COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXIII 1992 FASC. 1

SUR LES OUVERTS DES CW-COMPLEXES ET LES FIBRÉS DE SERRE

PAR

ROBERT CAUTY (PARIS)

M. Steinberger et J. West ont prouvé dans [7] qu'un fibré de Serre $p : E \to B$ entre CW-complexes a la propriété de relèvement des homotopies par rapport aux k-espaces. Malheureusement, leur démonstration contient une légère erreur. Ils affirment que certains ensembles (notés U et $p^{-1}U \times U$) sont des CW-complexes car ce sont des ouverts de CW-complexes. Ceci est généralement faux, et notre premier objectif dans cette note est de donner des exemples d'ouverts de CW-complexes n'admettant aucune décomposition CW. Malgré cela, le théorème de Steinberger et West est vrai, et notre deuxième objectif est de montrer comment leur démonstration peut être rectifiée.

1. Décompositions CW des ouverts d'un CW-complexe. Il est connu que tout ouvert d'un complexe simplicial est triangulable. Dans cette section, nous étudions le problème analogue pour les CW-complexes : Si U est un ouvert d'un CW-complexe X, U admet-il une décomposition CW? Nous donnons deux exemples montrant que ce n'est en général pas le cas. Le premier est un complexe dénombrable de dimension deux, le deuxième un complexe de dimension trois ayant une cellule de dimension zéro, une de dimension deux et une de dimension trois. Ces exemples sont minimaux pour ce qui est de la dimension et de la finitude locale. En effet, si X est de dimension un, il est triangulable, donc U aussi; d'autre part, nous montrons ci-dessous que U est décomposable quand X est un complexe localement fini de dimension deux. Le lecteur désireux de se convaincre que la géométrie des CW-complexes diffère de celle des complexes simpliciaux pourra aussi consulter [6].

Nous ne ferons aucune distinction formelle entre un CW-complexe et l'espace topologique sous-jacent. Par une cellule d'un complexe, nous entendrons toujours une cellule ouverte.

Exemple 1. Soit $I = [0,1]$, et soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de $]0,1[$ dense dans I. Pour tout $n = 1,2,\ldots$, soit B_n^2 une copie du disque unité de

$\mathbb{R}^2$, de bord S^1_n, et soit $\varphi_n : S^1_n \to I$ l'application constante $\varphi_n(S^1_n) = x_n$. Soit X le complexe dénombrable de dimension deux obtenu en attachant B^2_n à I via φ_n pour $n = 1, 2, \ldots$ Soit $\psi_n : B^2_n \to X$ la projection correspondante. Notons $E_n = \psi_n(B^2_n \setminus S^1_n)$; la fermeture de E_n est donc $\psi_n(B^2_n) = E_n \cup \{x_n\}$. Pour tout n, soit a_n un point de E_n. Soit $A = \{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$; c'est un fermé de X. Notons U l'ouvert $X \setminus A$.

Affirmation. *U n'admet aucune décomposition CW.*

Supposons le contraire. Pour $0 \le i \le 2$, soit U^i le i-squelette de cette décomposition. Nous avons alors

(a) I est contenu dans U^1.

Car aucun point de I n'a dans X un voisinage homéomorphe à un disque ouvert.

(b) U^1 est connexe.

Car U est connexe.

(c) Pour tout $n \ge 1$, $U^1 \cap E_n \ne \emptyset$.

Supposons le contraire; alors $E_n \setminus \{a_n\} \subset U^2 \setminus U^1$. Soit e^2 une 2-cellule de U rencontrant $E_n \setminus \{a_n\}$. Puisque e^2 est ouverte dans $U^2 \setminus U^1$, $e^2 \cap (E_n \setminus \{a_n\})$ est ouvert dans $E_n \setminus \{a_n\}$, donc, par invariance du domaine, dans e^2. Puisque la fermeture de $E_n \setminus \{a_n\}$ dans U est égale à $\psi(B^2_n \setminus \{a_n\}) = (E_n \setminus \{a_n\}) \cup \{x_n\}$ et que $x_n \in U^1$, $e^2 \cap (E_n \setminus \{a_n\}) = e^2 \cap \psi(B^2_n \setminus \{a_n\})$ est fermé dans e^2. Par connexité, $e^2 = E_n \setminus \{a_n\}$, ce qui est absurde, $E_n \setminus \{a_n\}$ n'étant pas un disque ouvert.

(d) Pour tout $n \ge 1$, x_n appartient à U^0.

Puisque $U^1 \cap E_n \ne \emptyset$ et que U^1 est connexe, U^1 contient un arc simple J dont une extrémité est x_n et l'autre un point de E_n. Puisque la frontière de E_n est réduite à $\{x_n\}$, $J \setminus \{x_n\}$ est contenu dans E_n, donc l'ensemble $I \cup J$ est une triode de sommet x_n contenue dans U^1. Par suite, x_n n'a dans U^1 aucun voisinage homéomorphe à une 1-cellule, donc x_n appartient à U^0.

D'après (d), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est un fermé discret de U, contrairement au fait que cet ensemble est dense dans $I \subset U$.

Exemple 2. Soit Σ la 2-sphère qui est le bord du cube $[-1, 1] \times [0, 2]^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit L le sous-ensemble de Σ défini comme suit : $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$, où $L_0 = [-1, 1] \times \{0\} \times \{0\}$, et, pour $n \ge 1$, $L_n = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - 1/n)^2 = 1/n^2\}$. Soient $a = (-1, 0, 0)$ et $b = (1, 0, 0)$. Il est facile de construire une surjection continue h de $[-1, 1]$ sur L telle que $h^{-1}(a) = \{-1\}$ et $h^{-1}(b) = \{1\}$.

Soient B^3 la boule unité de $\mathbb{R}^3$, S^2 son bord et $\mathring{B}^3 = B^3 \setminus S^2$. Soit $\pi : S^2 \to [-1, 1]$ la projection $\pi(x, y, z) = z$, et soit $\varphi = h \circ \pi : S^2 \to L$;

c'est une surjection continue telle que $\varphi^{-1}(a) = \{(0,0,-1)\}$ et $\varphi^{-1}(b) = \{(0,0,1)\}$.

Σ peut être considérée comme un CW-complexe ayant une 0-cellule et une 2-cellule. Formons un complexe X de dimension trois en attachant B^3 à Σ via φ. Soit $\psi : B^3 \to X$ l'application caractéristique correspondante. Soient $K = \{0\} \times \{0\} \times [-1,1] \subset B^3$ et $A = \psi(K)$; A est un fermé de X tel que $A \cap \Sigma = \{a,b\}$. Soit U l'ouvert $X \setminus A$.

Affirmation. *U n'admet aucune décomposition CW.*

Supposons le contraire. Pour $0 \leq i \leq 3$, soit U^i le i-squelette de cette décomposition. Posons $\Sigma' = U \cap \Sigma = \Sigma \setminus \{a,b\}$ et $L' = L \setminus \{a,b\}$. Nous avons alors

(a) L' n'est pas triangulable.

Car aucun voisinage du point $(0,0,0)$ dans L n'est contractile (chaque tel voisinage peut être rétracté sur un cercle L_n, n grand).

(b) Σ' est contenu dans U^2.

Puisque U est localement une surface en tout point de $\Sigma' \setminus L'$, $\Sigma' \setminus L' \subset U^2$. Puisque U^2 est fermé dans U, il contient la fermeture Σ' de $\Sigma' \setminus L'$.

(c) Si une 2-cellule de U rencontre Σ', elle est contenue dans Σ'.

Soit e^2 une 2-cellule de U rencontrant Σ'. Alors e^2 est ouverte dans U^2, donc $e^2 \cap \Sigma'$ est ouvert dans Σ'. Par invariance du domaine, $e^2 \cap \Sigma'$ est ouvert dans e^2. Puisque Σ' est fermé dans U, $e^2 \cap \Sigma'$ est aussi fermé dans e^2, donc $e^2 \cap \Sigma' = e^2$.

(d) L' est contenu dans U^1.

Pour $-1 < t < 1$, soit C_t le cercle $S^2 \cap \pi^{-1}(t)$. Alors $\varphi(C_t)$ est un point de L' et nous devons prouver qu'il est dans U^1. Si nous paramétrons C_t de façon naturelle, nous obtenons un chemin fermé $s \rightsquigarrow C_t(s)$, $s \in I$, qui est essentiel dans $B^3 \setminus K$. Soit T un voisinage compact de C_t dans $B^3 \setminus K$. En utilisant le fait qu'aucun fermé de dimension un ne sépare localement $\mathbb{R}^3$, il est facile de construire une suite de chemins fermés $\omega_n : I \to B^3$ vérifiant

(1) $\omega_n(I) \subset (T \setminus S^2) \setminus U^1$.

(2) $d(\omega_n(s), C_t(s)) < 1/n$ quels que soient s et n (d est la distance euclidienne).

(3) ω_n est homotope à C_t dans $B^3 \setminus K$.

Alors, $\psi(\omega_n(I))$ rencontre U^2 car, dans le cas contraire, il serait contenu dans une 3-cellule e^3 de U, laquelle est contenue dans $\psi(\mathring{B}^3)$ d'après (b). Mais alors, $\omega_n = \psi^{-1} \circ (\psi \circ \omega_n)$ serait homotope à zéro dans $\psi^{-1}(e^3) \subset \mathring{B}^3 \setminus K$, contrairement à (3). Puisque $\psi(T)$ est compact, il ne rencontre qu'un nombre fini de cellules, donc, quitte à remplacer $\{\omega_n\}$ par une sous-suite, nous pouvons supposer l'existence d'une 2-cellule e^2 de U telle que $\psi(\omega_n(I)) \cap e^2 \neq \emptyset$ pour tout n. Si x_n est un point de $\psi(\omega_n(I)) \cap e^2$, la suite $\{x_n\}$ tend vers $\psi(C_t)$ d'après (2). Il résulte de (1) et (c) que e^2 est contenue dans $\psi(\mathring{B}^3)$, donc ne contient pas $\psi(C_t)$; par suite $\psi(C_t)$ appartient à $\overline{e}^2 \setminus e^2 \subset U^1$, d'où (d).

Il ne reste plus qu'à remarquer que (a) et (d) sont contradictoires car tout sous-ensemble fermé connexe d'un complexe de dimension un est triangulable.

PROPOSITION. *Si X est un CW-complexe localement fini de dimension deux, tout ouvert U de X admet une décomposition CW.*

Démonstration. Soient $(e_i)_{i\in J}$ les 2-cellules de X. Pour tout i dans J, soit B_i^2 une copie du disque unité de $\mathbb{R}^2$, de bord S_i^1, et soit $\psi_i : B_i^2 \to \overline{e}_i$ une application caractéristique pour e_i.

Il est facile de vérifier que si $(K_i)_{i\in J}$ est une famille localement finie de sous-ensembles fermés connexes d'un complexe K de dimension un, il existe une triangulation de K dont tous les K_i sont des sous-complexes. Nous pouvons donc trouver une triangulation X' de X^1 dont tous les ensembles $\overline{e}_i \setminus e_i$ sont des sous-complexes. Prenons une triangulation U' de $U \cap X^1$ dont chaque simplexe est contenu dans un simplexe de X'. Alors, pour tout i dans J, $U' \cap (\overline{e}_i \setminus e_i)$ est un sous-complexe de U'.

Il suffit de montrer que, pour i fixé, il est possible d'étendre, sans l'altérer, la décomposition U' de $U \cap X^1$ en une décomposition de $(U \cap X^1) \cup (U \cap \overline{e}_i)$. Soient $U_i = \psi_i^{-1}(U)$ et $O_i = S_i^1 \cap U_i$. Prenons une décomposition cellulaire de O_i telle que, pour tout sommet v de cette décomposition, $\psi_i(v)$ soit un sommet de U' (trois cas à distinguer pour la construire:

(a) $O_i = S_i^1$ et $\psi_i(S_i^1)$ est un point : trivial,

(b) $O_i = S_i^1$ et $\psi_i(S_i^1)$ contient plus d'un point; puisque $\psi_i(S_i^1)$ est un sous-complexe *simplicial* non trivial de U', il a au moins deux sommets distincts w_1 et w_2; prendre une décomposition *cellulaire* de S_i^1 ayant deux sommets v_1 et v_2 avec $v_j \in \psi_i^{-1}(w_j)$,

(c) $O_i \neq S_i^1$; la possibilité de décomposer une composante C de O_i résulte alors du fait que tout sous-ensemble connexe de $U \cap X^1$ dont la fermeture rencontre $X \setminus U$ contient une infinité de sommets de U').

Il est connu, et facile de vérifier, que toute décomposition CW du bord d'une surface peut se prolonger (sans subdiviser le bord) en une décomposition CW de cette surface. Nous pouvons donc étendre la décomposition de O_i construite ci-dessus en une décomposition CW de $\psi_i^{-1}(U_i)$ pour laquelle $\psi_i|O_i : O_i \to U'$ est cellulaire. Cette décomposition induit donc une décomposition de $\psi_i(U_i) = U_i \cap \overline{e}_i$, qui prolonge la décomposition U' de $U \cap X^1$.

2. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant, dont la partie (a) est le résultat de Steinberger–West cité dans l'introduction. Dans le cas particulier où E et B sont des complexes simpliciaux et B est localement fini, la partie (b) a été démontrée par J. E. Arnold [1].

THÉORÈME. *Soit* $p : E \to B$ *un fibré de Serre*, *où* E *et* B *sont des CW-complexes. Alors*

(a) p *a la propriété de relèvement des homotopies par rapport aux* k*-espaces.*

(b) *Si le produit* $E \times B$ *est un* k*-espace*, p *est un fibré de Hurewicz.*

Nous avons besoin de quelques préliminaires.

LEMME 1. *Si* U *est un ouvert d'un CW-complexe* X, *il existe un complexe simplicial* K *tel que* U *soit homéomorphe à un rétracte de* K.

Démonstration. Nous avons prouvé dans [3] que, pour tout CW-complexe X, il existe un complexe simplicial L et un plongement de X sur un sous-ensemble fermé de L qui est un rétracte de voisinage de L. Par suite, U est homéomorphe à un rétracte d'un ouvert de L, d'où le résultat puisque tout ouvert d'un complexe simplicial est triangulable.

Nous dirons qu'une application $p : E \to B$ *a la propriété de relèvement régulier des homotopies* par rapport à un espace X si, pour toute fonction $f : X \to B$ et toute homotopie $h : X \times I \to B$ telles que $p \circ f = h_0$, il existe une homotopie $H : X \times I \to E$ vérifiant (i) $p \circ H = h$, (ii) $H_0 = f$, et (iii) le chemin $t \rightsquigarrow H(x,t)$ est constant si, et seulement si, le chemin $t \rightsquigarrow h(x,t)$ l'est.

LEMME 2. *Soit* $p : E \to B$ *un fibré de Serre*, *et soit* X *un rétracte d'un complexe simplicial* K. *Alors*

(a) p *a la propriété de relèvement des homotopies par rapport à* X.

(b) *Si* B *est séparé*, p *a la propriété de relèvement régulier des homotopies par rapport à* X.

Démonstration. (a) Soient $f : X \to E$ et $h : X \times I \to B$ telles que $h_0 = p \circ f$. Soit $r : K \to X$ une rétraction, et soient $g = f \circ r : K \to E$ et $k = h \circ (r \times \mathrm{id}) : K \times I \to B$. Alors $p \circ g = k_0$, donc il existe $G : K \times I \to E$ telle que $G_0 = g$ et $p \circ G = k$. Alors $F = G|X \times I$ vérifie $p \circ F = h$ et $F_0 = f$.

(b) Si B est séparé et $h : I^n \times I \to B$ continue, alors $h(I^n \times I)$, image séparée d'un espace métrique compact, est métrique compact. Un raisonnement classique (voir par exemple [8]) montre alors que, pour tout relèvement f de h_0, il existe un relèvement régulier de h prolongeant f. La méthode habituelle de prolongement squelette par squelette montre que

p a la propriété de relèvement régulier des homotopies par rapport à tout complexe simplicial. Il suffit alors de répéter l'argument de (a).

Un espace topologique X est dit ULC s'il existe un voisinage V de la diagonale de $X \times X$ et une application continue $\lambda : V \times I \to X$ vérifiant

(i) $\lambda(x, y, 0) = x$ et $\lambda(x, y, 1) = y$ quel que soit $(x, y) \in V$,
(ii) $\lambda(x, x, t) = x$ quels que soient $x \in X$ et $t \in I$.

LEMME 3. *Tout CW-complexe X est ULC.*

Démonstration. Nous renvoyons à [4] pour la définition des termes utilisés dans cette démonstration. D'après [4], corollaire 2.4, X a la propriété d'extension locale par rapport aux espaces stratifiables. D'après [2], $X \times X \times I$ est stratifiable, donc, notant Δ la diagonale de $X \times X$, l'application $\mu : (X \times X \times \{0, 1\}) \cup (\Delta \times I) \to X$ définie par $\mu(x, y, 0) = x$, $\mu(x, y, 1) = y$ et $\mu(x, x, t) = x$ a un prolongement à un ouvert de $X \times X \times I$. Le lemme en résulte.

Démonstration du théorème. Puisque B est paracompact, il suffit (voir [5], chap. XX, th. 4.2) de construire, pour tout point b de B, un voisinage ouvert U de b et une fonction $\omega : U \times p^{-1}(U) \to E$, continue pour la topologie de k-espace associée à la topologie produit (ces deux topologies coïncident dans le cas (b)) et vérifiant

$$p \circ \omega(b, e) = b \text{ quel que soit } (b, e) \in U \times p^{-1}(U), \tag{1}$$

$$\omega(p(e), e) = e \text{ pour tout } e \in p^{-1}(U). \tag{2}$$

Le lemme 3 permet de trouver un voisinage ouvert U de x dans B et une fonction continue $\lambda : U \times U \times I \to B$ telle que $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$ et $\lambda(x, x, t) = x$ quels que soient x, y dans U et t dans I. La fonction $F : U \times p^{-1}(U) \times I \to B$ définie par $F(b, e, t) = \lambda(p(e), b, t)$ est continue, donc les lemmes 1 et 2 permettent de trouver un relèvement régulier $G : U \times p^{-1}(U) \times I \to E$, continu pour la topologie de k-espace associée à la topologie produit (à la différence de λ et F qui, elles, sont continues pour la topologie produit) et tel que $G(b, e, 0) = e$ quel que soit $(b, e) \in U \times p^{-1}(U)$. Il suffit de prendre $\omega(b, e) = G(b, e, 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. E. Arnold, Jr., *Local to global theorems in the theory of Hurewicz fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972), 179–188.
[2] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 1–16.
[3] R. Cauty, *Sur les sous-espaces des complexes simpliciaux*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 129–155.
[4] —, *Convexité topologique et prolongement des fonctions continues*, Compositio Math. 27 (1973), 233–271.

[5] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.
[6] W. Metzler, *Beispiele zur Unterteilungsfragen bei CW- und Simplizialkomplexen*, Arch. Math. (Basel) 18 (1967), 513–519.
[7] M. Steinberger and J. West, *Covering homotopy properties of maps between CW-complexes or ANR's*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), 573–577.
[8] P. Tulley, *On regularity in Hurewicz fibre spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965), 126–134.

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 6.4.1990