C O L L O Q U I U M M A T H E M A T I C U M

VOL. LXV 1993 FASC. 2

MINORATION AU POINT 1 DES FONCTIONS L ATTACHÉES À DES CARACTÈRES DE DIRICHLET

PAR

PIERRE BARRUCAND (PARIS) ET STÉPHANE LOUBOUTIN (CAEN)

Il est connu (voir [1], [3]) que lorsque χ varie parmi les caractères de Dirichlet non quadratiques, nous avons $|L(1,\chi)|^{-1} = O(\mathrm{Log}(f_\chi))$.

Nous montrons ici qu'en se restreignant aux caractères d'ordre impair donné, nous avons $|L(1,\chi)|^{-1} = o(\mathrm{Log}(f_\chi))$. Il serait évidemment bien plus satisfaisant de parvenir à prouver un tel résultat sans restreindre χ à varier parmi des caractères d'ordre fixé.

Pour les caractères d'ordre pair, nous ne pouvons établir un tel résultat qu'en nous restreignant aux caractères pour lesquels les conducteurs de χ^2 restent bornés (mais sans avoir à exiger que l'ordre de χ soit fixé).

1. Cas des caractères d'ordre impair. Dans toute la suite, χ désignera un caractère de Dirichlet primitif, non quadratique et non principal. Nous noterons f_χ son conducteur. Il existe (voir [1], [3]) une constante effective $c > 0$ telle que pour tout tel χ nous ayons

$$|L(1,\chi)| \geq \frac{c}{\mathrm{Log}(f_\chi)}\,,$$

i.e. nous ayons

$$|L(1,\chi)|^{-1} = O(\mathrm{Log}(f_\chi))\,.$$

Si χ est de plus d'ordre 3 et si $\mathbf{K}$ est le corps cubique cyclique totalement réel de conducteur f_χ et de discriminant $d(\mathbf{K}) = f_\chi^2$ dont le groupe des caractères est engendré par χ, alors en remarquant que la fonction zêta de $\mathbf{K}$ se factorise en $\zeta_{\mathbf{K}}(s) = \zeta(s)L(s,\chi)L(s,\overline{\chi}) = \zeta(s)|L(s,\chi)|^2$ pour $0 < s < 1$, nous en déduisons que cette fonction zêta est négative ou nulle sur $]0,1[$. Il en résulte (voir [2]) que l'on a

$$\mathrm{Res}_1(\zeta_{\mathbf{K}}) = |L(1,\chi)|^2 \geq \frac{2+o(1)}{e\,\mathrm{Log}(d(\mathbf{K}))} = \frac{1+o(1)}{e\,\mathrm{Log}(f_\chi)}\,.$$

Il existe donc une constante effective $c > 0$ telle que pour tout caractère primitif d'ordre 3 nous ayons

$$|L(1,\chi)| \geq \frac{c}{\sqrt{\operatorname{Log}(f_\chi)}}\,.$$

Le même raisonnement montrerait également que si $n \geq 3$ impair est fixé, alors il existe une constante effective $c_n > 0$ telle que pour tout caractère χ d'ordre n et de conducteur f_χ premier, au moins un des caractères $\psi_i = \chi^i$, $1 \leq i \leq n-1$ (qui sont tous de conducteur $f_{\psi_i} = f_\chi$) vérifie

$$|L(1,\psi_i)| \geq \frac{c_n}{(\operatorname{Log}(f_{\psi_i}))^{1/(n-1)}}\,.$$

Malheureusement, nous ne savons pas pour $n \geq 5$ montrer que cette inégalité est satisfaite pour $i = 1$, i.e. pour $\psi_i = \chi$. Néanmoins, nous avons

Théorème 1. *Il existe une constante effective $c > 0$ telle que pour tout caractère primitif χ d'ordre n impair nous ayons*

$$|L(1,\chi)| \geq \frac{c}{(\operatorname{Log}(f_\chi))^{\cos(\pi/n)}}\,.$$

En conséquence, pour $n \geq 3$ impair et fixé, lorsque χ varie parmi les caractères de Dirichlet primitifs d'ordre n nous avons

$$|L(1,\chi)|^{-1} = o(\operatorname{Log}(f_\chi))\,.$$

Pour obtenir ce résultat, nous reprenons la preuve de la minoration de $|L(1,\chi)|$ que nous donnions dans [3]. Nous remarquons qu'elle se décompose en trois étapes :

(i) On se donne $c_1 > 0$ et on pose

$$s_0 = 1 + \frac{1}{c_1 \operatorname{Log}(f_\chi)}\,;$$

(ii) On montre qu'il existe $c_2 > 0$ ne dépendant que de c_1 tel que

$$|L(1,\chi)| \geq c_2 |L(s_0,\chi)|;$$

(iii) On remarque que

$$|L(s,\chi)| \geq \prod_p \frac{1}{1+1/p^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \geq \frac{1}{\zeta(s)} \geq \frac{s-1}{s}, \quad s > 1\,.$$

Nous nous proposons ici d'amender la minoration de cette troisième étape. Il est clair que le Théorème 1 découle du résultat suivant :

Lemme A. *Pour tout caractère de Dirichlet (non nécessairement primitif) d'ordre $n \geq 3$ impair nous avons*

$$|L(s,\chi)| \geq \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^{\cos(\pi/n)}}, \quad s > 1\,.$$

P r e u v e. Nous avons

$$|L(s,\chi)|^{-2} = \prod_p \left(1 - \frac{2\alpha_p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)$$

où $\alpha_p = \frac{1}{2}(\chi(p) + \overline{\chi}(p))$ vérifie donc $\alpha_p \geq -\cos(\pi/n)$. D'où

$$|L(s,\chi)|^{-2}\zeta(s)^{-2\cos(\pi/n)} \leq \prod_p \left(1 + \frac{2\cos(\pi/n)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{2\cos(\pi/n)}.$$

Le lemme découle alors de ce que pour $A > 1$ la fonction f_A définie par

$$f_A(x) = \left(1 + \frac{2x}{A} + \frac{1}{A^2}\right)\left(1 - \frac{1}{A}\right)^{2x}$$

vérifie

$$f_A(\cos(\pi/n)) \leq f_A(1) = \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^2,$$

et ce parce qu'elle est décroissante sur $[0, \infty[$, puisque l'on a

$$\frac{f'_A}{f_A}(x) \leq \frac{2}{A} + 2\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{A}\right) \leq 0\,. \quad ■$$

2. Cas des caractères d'ordre pair. Si χ est d'ordre pair, et même en excluant le cas des fonctions L attachées à des caractères quadratiques pour lesquels on ne dispose comme seule minoration au point 1 que du résultat ineffectif de Siegel, il ne semble pas possible d'amender (à ordre de χ fixé) la majoration

$$|L(1,\chi)|^{-1} = O(\operatorname{Log}(f))$$

en

$$|L(1,\chi)|^{-1} = o(\operatorname{Log}(f))\,.$$

Néanmoins, soit par exemple χ d'ordre 4 et soit ψ le caractère quadratique primitif et non principal induisant χ^2. Soit de plus $\mathbf{K}$ le corps quartique cyclique de conducteur f_χ à groupe des caractères engendré par χ. La fonction zêta de $\mathbf{K}$ se factorise en $\zeta_{\mathbf{K}}(s) = \zeta(s)L(s,\psi)L(s,\chi)L(s,\overline{\chi})$ pour $0 < s < 1$. Même en supposant que cette fonction zêta est négative ou nulle sur $]0,1[$, il en résulterait seulement (voir [2]) que l'on aurait

$$\operatorname{Res}_1(\zeta_{\mathbf{K}}) = L(1,\psi)|L(1,\chi)|^2 \geq \frac{2 + o(1)}{e\operatorname{Log}(d(\mathbf{K}))} = \frac{2 + o(1)}{e\operatorname{Log}(f_\psi f_\chi^2)} \geq \frac{2 + o(1)}{3e\operatorname{Log}(f_\chi)}\,.$$

D'après le Lemme C ci-dessous, nous en déduirions l'existence d'une constante effective $c > 0$ telle que pour tout tel caractère quartique nous ayons la minoration suivante :

$$|L(1,\chi)|^2 \geq \frac{c}{\operatorname{Log}(f_\psi)\operatorname{Log}(f_\chi)}\,.$$

Nous nous proposons de généraliser ce résultat sans hypothèse sur le signe de $\zeta_{\mathbf{K}}$ en prouvant

Théorème 2. *Il existe une constante effective $c > 0$ telle que pour tout caractère χ primitif non quadratique, d'ordre pair et tel que χ^2 soit de conducteur f'_χ divisant donc f_χ, nous ayons*

$$|L(1,\chi)| \geq \frac{c}{(\mathrm{Log}(f'_\chi))^{1/4}(\mathrm{Log}(f_\chi))^{3/4}}\,.$$

Si $f' = f'_\chi$ est fixé et si χ varie parmi les caractères primitifs non quadratiques d'ordre pair pour lesquels χ^2 est de conducteur f', alors nous avons

$$|L(1,\chi)|^{-1} = o(\mathrm{Log}(f_\chi))\,.$$

Plus précisément, sous ces hypothèses il existe une constante effective $c > 0$ telle que l'on ait

$$|L(1,\chi)| \geq \frac{c}{(\mathrm{Log}(f_\chi))^{\sqrt{2}/2}}\,.$$

La preuve de ce résultat découle des trois lemmes suivants. En effet, les Lemmes B et C, le choix $s_0 = 1 + 1/(c_1 \,\mathrm{Log}(f_\chi))$ et la majoration $\zeta(s_0) \leq s_0/(s_0-1)$ donnent la majoration

$$|L(1,\chi)|^{-1} \leq c_3 |L(s_0,\chi)|^{-1} \leq c_4 (\mathrm{Log}(f'_\chi))^{a_2/a_1} (\mathrm{Log}(f_\chi))^{1/(2a_1)}\,.$$

Pour obtenir le premier résultat qui dans tous les cas est un amendement de celui que nous connaissons déjà:

$$|L(1,\chi)|^{-1} \leq c_5 \,\mathrm{Log}(f_\chi)\,,$$

nous chercherons au Lemme D la plus grande valeur de $a_1 > 1/2$ telle que les hypothèses du Lemme B soient satisfaites avec de plus la contrainte $a_2/a_1 + 1/(2a_1) \leq 1$ (car $f'_\chi \leq f_\chi$ et peut lui être égal).

Pour obtenir à $f' = f'_\chi$ fixé un résultat optimal, nous chercherons au Lemme D la plus grande valeur de $a_1 > 1/2$ telle que les hypothèses du Lemme B soient satisfaites.

Lemme B. *Si $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$ sont deux réels tels que la fonction $f(x) = 4a_2x^2 + 2a_1x + 1 - 2a_2$ soit positive ou nulle sur $[-1,1]$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout caractère χ non quadratique et primitif nous ayons*

$$\zeta(s_0)|L(s_0,\chi)|^{2a_1}|L(s_0,\psi)|^{2a_2} \geq M, \quad s_0 > 1\,,$$

où ψ est le caractère pair non principal et primitif induisant χ^2.

Preuve. Partons du produit infini du terme gauche de cette inégalité à prouver. Pour chaque p premier, le facteur correspondant $F_p(s_0)$ de ce produit infini s'écrit

$$F_p(s_0) = \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^{s_0}} + O\left(\frac{1}{p^{2s_0}}\right)\right)^{-1},$$

où

$$\alpha_p = 1 + a_1(\chi(p) + \overline{\chi}(p)) + a_2(\psi(p) + \overline{\psi}(p)),$$

de sorte que si tous ces α_p sont positifs ou nuls, alors ce produit infini est minoré pour une constante $A > 0$ convenable par le produit infini

$$\varPi(s_0) = \Big(\prod_{p \le p_0} F_p(s_0)\Big) \cdot \Big(\prod_{p > p_0} \frac{1}{1 - A/p^{2s_0}}\Big),$$

où p_0 est par exemple choisi tel que $p \ge p_0$ implique $p^{2s_0} > 2A$ pour $s_0 \ge 1$.

Puisque ce second produit infini est absolument convergent pour $\Re(s_0) > 1/2$, il reste minoré par une constante strictement positive sur $s_0 \ge 1$. Puisque chaque $F_p(s_0)$ est minoré pour $s_0 \ge 1$ par

$$F_p(s_0) \ge \frac{1}{1 - 1/p^{s_0}} \left(\frac{1}{1 + 1/p^{s_0}}\right)^{2a_1 + 2a_2} \ge \left(\frac{p}{p+1}\right)^{2a_1 + 2a_2},$$

nous avons le résultat désiré.

Montrons donc finalement que chaque α_p est positif ou nul.

Si $\chi(p) = 0$, cela résulte de $\alpha_p \ge 1 - 2a_2 = f(0) \ge 0$.

Si $\chi(p) \ne 0$, alors en définissant θ_p par $\exp(2i\pi\theta_p) = \chi(p)$, en remarquant que $\psi(p) = \exp(4i\pi\theta_p)$ et en posant $x = \cos(2\pi\theta_p)$, cela résulte de $f(x) \ge 0$. ■

Lemme C (voir [4], Proposition 2). *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout caractère ψ primitif modulo f', pair et non principal nous ayons*

$$|L(s_0, \psi)| \le c \operatorname{Log}(f'), \quad s_0 \ge 1.$$

Lemme D. *La plus grande valeur de $a_1 > 1/2$ telle qu'il existe $a_2 > 0$ tel que $f(x) = 4a_2x^2 + 2a_1x + 1 - 2a_2$ soit positive ou nulle sur $[-1, 1]$ est $a_1 = 1/\sqrt{2}$ et on a alors $a_2 = 1/4$.*

La plus grande valeur de $a_1 > 1/2$ telle qu'il existe $a_2 > 0$ tel que $f(x) = 4a_2x^2 + 2a_1x + 1 - 2a_2$ soit positive ou nulle sur $[-1, 1]$ et tel que l'on ait $a_2/a_1 + 1/(2a_1) \le 1$ est $a_1 = 1/\sqrt{2}$ et on a alors $a_2 = 1/4$.

RÉFÉRENCES

[1] E. Landau, *Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Charakteren*, J. Reine Angew. Math. 157 (1927), 26–32.

[2] S. Louboutin, *Lower bounds for relative class numbers of CM-fields*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[3] S. Louboutin, *Minoration au point* 1 *des fonctions L et détermination des corps sextiques abéliens totalement imaginaires principaux*, Acta Arith. 62 (1992), 109–124.

[4] K. Uchida, *Imaginary abelian number fields of degree* 2^m *with class number one*, in: Proc. First Internat. Conf. on Class Numbers and Fundamental Units of Algebraic Number Fields, Katata 1986.

151, RUE DU CHÂTEAU DES RENTIERS
75013 PARIS, FRANCE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.F.R. SCIENCES
UNIVERSITÉ DE CAEN
ESPLANADE DE LA PAIX
14032 CAEN CEDEX, FRANCE
E-mail: LOUBOUTI@UNIV-CAEN.FR

Reçu par la Rédaction le 17.2.1993