COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXVI 1993 FASC. 1

POINTS ENTIERS SUR LES COURBES DE GENRE 0

PAR

DIMITRIOS POULAKIS (THESSALONIQUE)

1. Introduction. Soient K un corps de nombres de degré d et O_K l'anneau des entiers de K. On notera $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et D_K le discriminant de K. Considérons un polynôme $F(X,Y) \in K[X,Y]$, absolument irréductible, tel que la courbe algébrique C définie par l'équation $F(X,Y)=0$ soit de genre 0. Notons Σ l'ensemble des anneaux de valuation discrète V, dans le corps des fonctions $\overline{K}(C)$ de C, qui contiennent le corps $\overline{K}$, et Σ_∞ l'ensemble des éléments de Σ qui se trouvent au-dessus de l'anneau de valuation discrète de $\overline{K}(X)$ qui est définie par $1/X$. On sait d'après Siegel ([12]) que si Σ_∞ contient au moins trois éléments distincts, la courbe $F(X,Y)=0$ n'a qu'un nombre fini de points entiers sur K. Toutefois, bien qu'il est connu qu'on peut calculer un majorant explicite de la taille des points entiers de $F(X,Y)=0$ sur K ([5], [11]), il n'y a nulle trace dans la littérature d'un tel majorant. Dans cette note nous calculons un majorant explicite de la taille des points S-entiers de $F(X,Y)=0$ sur K, en réduisant ce problème au problème de déterminer les solutions d'une équation de Thue en S-entiers; puis en utilisant une majoration de la taille des solutions de l'équation de Thue en S-entiers, dûe à Győry ([2]), on déduit notre résultat.

Soit $V(K)=\{|\ |_v : v \in M(K)\}$ l'ensemble des valeurs absolues normalisées de K ([4], chap. 2, §1). Soit S un sous-ensemble fini de $V(K)$ qui contient les valeurs absolues archimédiennes. Rappelons que l'anneau des S-entiers de K est l'ensemble $O_{K,S}$ qui contient les éléments $x \in K$ tels que $|x|_v \le 1$ pour tout $|\ |_v$ qui n'appartient pas à S. Si $v \in M(K)$, on note d_v le degré local correspondant; alors si $\overline{x}=(x_0:\ldots:x_n)$ est un point de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$, posons

$$H_K(\overline{x}) = \max \prod_{v\in M(K)} \{|x_0|_v,\ldots,|x_n|_v\}^{d_v} \quad \text{et} \quad H(\overline{x}) = H_K(\overline{x})^{1/d}\,.$$

On appelle les quantités $H_K(\overline{x})$ et $H(\overline{x})$ *hauteur* de $\overline{x}$ (relativement à K) et *hauteur absolue* de $\overline{x}$ respectivement. Lorsque $x \in K$, on note $H_K(x)=$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11D57.

Key words and phrases: point S-entier, courbe algébrique, hauteur.

$H_K((1:x))$. Soit $f \in K[X_1, \ldots, X_n] - \{0\}$. Par hauteur $H_K(f)$ et hauteur absolue $H(f)$ de f nous entendrons respectivement la hauteur et la hauteur absolue du point projectif défini par les coefficients de f.

Soit $C : F(X,Y) = 0$ une courbe de genre 0 telle que l'ensemble Σ_∞ contient au moins trois anneaux. Notons N le degré total de F, s le nombre des éléments de l'ensemble S et $P(S)$ un entier positif tel que la norme de tout idéal premier (entier) $\wp$ de K qui correspond à une valeur absolue non-archimédienne de S satisfait $N_K(\wp) < P(S)$. Alors nous montrons le résultat suivant :

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes la courbe C possède un nombre fini de points S-entiers. De plus, si $x, y \in O_{K,S}$ avec $F(x,y) = 0$, on a*

$$\max\{H_K(x), H_K(y)\} < \exp\{N^{10^6 d^2 s^3 N^{5N+10}} P(S)^{300sdN^{3N+4}} |D_K|^{65dsN^{3N+4}} H_K(F)^{6000sd^2 N^{3N+10}}\}.$$

Remarques. 1. Dans le cas où le corps K contient les racines de l'équation $F(1,Y) = 0$, on a une majoration plus précise :

$$\max\{H_K(x), H_K(y)\} < \exp\{N^{2900d^2 s^3 N^{10}} P(S)^{11sdN^2} |D_K|^{7dsN^3} H_K(F)^{220sdN^9}\}.$$

2. Supposons que $F \in \mathbb{Q}[X,Y]$; alors si $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $F(x,y) = 0$, le théorème entraîne

$$\max\{|x|, |y|\} < \exp\{N^{10^6 N^{5N+10}} H_Q(F)^{6000N^{10+3N}}\}.$$

2. Construction d'une fonction qui paramétrise C. Considérons $F(X,Y)$ comme polynôme en Y et notons $D(X)$ son discriminant; on a $\deg D < 2N^2$. Alors il existe une place finie $X = x_0$, où x_0 est un entier avec $1 \le x_0 \le 2N^2$, qui est non-ramifiée dans $\overline{K}(C)$. Par conséquent pour tout $V \in \Sigma$, au-dessus de $X = x_0$, le développement de Puiseux d'une fonction Θ (dans une clôture algébrique de $\overline{K}(X)$) avec $F(X,\Theta) = 0$ est

$$\Theta = \sum_{s=s_0}^{\infty} a_s X_V^s,$$

où $X_V = X - x_0$ et $s_0 \ge 0$. Comme

$$F\Big(X_V + x_0, \sum_{s=s_0}^{\infty} a_s X_V^s\Big) = 0,$$

le théorème d'Eisenstein ([8], [10]) entraîne qu'il existe un corps de nombres K', avec $[K' : K] \le n$, tel que $a_s \in K'$ $(s = s_{s0}, s_{s0+1}, \ldots)$ et son discriminant $D_{K'}$ vérifie l'inégalité

$$|D_{K'}| \leq N^{630dN^7} |D_K|^N H_K(F)^{48N^7} . \tag{2.1}$$

Comme $a_s \in K'$ $(s = s_{s0}, s_{s0+1}, \ldots)$, il en résulte que pour tout $V \in \Sigma$, au-dessus de $X = x_0$, le diviseur V est défini sur K' ([9], page 186).

Si $U \in \Sigma$ et $f \in \overline{K}(C)$ notons $\mathrm{ord}_U(f)$ l'ordre de la fonction f en U. Soit W un anneau de Σ au-dessus de $X = x_0$. Considérons le $\overline{K}$-espace $L(W)$ des fonctions $f \in \overline{K}(C)$ telles que $\mathrm{ord}_W(f) \geq -1$ et $\mathrm{ord}_U(f) \geq 0$, pour tout élément U de Σ autre que W. La dimension de $L(W)$ est 2. D'après [9], théorème A2, il existe des polynômes

$$q(X) = \sum_i q_i X^i \quad \text{et} \quad c_i(X, Y) = \sum_{i,j} c_{ij} X^i Y^j \quad (i = 1, 2)$$

avec

$$\deg q < 2N^3, \quad \deg_X c_i < 5N^3, \quad \deg_Y c_i < n \, , \tag{2.2}$$

et

$$H(c_{ij}) < N^{2930N^{11}} H(F)^{370N^{13}}, \qquad H(q_i) < N^{5N^6} H(F)^{2N^4} , \tag{2.3}$$

tels que les fractions

$$c_i(X, Y)/q(X) \qquad (i = 1, 2) \tag{2.4}$$

représentent une base de l'espace $L(W)$. Le diviseur W est rationnel sur K'. Alors le théorème B2 de [9] entraîne que les coefficients des polynômes $q(X)$ et $c_i(X, Y)$ se trouvent dans K'. Comme la dimension de $L(W)$ est 2, une des fractions (2.4) représente une fonction $T \in K'(C)$ non constante; on a donc $\mathrm{ord}_W T = -1$. Ceci entraîne $K'(C) = K'(T)$.

3. Les zéros et les pôles de X. Comme $X \in K'(T)$, il existe des éléments $a, a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$ de $\overline{K}$ tels que

$$X = a(T - a_1) \ldots (T - a_s)/(T - b_1) \ldots (T - b_t) .$$

Alors on a $\mathrm{ord}_W X = s - t$. D'autre part, la fonction X n'a ni zéro ni pôle en W. Il en résulte que $s = t$. D'après nos hypothèses, Σ_∞ contient au moins trois anneaux distincts; alors $s = t = n \geq 3$ et au moins trois des nombres $b_1, \ldots, b_t$ sont deux-à-deux distincts. Considérons des coordonnées homogènes $(x : y : z)$ et notons T_h et F_h les homogénisés des T et F. Les zéros de la fonction X sont les couples $(0, y)$, où $F(0, y) = 0$ et éventuellement quelques points à l'infini, $(x : y : 0)$ avec $F_h(x : y : 0) = 0$. On déduit donc que les nombres $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont parmi les nombres $T(0, y)$ avec $F(0, y) = 0$ et $T_h(x : y : 0)$ avec $F(x : y : 0) = 0$. En utilisant (2.2) et (2.3) on trouve

$$H(a_i), H(b_i) < N^{2940N^{12}} H(F)^{375N^{12}} \qquad (i = 1, \ldots, n) . \tag{3.1}$$

Posons $f(T) = (T-a_1)\dots(T-a_n)$ et $g(T) = (T-b_1)\dots(T-b_n)$. Alors l'inégalité (3.1) et le théorème 5.9, page 211 de [14], entraînent

$$H(f), H(g) < N^{2950N^{13}} H(F)^{375N^{13}} . \tag{3.2}$$

Comme $K'(C) = K'(T)$, les coefficients des $af(T)$ et $g(T)$ se trouvent dans K'. Soit z tel que $F(1,z) = 0$; alors on a $a = g(T(1,z))/f(T(1,z))$. On en déduit que

$$H(a) < N^{7350N^{14}} H(F)^{950N^{14}} . \tag{3.3}$$

4. Calcul d'un discriminant. Soient $\varrho_1, \dots, \varrho_\mu$ les différentes racines de $F_h(1, Y, 0) = 0$. Posons $L = K'(\varrho_1, \dots, \varrho_\mu)$. Dans cette section nous allons calculer une majoration pour le discriminant D_L de L, que nous allons utiliser dans la section suivante. Soit δ le plus petit entier positif tel que les nombres $\delta\varrho_1, \dots, \delta\varrho_\mu$ soient des entiers de L. Posons

$$F_1(Y) = (Y - \delta\varrho_1)\dots(Y - \delta\varrho_\mu)$$

et notons $D(F_1)$ le discriminant de $F_1(Y)$. La formule de transitivité des discriminants entraîne

$$|D_L| \le |D_{K'}|^{n^n} |N_{K'}(D(F_1))|^{n^n} .$$

D'autre part, on a

$$|N_{K'}(D(F_1))| \le H_{K'}(D(F_1)) \le N^{7dN^2} H_K(F_1)^{2N^2} .$$

Il en résulte que

$$|D_L| \le N^{7dN^2n^n} |D_{K'}|^{n^n} H_K(F_1)^{2N^2n^n} . \tag{4.1}$$

Considérons le polynôme

$$F_1'(Y) = (Y - \delta\varrho_1)\dots(Y - \delta\varrho_n) ,$$

où $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ sont les racines de $F_h(1, Y, 0) = 0$ avec multiplicité. En utilisant le théorème 5.9, page 211 de [12], on déduit

$$\delta < 2^{dn-1}(\max_{1\le i\le\mu}\{H(\varrho_i)\})^{dn} \le N^{2dN} H_K(F)^n .$$

Il en résulte que

$$H_K(F_1') < \delta^{dn} H_K(F) < N^{2d^2N^2} H_K(F)^{2dN^2} .$$

Alors la proposition 2.4, page 57 de [4], donne

$$H_K(F_1) \le 4^{dN} H_K(F_1') \le N^{3d^2N^2} H_K(F)^{dN^2} . \tag{4.2}$$

Les inégalités (2.1), (4.1) et (4.2) entraînent donc

$$|D_L| \le N^{635dN^{N+7}} |D_K|^{N^{N+1}} H_K(F)^{50dN^{N+7}} . \tag{4.3}$$

5. Démonstration du théorème. Notons $O_{K'}$ l'anneau des entiers de K' et S' l'ensemble des valeurs absolues de K' qui prolongent les éléments de S. Considérons les homogénisés $f_h(X,Y)$ et $g_h(X,Y)$ des polynômes $f(T)$ et $g(T)$ respectivement. Soit δ le plus petit entier positif tel que $\delta f_h, \delta g_h \in O_{K'}[X,Y]$. Le théorème 5.9, page 211 de [14], et les inégalités (3.2) et (3.3) donnent

$$\delta < N^{8100dN^{15}} H_K(F)^{1100N^{15}} . \tag{5.1}$$

Les polynômes f_h et g_h n'ont pas de facteur commun; alors leur seul zéro commun est $(0,0)$. Le théorème IV de [6] et les inégalités (3.2) entraînent qu'il existe des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 dans $O_{K'}[X,Y]$, des entiers positifs ε, ζ et u, v dans $O_{K'}$ tels que

$$P_1(X,Y)\delta a f_h(X,Y) + P_2(X,Y)\delta g_h(X,Y) = X^{\varepsilon} u \tag{5.2}$$

et

$$P_3(X,Y)\delta a f_h(X,Y) + P_4(X,Y)\delta g_h(X,Y) = Y^{\zeta} v, \tag{5.3}$$

avec

$$\varepsilon, \zeta \leq (8n)^4 \quad \text{et} \quad H_{K'}(u), H_{K'}(v) < \Omega$$

où

$$\Omega = N^{7 \cdot 10^9 d^2 N^{22}} H_K(F)^{8 \cdot 10^8 d N^{22}} .$$

Soit $x, y \in O_{K,S}$ avec $F(x,y) = 0$. Alors il existe $t \in K'$ tel que $x = af(t)/g(t)$. On peut écrire $t = \xi/\eta$, où $\xi, \eta \in O_{K'}$ et le plus grand commun diviseur des ξ, η divise un entier Φ de $O_{K'}$, avec

$$N_{K'}(\Phi) \leq |D_{K'}|^{h_{K'}(h_{K'}-1)/2} ,$$

où $h_{K'}$ est le nombre des classes de K'. Alors on a $x = af_h(\xi,\eta)/g_h(\xi,\eta)$. On déduit de (5.2) et (5.3) que $\delta g_h(\xi,\eta) \mid \xi^{\varepsilon} u$ et $\delta g_h(\xi,\eta) \mid \eta^{\zeta} v$; il en résulte que

$$\delta g_h(\xi,\eta) \mid \Phi^{\max\{\varepsilon,\zeta\}} uv .$$

Soit s' le nombre des éléments de S'. On sait, d'après [1], qu'il existe une base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s'-1}$ de la partie sans torsion du groupe des S'-unités de K' avec

$$H(\varepsilon_i) < \exp\{(sN^{640dN^8} |D_K|^N H_K(F)^{48N^7} \log P(S))^{sn}\} . \tag{5.4}$$

Alors il existe une S'-unité ε telle que la couple $(\xi\varepsilon, \eta\varepsilon)$ est une solution de l'équation

$$\delta g_h(\Xi, H) = A = \varepsilon_1^{r_1} \ldots \varepsilon_{s'-1}^{r_{s'-1}} B ,$$

avec $0 \leq r_1, \ldots, r_{s'-1} \leq n-1$ et $B \in O_{K'}$ tel que

$$N_{K'}(B) < \Omega^2 |D_{K'}|^{2^{11} n^4 h_{K'}^2} .$$

Soit $\|B\|$ la plus grande des valeurs absolues des conjugués de B. En vertu du lemme 3 de [3], on peut supposer, sans restreindre la généralité, que

$$\|B\| < N_{K'}(B)^{1/d} \exp\{dn(25d^3n^3)^{dn} R_{K'}\},$$

où $R_{K'}$ est le régulateur de K'; il en résulte que

$$H(B) < N_{K'}(B)^{1/d} \exp\{dn(25d^3n^3)^{dn} R_{K'}\}. \tag{5.5}$$

D'après le §3, le polynôme $g(T)$ a au moins trois racines distinctes. Supposons que K contient les racines de l'équation $F(1,Y)=0$; par conséquent, $g(T)$ se décompose dans K. Le corollaire 1.1 de [2] entraîne donc

$$\begin{aligned}\max\{H_{K'}(\xi\varepsilon), H_{K'}(\eta\varepsilon)\} < \exp\{&(25dsN^2)^{110s^2n^2}(R_{K'}h_{K'})^{ns+6} \\ &\times P(S)^{10dn^2}(1+\log dH(g)H(A))\}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

On sait, d'après [13], que

$$R_{K'} < 3^{dn}(dn)^2 |D_{K'}|^{1/2} \max\{1, \log|D_{K'}|\}^{dn}; \tag{5.7}$$

aussi les résultats de [7] impliquent que

$$h_{K'} < 3|D_{K'}|^{dn}. \tag{5.8}$$

Alors les inégalités (3.2), (5.1) et (5.4)–(5.8) entraînent

$$\begin{aligned}&\max\{H_{K'}(\xi\varepsilon), H_{K'}(\eta\varepsilon)\} \\ &\qquad < \exp\{N^{2890d^2s^3N^{10}} P(S)^{11sdN^2} |D_K|^{7dsN^3} H_K(F)^{220sdN^9}\}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Comme $x = af_h(\xi\varepsilon,\eta\varepsilon)/g_h(\xi\varepsilon,\eta\varepsilon)$, (5.9), (3.2) et (3.3) entraînent

$$\begin{aligned}&\max\{H_K(x), H_K(y)\} \\ &\qquad < \exp\{N^{2900d^2s^3N^{10}} P(S)^{11sdN^2} |D_K|^{7dsN^3} H_K(F)^{220sdN^9}\},\end{aligned} \tag{5.10}$$

ce qui démontre la remarque 1. Supposons que K ne contient pas les racines de $g(T)$. Alors en considérant L à la place de K et en utilisant les majorations (4.3) et (5.10) nous déduisons le résultat.

RÉFÉRENCES

[1] B. Brindza, *On the generators of S-unit group in algebraic number fields*, Bull. Austral. Math. Soc. 43 (1991), 325–329.

[2] K. Győry, *On S-integral solutions of norm forms, discriminant forms and index form equations*, Studia Sci. Math. Hungar. 16 (1981), 149–161.

[3] —, *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Budapest Eötvos Sect. Math. 22–23 (1970–1980), 225–233.

[4] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[5] —, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer, New York, 1983.

[6] W. Masser and G. Wüstholtz, *Fields of large transcendence degree generated by values of elliptic functions*, Invent. Math. 72 (1983), 407–464.

[7] M. Newmann, *Bounds for the class numbers*, in: Theory of Numbers, Proc. Sympos. Pure Math. 8, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, 70–77.
[8] W. M. Schmidt, *Eisenstein theorem on power series expansions of algebraic functions*, Acta Arith. 56 (1990), 161–179.
[9] —, *Construction and estimation of bases in function fields*, J. Number Theory 39 (1991), 181–224.
[10] —, *Integer points on curves of genus* 1, Compositio Math. 81 (1992), 33–59.
[11] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell–Weil Theorem*, Vieweg, 1989.
[12] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. 1929.
[13] —, *Abschätzung von Einheiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1969 (9), 71–86.
[14] J. H. Silvermann, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, New York, 1986.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE THESSALONIQUE
54006 THESSALONIQUE, GRÈCE

Reçu par la Rédaction le 1.7.1992