \leq p < q)$ et $h' \neq h''$.

4. Energie de produit de Riesz sur $\mathbb{R}^d$. On va évaluer l'indice énergétique de certains produits de Riesz construits sur $\mathbb{R}^d$. Ce type de produit de Riesz a été introduit dans [13].

Etant donné une suite dissociée $\{h_n\}_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^d$ et une suite de nombres complexes $\{a_n\}_{n \geq 0}$ tels que $|a_n| \leq 1$, le produit

$$\mu_a = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \operatorname{Re} a_n e^{2\pi i \langle h_n,\, t\rangle})$$

définit une mesure sur le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}^d$, dont les coefficients de Fourier jouissent des propriétés suivantes :

$$\widehat{\mu}_a(0) = 1, \quad \widehat{\mu}_a(-h_j) = \frac{\overline{a}_j}{2}, \quad \widehat{\mu}_a(h_j) = \frac{a_j}{2},$$
$$\widehat{\mu}_a\Big(\sum \varepsilon_j h_j\Big) = \prod \widehat{\mu}_a(\varepsilon_j h_j),$$
$$\widehat{\mu}_a(h) = 0 \quad \text{si } h \neq \sum \varepsilon_j h_j .$$

Supposons dans la suite que $\{h_n\}_{n\geq 0}$ soit fortement dissociée. Avec la mesure μ_a on peut construire une autre qui sera définie sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\delta > 0$ un rayon dans la définition de la forte dissociation. Soit K une fonction telle que

(N_1) $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $K > 0$ p.p.,
(N_2) $\widehat{K}(0) = 1$, $\operatorname{supp} \widehat{K} \subset B(0,\delta)$ ($B(0,\delta)$ désignant une boule).

Signalons que le noyons de Fejér $K_\delta(x)$ est un choix, dont la transformée de Fourier est

$$\widehat{K}_\delta(\xi) = \prod_{j=1}^{d} (1 - \delta|\xi_j|)_+ \qquad (\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d))$$

où $x_+ = \max(0,x)$ pour un réel x. K étant choisi, le *produit de Riesz* suivant :

$$\nu_a = K(x) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \operatorname{Re} a_n e^{2\pi i \langle h_n, t\rangle})$$

définit une mesure sur $\mathbb{R}^d$ comme la limite faible de ses produits partiels. Cette mesure peut se caractériser par sa transformée de Fourier : si ξ se trouve dans la boule de rayon δ et de centre $\sum \varepsilon_j h_j$, on a

$$\widehat{\nu}_a(\xi) = \widehat{K}\Big(\xi - \sum \varepsilon_j h_j\Big) \widehat{\mu}_a\Big(\sum \varepsilon_j h_j\Big);$$

si ξ ne se trouve dans aucune de ces boules, on a $\widehat{\nu}_a(\xi) = 0$. Avec ces connaissances sur ν_a, on peut calculer l'intégrale d'énergie de ν_a.

Théorème 3. *Supposons en plus de (N_1) et (N_2) que $K \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|h_{n+1}\| \geq \theta \|h_n\|$ pour un certain $\theta > 2$. Pour $0 < \alpha < d$, on a*

$$I_\alpha^{\nu_a} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\|h_n\|^{d-\alpha}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{|a_j|^2}{2}\right).$$

Preuve. On a la formule de Riesz

$$I_\alpha^{\nu_a} = \int_{\mathbb{R}_d} |\xi|^{-(d-\alpha)} |\widehat{\nu}_a(\xi)|^2 d\xi .$$

Soit $B(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ la boule de rayon δ et de centre $\sum_{j=0}^n \varepsilon_j h_j$. On a

$$I_\alpha^{\nu_a} = I(0) + \sum_n \sum_{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}} [J(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1},-1) + J(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1},1)]$$

où

$$J(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n) = \int\limits_{B(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n)} |\xi|^{-(d-\alpha)} |\widehat{\nu}_a(\xi)|^2 d\xi\,.$$

Comme $\|h_{n+1}\| \ge \theta\|h_n\|$, si $\xi \in B(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1},\pm 1)$ on a

$$\frac{\theta-2}{\theta-1}\|h_n\| - \delta \le \|\xi\| \le \frac{\theta}{\theta-1}\|h_n\| + \delta\,.$$

Par conséquent, et grâce à (4), on a

$$\sum_{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}} [J(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1},-1) + J(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1},1)]$$

$$\approx \|h_n\|^{-(d-\alpha)} \left(\frac{|a_n|}{2}\right)^2 \sum_{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{|a_j|}{2}\right)^{2|\varepsilon_j|} \int\limits_{B(0,\delta)} |\widehat{K}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\approx \|h_n\|^{-(d-\alpha)} |a_n|^2 \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{|a_j|^2}{2}\right). \ \blacksquare$$

COROLLAIRE 4. *Supposons, en plus des hypothèses du théorème* 3, *que* $|a_n| = r$ *pour tout* n. *On a*

$$e(\mu_a) = \sup\left\{\alpha : \sum_n \frac{(1+r^2/2)^n}{\|h_n\|^{d-\alpha}} < \infty\right\}.$$

En particulier, $\lim_{r\to 0} e(\mu_a) = d$.

5. Equirépartition. Evidemment le théorème de Weyl est un cas particulier du théorème 1. On ne va démontrer que le dernier. Le critère de Weyl pour l'équirépartition s'écrit comme suit : $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^d$ est équirépartie ssi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i\langle h, t_n\rangle} = 0 \qquad \text{pour } h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\,.$$

Notre objectif est donc de démontrer que pour tout $h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i\langle h,\, A_n x\rangle} = 0 \qquad \text{p.p.} \tag{8}$$

Fixons $h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Prenons un $\delta > 0$ et $N > 0$ tels que

$$\inf_{n\ge N} \|A_n^* h\| > \delta, \qquad \inf_{n\ne m; n,m\ge N} \|(A_n^* - A_m^*)h\| > \delta\,. \tag{9}$$

Choisissons une fonction $K(x)$ définie sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant (N_1) et (N_2) dans le §4.

Considérons maintenant l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^d, K(x)dx)$ où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et la suite de variables $\{X_n\}_{n\geq N}$ définies par

$$X_n = e^{-2\pi i\langle h, A_n x\rangle} = e^{-2\pi i\langle\, A_n^* h, x\rangle}\,.$$

D'après (9) et (N_2), on a

$$\mathbb{E}X_n = \widehat{K}(A_n^* h) = 0 \qquad (n \geq N)\,,$$
$$\mathbb{E}X_n \overline{X}_m = \widehat{K}((A_n^* - A_m^*)h) = 0 \qquad (n, m \geq N;\, n \neq m)\,.$$

Les variables $\{X_n\}_{n\geq N}$ constituent alors un système orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^d, K(x)dx)$. Selon le théorème de Men'shov–Rademacher ([9], ou [15], Vol. 2, p. 193) et puis le lemme de Kronecker ([11], p. 89), on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n = 0 \qquad K(x)\text{-p.p.}\,,$$

d'où et de (N_1) on déduit (8). Ainsi on démontre le théorème 1.

Pour démontrer le corollaire 2, on est amené à minorer la norme $\|(A^{*n} - A^{*m})h\|$ pour $h \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et n, m tels que $n \neq m$. Avec les notations du §3, on a

$$\|(A^{*n} - A^{*m})h\| \approx \|\operatorname{diag}\{J_1^{*n} - J_1^{*m}, \ldots, J_r^{*n} - J_r^{*m}\} T^* h\|\,.$$

Selon l'hypothèse, il existe une valeur propre ξ_j ($|\xi_j| > 1$) et un vecteur propre généralisé v_{ji} ($1 \leq i \leq d_j$) associé à ξ_j tel que $\langle v_{ji}, h\rangle \neq 0$. Supposons que v_{ji} est le premier tel vecteur parmi ceux qui sont rangés dans l'ordre suivant : $v_{11}, \ldots, v_{1d_1}; \ldots; v_{r1}, \ldots, v_{rd_r}$. On a donc

$$T^* h = {}^t(0, \ldots, 0, \langle v_{ji}, h\rangle, *, \ldots, *)\,.$$

Par conséquent,

$$\|(A^{*n} - A^{*m})h\| \geq C |\langle v_{ji}, h\rangle|\, |\lambda_j^n - \lambda_j^m|\,,$$

d'où la minoration désirée.

6. Non-équirépartition. Démontrons le théorème de Erdős–Taylor. Choisissons un petit $\delta > 0$ et un grand $q \geq 2$ tels que les conclusions des lemmes 2 et 3 soient vraies et que $\theta^q > 3$. Décomposons Λ en q parties comme au §3. Selon le lemme 1, on peut construire comme dans le §4 les produits de Riesz basés sur Λ_0 :

$$\nu_r = K(x) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + r\cos\lambda_{qn} x) \qquad (0 \leq r \leq 1)$$

avec un choix de $K(x)$ satisfaisant (N_1) et (N_2).

Pour r fixé, considérons l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^d, \nu_r)$ et les variables aléatoires

$$X_n = e^{-2\pi i \lambda_n x} \qquad (n \geq 0)\,.$$

D'après la forte dissociation de Λ_0 et la construction de ν_r, il est clair que la sous-suite $\{X_{qn}\}_{n\geq 0}$ satisfait

$$\mathbb{E}X_{qn} = \frac{r}{2}, \quad \mathbb{E}\biggl(X_{qn} - \frac{r}{2}\biggr)\biggl(\overline{X}_{qm} - \frac{r}{2}\biggr) = 0 \quad (n \neq m)\,.$$

D'après les lemmes 2 et 3, chaque sous-suite $\{X_{qn+p}\}$ $(1 \leq p < q)$ satisfait

$$\mathbb{E}X_{qn+p} = 0, \quad \mathbb{E}X_{qn+p}\overline{X}_{qm+p} = 0 \quad (n \neq m)\,.$$

En vertu de ces orthogonalités, du théorème de Men'shov–Rademacher et du lemme de Kronecker, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X_{qn} = \frac{r}{2} \qquad \nu_r\text{-p.p.}\,,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X_{qn+p} = 0 \qquad \nu_r\text{-p.p. } (1 \leq p < q)\,.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} X_n = \frac{r}{2q} \qquad \nu_r\text{-p.p.}\,,$$

d'où et du critère de Weyl résulte que l'ensemble des x tels que $\{\lambda_n x\}$ ne soit pas équirépartie mod 1 contient un ensemble qui porte la mesure ν_r. Donc la dimension de l'ensemble intéressé est plus grande que la dimension de ν_r. Or le théorème 3 nous dit que

$$\lim_{r\to 0} \dim \nu_r = 1\,. \ \blacksquare$$

De même se démontre le théorème 2. Au lieu d'employer les lemmes 1–3 on utilise les lemmes 4–6. On construit les produits de Riesz

$$\nu_r = K(x) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + r\cos\langle h_0, A^n x\rangle)$$

avec un h_0 tel que $\langle v_{11}, h_0\rangle \neq 0$ (voir §3 et §4).

RÉFÉRENCES

[1] P. Erdős and S. J. Taylor, *On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 598–615.

[2] A. H. Fan, *Décomposition de mesure et recouvrements aléatoires*, Publication d'Orsay, 1989–03.
[3] —, *Sur les dimensions de mesures*, à paraître.
[4] —, *Equirépartition des orbites d'un endomorphisme de* $\mathbb{R}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 313 (1991), 735–738.
[5] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformation of the torus*, Amer. J. Math. 83 (1961), 573–601.
[6] F. J. Hahn, *On affine transformations of compact Abelian groups*, ibid. 85 (1963), 428–446.
[7] P. R. Halmos, *On automorphisms of compact groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 619–624.
[8] H. Helson and J. P. Kahane, *A Fourier method in diophantine problems*, J. Analyse Math. 15 (1965), 245–262.
[9] M. Kac, R. Salem and A. Zygmund, *A gap theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 235–243.
[10] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York, 1974.
[11] R. G. Laha and V. K. Rohatgi, *Probability Theory*, Wiley, New York, 1979.
[12] M. Mendès France, *Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires*, J. Analyse Math. 20 (1967), 1–56.
[13] J. Peyrière, *Etude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (2) (1975), 127–169.
[14] G. Rauzy, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, Presses Univ. France, 1976.
[15] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vols. 1 & 2, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1968.

ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUES (BÂT. 425)
UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
91405 ORSAY, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 19.10.1992;
en version modifiée le 26.3.1993