COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXIII 1992 FASC. 2

THÉORÈME DE MINIMAX SANS TOPOLOGIE NI CONVEXITÉ

PAR

ANDRZEJ GRANAS (MONTRÉAL), JIN-RONG LEE (TAIPEI)
ET FON-CHE LIU (TAIPEI)

Dans cete note, nous présentons un théorème de minimax (Théorème A) formulé seulement en langage de la théorie des ensembles. Ce résultat permet de déduire de façon immédiate (en utilisant un lemme de topologie générale) plusieurs théorèmes de minimax bien connus.

Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. On désigne $\{f_x\}_{x\in X}$ et $\{f_y\}_{y\in Y}$ deux familles de fonctions numériques $f_x : Y \to \mathbb{R}$, $f_y : X \to \mathbb{R}$ où $f_x(y) = f(x,y)$, $f_y(x) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$. Dans la suite, on note

$$\Delta^{n-1} = \Big\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\Big\}$$

le simplexe standard de dimension $n-1$ et on pose $[n] = \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Une famille $H = \{h\}$ de fonctions numériques $h : Y \to \mathbb{R}$ est appelée *F-concave* (resp. *F-convexe*) si pour tout $h_1, \ldots, h_n \in H$ et tout $\lambda = (\lambda_i, \ldots, \lambda_n) \in \Delta^{n-1}$ il existe $h \in H$ tel que $h(y) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(y)$ (resp. $h(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(y)$) pour chaque $y \in Y$.

Nous partirons du lemme suivant qui nous servira dans la démonstration du théorème principal :

LEMME 1. *Soient X et Y deux ensembles non vides quelconques et $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Quels que soient $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ et $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$, l'inégalité de minimax suivante est vérifiée :*

$$\operatorname*{Inf}_{x\in X} \operatorname*{Max}_{j\in[m]} f(x, y_j) \leq \operatorname*{Sup}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{i\in[n]} g(x_i, y)\,.$$

(ii) *Quels que soient $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ et $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$, et $\varepsilon > 0$, il existe $\widehat{x} \in X$ et $\widehat{y} \in Y$ tels que*

$$f(\widehat{x}, y_j) \leq g(x_i, \widehat{y}) + \varepsilon$$

pour tout $i \in [n]$, $j \in [m]$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal :

THÉORÈME. *Soient X et Y deux ensembles non vides quelconques et $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que $f(x,y) \leq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$. Supposons en plus qu'au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite* :

(A)
- A1. *Etant donné $x_1, x_2 \in X$ et $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$ il existe $\widehat{x} \in X$ tel que*
$$f(\widehat{x}, y_j) \leq \tfrac{1}{2}[f(x_1, y_j) + f(x_2, y_j)]$$
pour tout $j \in [m]$.
- A2. *Etant donné $y_1, y_2 \in Y$ et $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ il existe $\widehat{y} \in Y$ tel que*
$$g(x_i, \widehat{y}) \geq \tfrac{1}{2}[g(x_i, y_1) + g(x_i, y_2)]$$
pour tout $i \in [n]$.

(B)
- B1. *La famille $\{f_x\}_{x \in X}$ est F-convexe.*
- B2. *La famille $\{g_y\}_{y \in Y}$ est F-concave.*

(C)
- C1. *X et Y sont convexes.*
- C2. *$x \to f(x,y)$ est convexe sur X pour tout $y \in Y$.*
- C3. *$y \to g(x,y)$ est concave sur Y pour tout $x \in X$.*

Alors, quels que soient $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ et $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$, l'inégalité suivante est vérifiée :
$$\operatorname*{Inf}_{x \in X} \operatorname*{Max}_{j \in [m]} f(x, y_j) \leq \operatorname*{Sup}_{y \in Y} \operatorname*{Min}_{i \in [n]} g(x_i, y).$$

Preuve. Evidemment, il est suffisant de démontrer le théorème dans le cas où (A) est vérifié. D'après le Lemme 1, il suffit de montrer que la propriété (ii) du lemme est vérifiée. Donnons-nous alors deux systèmes $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ et $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset Y$. Nous allons montrer qu'il existe $\widehat{x} \in X$ et $\widehat{y} \in Y$ tels que pour tout $i \in [n]$, $j \in [m]$ on a $f(\widehat{x}, y_j) \leq g(x_i, \widehat{y}) + \varepsilon$.

En effet, pour chaque $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta^{n-1}$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \Delta^{m-1}$ posons
$$G(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j).$$
Evidemment, la fonction $G : \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions du théorème de minimax de von Neumann. D'après ce théorème, on peut trouver $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_n) \in \Delta^{n-1}$ et $\widehat{\beta} = (\widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_m) \in \Delta^{m-1}$ tels que

(1) $$G(\widehat{\alpha}, \beta) \leq G(\alpha, \widehat{\beta}) \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}.$$

En utilisant (1) et la définition de G on obtient aisément

$$\operatorname*{Max}_{j\in[m]}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\alpha}_i f(x_i,y_j)\le \operatorname*{Min}_{i\in[n]}\sum_{j=1}^{m}\widehat{\beta}_j f(x_i,y_j)\le \operatorname*{Min}_{i\in[n]}\sum_{j=1}^{m}\widehat{\beta}_j g(x_i,y_j)\,. \tag{2}$$

Choisissons $\widetilde{\alpha}=(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_n)\in\Delta^{n-1}$, $\widetilde{\beta}=(\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_m)\in\Delta^{m-1}$ avec tous les $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_j$ rationnels dyadiques tels que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha}_i f(x_i,y_j)&\le\sum_{i=1}^{n}\widehat{\alpha}_i f(x_i,y_j)+\varepsilon/2\qquad\text{pour tout } j\in[m]\,,\\ \sum_{j=1}^{m}\widehat{\beta}_j g(x_i,y_j)&\le\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\beta}_j g(x_i,y_j)+\varepsilon/2\qquad\text{pout tout } i\in[n]\,.\end{aligned}\tag{3}$$

Par les hypothèses A1 et A2 il existe $\widehat{x}\in X$ et $\widehat{y}\in Y$ tels que

$$\begin{aligned}f(\widehat{x},y_j)&\le\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha}_i f(x_i,y_j)\qquad\text{pour tout } j\in[m]\,,\\ g(x_i,\widehat{y})&\ge\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\beta}_j g(x_i,y_j)\qquad\text{pour tout } i\in[n]\,.\end{aligned}\tag{4}$$

Cela étant, fixons arbitrairement $i\in[n]$ et $j\in[m]$. En utilisant (1)–(4) on obtient

$$\begin{aligned}f(\widehat{x},y_j)&\le\sum_{i=1}^{n}\widehat{\alpha}_i f(x_i,y_j)+\varepsilon/2\le\operatorname*{Max}_{j\in[m]}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\alpha}_i f(x_i,y_j)+\varepsilon/2\\ &\le\operatorname*{Min}_{i\in[n]}\sum_{j=1}^{m}\widehat{\beta}_j g(x_i,y_j)+\varepsilon/2\le\sum_{j=1}^{m}\widehat{\beta}_j g(x_i,y_j)+\varepsilon/2\\ &\le\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\beta}_j g(x_i,y_j)+\varepsilon\le g(x_i,\widehat{y})+\varepsilon\,.\end{aligned}$$

La preuve est complète.

Le lemme suivant nous servira à tirer les conséquences du théorème principal.

LEMME 2. *Soient X et Y deux espaces compacts non vides et f,g : $X\times Y\to\mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que :*

(a) $x\to f(x,y)$ *est semi-continue inférieurement sur X pour tout $y\in Y$;*

(b) $y\to g(x,y)$ *est semi-continue supérieurement sur Y pour tout $x\in X$.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(*)\qquad \begin{cases} \textit{Quels que soient } \{x_1,\ldots,x_n\}\subset X \textit{ et } \{y_1,\ldots,y_m\}\subset Y, \\ \textit{l'inégalité de minimax suivante est vérifiée} : \\ \qquad \operatorname*{Inf}_{x\in X}\operatorname*{Max}_{j\in[m]} f(x,y_j) \le \operatorname*{Sup}_{y\in Y}\operatorname*{Min}_{i\in[n]} g(x_i,y). \end{cases}$$

$$(**)\qquad \begin{cases} \textit{L'inégalité de minimax suivante est vérifiée} : \\ \qquad \operatorname*{Inf}_{x\in X}\operatorname*{Sup}_{y\in Y} f(x,y) \le \operatorname*{Sup}_{y\in Y}\operatorname*{Inf}_{x\in X} g(x,y). \end{cases}$$

En s'aidant du Lemme 2, on obtient, du théorème principal, les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. *Soient X et Y deux espaces compacts non vides et $f,g: X\times Y\to\mathbb{R}$ deux fonctions numériques telles que* :

(i) $f(x,y)\le g(x,y)$ *pour tout* $(x,y)\in X\times Y$;
(ii) $x\to f(x,y)$ *est semi-continue inférieurement sur X pour tout $y\in Y$*;
(iii) $y\to g(x,y)$ *est semi-continue supérieurement sur Y pour tout $x\in X$.*

Supposons en plus qu'au moins l'une des conditions (A), (B), (C) *du théorème est vérifiée. Alors*

$$\operatorname*{Inf}_{x}\operatorname*{Sup}_{y} f(x,y) \le \operatorname*{Sup}_{y}\operatorname*{Inf}_{x} g(x,y)\,.$$

COROLLAIRE 2 (Nikaidô–von Neumann). *Soient X et Y deux convexes compacts non vides et $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ une fonction numérique telle que* :

(i) $x\to f(x,y)$ *est semi-continue inférieurement et convexe sur X pour tout $y\in Y$ et*
(ii) $y\to f(x,y)$ *est semi-continue supérieurement et concave sur Y pour tout $x\in X$.*

Alors

$$\operatorname*{Inf}_{x}\operatorname*{Sup}_{y} f(x,y) = \operatorname*{Sup}_{y}\operatorname*{Inf}_{x} f(x,y)\,.$$

Andrzej Granas
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL, C.P. 6128
SUCCURSALE A, MONTRÉAL, P.Q.
CANADA H3C3J7

Fon-Che Liu
INSTITUTE OF MATHEMATICS
ACADEMIA SINICA
NANKANG, TAIPEI, 11529
REPUBLIC OF CHINA

Jin-Rong Lee
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY
TAIPEI, REPUBLIC OF CHINA

Reçu par la Rédaction le 14.6.1990