COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LXII 1991 FASC. I

SUR CERTAINS SOUS-GROUPES DE $\mathbb{R}$ LIÉS À LA SUITE DES FACTORIELLES

PAR

JEAN-PIERRE BOREL (LIMOGES)

§1. Présentation des résultats

1.1. Soit $U = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (au sens large), vers $+\infty$, d'entiers naturels. Si $\|y\|$ désigne la distance du nombre réel y à l'entier le plus proche, on peut associer à la suite U un sous-groupe de $\mathbb{R}$, en considérant

$$G(U) := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \|xu_n\| = 0\}\,.$$

Pour certains types particuliers de suites U, le sous-groupe $G(U)$ a des propriétés particulières, concernant sa taille (dénombrabilité, dimension de Hausdorff, etc...) : voir par exemple [EGG] et [ERD]. Dans tous les cas, c'est un sous-groupe mesurable de $\mathbb{R}$, donc de mesure nulle s'il est propre.

1.2. Soit $\mathcal{G}$ la famille de tous les sous-groupes de $\mathbb{R}$ de la forme $G(U)$ pour une certaine suite U. Dans [BOR], j'ai montré que tout sous-groupe dénombrable de $\mathbb{R}$, et contenant $\mathbb{Z}$, appartient à $\mathcal{G}$. Cependant, le "dénombrable" n'est pas négligeable par rapport à l'appartenance à $\mathcal{G}$. Plus précisément, si $\langle G, \xi\rangle$ désigne le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par $G \cup \{\xi\}$, nous obtenons :

THÉORÈME 1. *Il existe $G \in \mathcal{G}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $\langle G, \xi\rangle \notin \mathcal{G}$.*

1.3. Il est possible de préciser le rôle des opérations usuelles sur les groupes vis-à-vis de $\mathcal{G}$. Par exemple, $\mathcal{G}$ est clairement stable par intersection finie. Il n'est cependant pas stable pour l'addition des sous-groupes : en effet, $\langle G, \xi\rangle = G + \langle \xi\rangle$, et $\langle \xi\rangle \in \mathcal{G}$ d'après [BOR]. Le théorème 1 fournit donc un contre-exemple à cette propriété.

1.4. $\mathcal{G}$ permet de définir une opération sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{R}$, par

$$\overline{G} := \bigcap G'\,,$$

intersection portant sur tous les $G' \in \mathcal{G}$ qui contiennent G. Les propriétés suivantes sont immédiates:

$$G_1 \subset G_2 \;\Rightarrow\; \overline{G}_1 \subset \overline{G}_2\,, \quad G \in \mathcal{G} \;\Rightarrow\; \overline{G} = G, \quad \overline{\overline{G}} = \overline{G}\,.$$

Théorème 2. *Il existe un sous-groupe G de $\mathbb{R}$ tel que $\overline{G} \notin \mathcal{G}$, $\overline{G} \neq \mathbb{R}$.*

Cela entraîne en particulier que $\mathcal{G}$ n'est pas stable par inclusion.

1.5. Les éléments de $\mathcal{G}$ sont des sous-groupes saturés de $\mathbb{R}$ (voir [MEL1] pour la définition de cette propriété). En effet, si μ est une probabilité concentrée sur $G(U)$, $\mu(u_n)$ tend vers 1. La non stabilité de $\mathcal{G}$ par inclusion entraîne qu'il existe des sous-groupes saturés de $\mathbb{R}$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{G}$ (un sous-groupe d'un groupe saturé est lui aussi saturé, ce qui est immédiat à montrer).

1.6. Enfin, il peut être noté que $\mathcal{G}$ n'a pas d'élément maximal. Plus précisément, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $G \in \mathcal{G}$, le sous-groupe $\overline{\langle G, \xi\rangle}$ est propre. Si $G = G(U)$, il suffit de prendre une sous-suite u_k telle que $u_k\xi$ a une limite modulo 1. Soit V la suite croissante des $u_{k'} - u_k$ (ces termes étant consécutifs dans la sous-suite); on a alors $\langle G, \xi\rangle \subset G(V)$.

§2. Groupes contenant $G((n!))$

2.1. Dans toute la suite, G_1 désignera le sous-groupe $G((n!))$. Tout nombre réel x s'écrit, de façon unique, sous la forme

$$x = [x] + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p}{(p+1)!}, \qquad 0 \le b_p \le p,\ b_p \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

avec la condition $b_p \neq p$ pour une infinité de valeurs de p. On a alors

$$x \in G_1 \iff \min\{b_p, p - b_p\} = o(p)\,. \tag{2}$$

Il est cependant plus utile ici de considérer l'écriture liée au choix de l'entier le plus proche (et de $[x]$ si $\{x\} = 1/2$) plutôt qu'à la partie entière. D'où une écriture de la forme

$$x = \text{entier} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{(p+1)!}, \qquad |a_p| \le \frac{p+1}{2},\ a_p \in \mathbb{Z}\,. \tag{3}$$

Sous cette forme, il n'y a plus unicité. Cela ne pose pas de problème pour la suite, dans la mesure où l'unicité d'une telle écriture n'intervient pas. On a alors

$$x \in G_1 \iff a_p = o(p)\,. \tag{4}$$

2.2. Le résultat qui est à la base de ce travail est une caractérisation des suites U telles que $G(U)$ contienne G_1. Pour cela, on remarque que tout nombre entier u peut s'écrire

$$u = \sum_{k=1}^{K} r_k k!\,, \qquad |r_k| \le \frac{k+1}{2},\ r_k \in \mathbb{Z},\ r_K > 0, \tag{5}$$

écriture qui n'est pas en général unique.

PROPOSITION 1. *Soit U une suite telle que $G_1 \subset G(U)$. Alors il existe une suite $j = j(n)$ bornée par J, telle que l'on peut écrire*

$$u_n = k_{j,n}! \pm k_{j-1,n}! \pm \ldots \pm k_{1,n}! \quad \textit{avec} \tag{6}$$

$$k_{1,n} \leq \ldots \leq k_{j,n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} k_{1,n} = +\infty\,. \tag{7}$$

Cela donne donc une caractérisation des suites U telles que $G_1 \subset G(U)$. En effet, si u_n a la forme donnée en (6) et si x est écrit sous la forme (3), on a

$$\|xu_n\| \leq \sum_{i=1}^{j} \|xk_{i,n}!\| \leq \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{a_{k_{i,n}}}{k_{i,n}+1} + o(1)\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{a_{k_{i,n}}}{k_{i,n}+1}\right) + o(1)\,,$$

qui tend vers 0 lorsque $x \in G_1$, d'après (4), puisque les $k_{i,n}$ tendent vers $+\infty$ et j est borné. Une première version de ce résultat, sous une forme incomplète, est parue dans [BOR].

2.3. Démonstration de la proposition. On écrit u_n sous la forme (5), c'est-à-dire

$$u_n = \sum_{k=1}^{K_n} r_{k,n}\, k!\,, \qquad |r_{k,n}| \leq \frac{k+1}{2}\,.$$

Il s'agit alors de montrer que si les conditions (7) ne sont pas satisfaites, alors il existe x appartenant à G_1, mais pas à $G(U)$.

Cas 1. On suppose qu'il existe une suite $k = k(n) \leq K_n$ telle que $\overline{\lim}_{n\to\infty} |r_{k,n}| = +\infty$. En prenant une sous-suite de U (ce qui grossit le sous-groupe $G(U)$, donc ne pose pas de problème pour la démonstration), on peut supposer que l'on travaille avec une suite telle que k croît avec n, ainsi que $r_{k,n}$, et $k(n) \geq K_{n-1} + 2$.

On construit alors une suite d'entiers a_p de proche en proche, en partant de $a_p = 0$ pour $p \leq K_0$. Supposons a_p connu pour $p \leq K_{n-1}$, ce qui détermine donc le nombre réel

$$x_{n-1} := \sum_{p \leq K_{n-1}} \frac{a_p}{(p+1)!}\,. \tag{8}$$

Trois sous-cas sont alors à étudier :

(i) Si $\|x_{n-1}u_n\| \geq 1/4$, on pose $a_p = 0$ pour $K_{n-1} + 1 \leq p \leq K_n$ (il est à noter que u_n croît avec n, donc aussi K_n).

(ii) Si $0 \leq \{x_{n-1}u_n\} < 1/4$, on pose $a_p = 0$ pour $K_{n-1} + 1 \leq p \leq K_n$, $p \neq k = k(n)$. D'autre part, $|r_{k,n}|/(k+1) < 1/2$, et il existe donc un entier m tel que

$$\{x_{n-1}u_n\} + m\frac{|r_{k,n}|}{k+1} \in [1/4, 3/4]\,. \tag{9}$$

On choisit alors m minimal vérifiant (9), et on pose $a_k := m \operatorname{sgn} r_{k,n}$. On a alors

$$\begin{aligned} x_n u_n &= x_{n-1}u_n + \frac{a_k}{(k+1)!}\sum_{p=1}^{K_n} r_{p,n}\,p! \\ &= x_{n-1}u_n + \frac{a_k r_{k,n}}{k+1} + \frac{a_k}{(k+1)!}\sum_{p=1}^{K_{n-1}} r_{p,n}\,p!\,, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$x_n u_n = x_{n-1}u_n + m\frac{|r_{k,n}|}{k+1} + \frac{a_k}{(k+1)!}\sum_{p=1}^{K_{n-1}} r_{p,n}\,p!\,.$$

Or on a les majorations suivantes :

$$\sum_{p=1}^{K_{n-1}} r_{p,n}p! \le \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{K_{n-1}} (p+1)! \le (K_{n-1}+1)!\,,$$

$$\begin{aligned} \frac{|a_k|}{(k+1)!} &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{m}{k+1} \le \frac{1}{k!|r_{k,n}|}\left(\frac{3}{4} - \{x_{n-1}u_n\}\right) \le \frac{1}{2k!|r_{k,n}|} \le \frac{1}{2k!} \\ &\le \frac{1}{2(K_{n-1}+2)!}\,, \end{aligned}$$

ce qui entraîne donc

$$\{x_n u_n\} \in [1/4 - \varepsilon_n, 1/4 + \varepsilon_n] \qquad \text{avec } \varepsilon_n = \frac{1}{2(K_{n-1}+2)}\,.$$

(iii) Si $3/4 < \{x_{n-1}u_n\} < 1$, le raisonnement est analogue à (ii), le seul changement concerne l'entier m : les entiers vérifiant (9) sont ici négatifs, et on prend m maximal vérifiant (9). Le reste est sans changement, en particulier l'encadrement de $\{x_n u_n\}$.

On a donc défini une suite infinie $(a_p)_{p\ge 0}$. Les seuls a_p non nuls correspondent à $p = k = k(n)$ nécessairement, et on a alors

$$a_p = a_k = O\left((k+1)/|r_{k,n}|\right) = o(k+1)$$

puisque $|r_{k,n}|$ tend vers $+\infty$. Cela permet donc de définir un nombre réel x par

$$x := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{(p+1)!}\,, \tag{10}$$

et $x \in G_1$, d'après (4). D'autre part, pour tout entier n, on a

$$x u_n = x_n u_n + \left(\sum_{p=K_n+2}^{\infty} \frac{a_p}{(p+1)!}\right)u_n \qquad \text{car } k(n+1) \ge K_n + 2$$

$$= x_n u_n + O\left(\frac{1}{(K_n+2)!}(K_n+1)!\right) = x_n u_n + o(1)\,.$$

Comme $\|x_n u_n\|$ ne tend pas vers 0, il en est de même pour $\|x u_n\|$. Donc $x \notin G(U)$, et la conclusion dans ce cas.

Cas 2. Les $|r_{k,n}|$ sont bornés par R, et $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K_n} |r_{k,n}| = +\infty$. On peut extraire de U une sous-suite U' telle que K'_n (associé à u'_n) croisse avec n et telle que

$$\sum_{k=K'_{n-1}+1}^{K'_n} |r'_{k,n}| \geq 3n + 2R\,, \tag{11}$$

puis de U' une nouvelle suite U'' telle que $K''_n \geq n^2$. La propriété (11) reste donc valable pour U''.

Comme dans le cas 1, remplaçons U par U'', notée maintenant U (cela n'est pas gênant pour la démonstration). On a alors $K_n \geq n^2$, et il existe un ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n = \{k_1, \ldots, k_m\}$ avec $m = m(n)$, tel que

$$\begin{gathered} K_{n-1} + 3 \leq k_1, \quad k_i + 3 \leq k_{i+1} \ (1 \leq i \leq m-1)\,, \quad k_m \leq K_n\,, \\ \forall k \in \mathcal{K},\ r_{k,n} \neq 0, \quad \sum_{k\in\mathcal{K}} |r_{k,n}| \geq n\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Cette dernière propriété entraîne donc $n/R \leq m$. On peut de plus supposer que $m \leq n$, en remplaçant au besoin $\mathcal{K}$ par un sous-ensemble adapté. Les propriétés (12) sont alors encore vérifiées. Comme dans le cas 1, on cherche à construire de proche en proche une suite d'entiers a_p.

On choisit encore $a_p = 0$ si $p \leq K_0$.

Supposons maintenant a_p connu pour $p \leq K_{n-1}$, et x_{n-1} défini par (8). Les mêmes trois sous-cas apparaissent.

(i) Si $\|x_{n-1}u_n\| \geq 1/4$, on pose $a_p = 0$ pour $K_{n-1} + 1 \leq p \leq K_n$.

(ii) Si $0 \leq \{x_{n-1}u_n\} < 1/4$, on pose

$$a_p = \begin{cases} \left[\dfrac{p+1}{2mr_{p,n}}\right] & \text{si } p \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_n, \\ 0 & \text{si } p \notin \mathcal{K} \text{ et } K_{n-1}+1 \leq p \leq K_n, \end{cases}$$

ce qui donne $x_n u_n = x_{n-1}u_{n-1} + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ avec

$$\Sigma_1 := \sum_{k\in\mathcal{K}} \left[\frac{k+1}{2mr_{k,n}}\right] \frac{r_{k,n}}{k+1}, \qquad \Sigma_2 := \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\left[\frac{k+1}{2mr_{k,n}}\right] \frac{1}{(k+1)!} \sum_{p<k} r_{p,n}\, p!\right),$$

$$\Sigma_3 := \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\left[\frac{k+1}{2mr_{k,n}}\right] \sum_{p>k} r_{p,n} \frac{p!}{(k+1)!}\right).$$

Il est clair que Σ_3 est un nombre entier, et que l'on a

$$|\Sigma_2| \le \frac{R}{2m}\sum_{k\in\mathcal{K}}\left(\frac{1}{k!}\sum_{p<k}p!\right) \ll \frac{1}{m}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{k} \le \frac{1}{K_{n-1}+3} = o(1)\,,$$

$$\left|\Sigma_1 - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{k\in\mathcal{K}}\left\{\frac{k+1}{2mr_{k,n}}\right\}\frac{r_{k,n}}{k+1}\right| \le R\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{k} \ll \frac{m}{K_{n-1}} \le \frac{n}{K_{n-1}} = o(1)\,.$$

Cela entraîne donc $\{x_n u_n\} = \{x_{n-1}u_n\} + 1/2 + o(1)$ et donc, pour n assez grand,

$$\|x_n u_n\| \ge 1/5\,. \tag{13}$$

(iii) Si $3/4 < \{x_{n-1}u_n\} < 1$, la méthode est analogue, en posant cette fois $a_p = -\left[\frac{p+1}{2mr_{p,n}}\right]$ lorsque $p \in \mathcal{K}$.

La minoration (13) est ici aussi valable pour n assez grand.

Comme m tend vers $+\infty$ avec n $(m \ge n/R)$, $a_p = o(p)$ dans tous les cas. Comme dans le cas 1, (10) définit donc un nombre réel x qui appartient à G_1.

D'autre part, deux a_p consécutifs non nuls ont des indices qui diffèrent au moins de 3. Comme dans le cas 1, on a donc

$$xu_n = x_n u_n + o(1)\,,$$

et comme $\|x_n u_n\|$ ne tend pas vers $0, x \notin G(U)$.

2.4. Donc, si $G_1 \subset G(U)\,, u_n$ s'écrit sous la forme (6), avec j borné. Il reste donc à démontrer que $k_{1,n}$ tend vers $+\infty$ avec n. Cela se démontre par récurrence sur $J = \max(j(n))$.

Si $J = 1$, le résultat est clair puisque $k_{1,n}! = u_n$ tend vers $+\infty$.

Si $J \ge 2$, on pose

$$u'_n = \begin{cases} u_n & \text{si } j(n) = 1,\\ |u_n - k_{j,n}!| & \text{si } j(n) \ge 2.\end{cases}$$

La suite U' ainsi construite vérifie donc $J' = J - 1$. Comme u_n tend vers $+\infty$, il en est de même pour $k_{j,n}!$, donc pour $k_{j,n}$. On a donc

$$\left.\begin{aligned} x \in G_1 &\Rightarrow \lim \|xu_n\| = 0\\ x \in G_1 &\Rightarrow \lim \|xk_{j,n}!\| = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim \|xu'_n\| = 0\,.$$

Donc u'_n tend vers $+\infty$ (sinon $G(U')$ est au plus dénombrable, alors que G_1 ne l'est pas d'après (2) ou (4)); on peut la réordonner pour la rendre croissante et en conservant la propriété $G_1 \subset G(U')$. Donc par hypothèse de récurrence, $k'_{1,n}$ tend vers $+\infty$. La suite des $k'_{1,n}$ étant la suite des $k_{1,n}$ à l'ordre près, on obtient donc bien

$$\lim_{n\to\infty} k_{1,n} = +\infty\,.$$

Cela termine la preuve de la proposition. ■

2.5. Il est possible d'améliorer ce résultat, en construisant dans les cas 1 et 2 un nombre réel $x \notin G(U)$, et tel que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} (a_p/p)^2$$

converge : pour cela, il suffit de prendre beaucoup plus de a_p nuls, de façon à assurer la convergence de la série, et en passant une infinité de fois par les cas (i), (ii) on (iii), ce qui assure alors que $\|xu_n\|$ ne tend pas vers 0. Si on note H_1 le sous-groupe de $\mathbb{R}$ formé par tous les nombres réels x tels que la série de terme général $\|xn!\|^2$ converge, cela se traduit donc par le résultat suivant, plus fort que la proposition 1 :

PROPOSITION 2. *Soit U une suite telle que $H_1 \subset G(U)$. Alors on peut écrire u_n sous la forme* (6), *avec j borné, et les conditions* (7) *étant satisfaites.*

H_1 est un sous-groupe de type $\mathcal{H}_2$, introduit par Méla, [MEL2]. Ces sous-groupes sont saturés, ce qui donne donc un exemple de sous-groupe saturé qui n'appartient pas à $\mathcal{G}$: en effet, $\overline{H}_1 = G_1$ d'après la proposition 2, et $H_1 \neq G_1$. Donc $H_1 \notin \mathcal{G}$.

§3. Applications

3.1. Revenons au développement donné en (1). Dans ce qui suit, $\lim^*$ signifie limite lorsque l'on considère les quantités comme éléments du tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La propriété (2) s'écrit

$$G_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty}{}^{*}\, b_n/n = 0\right\}.$$

Dans ce qui suit, je considérerai:

- le sous-groupe de $\mathbb{R}$, $G_2 := \{x \in \mathbb{R} : \lim^*_{n\to\infty} b_n/n \text{ existe}\}$;
- les suites $U^{(q)}$, $q \geq 1$ entier fixé, suites croissantes de tous les entiers de la forme soit $qn!$, soit $n! - (n-1)!$, n parcourant $\mathbb{N}$;
- les nombres réels $\zeta_c := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[nc]}{(n+1)!}$, avec $0 < c < 1$.

3.2. Soit G_c le sous-groupe $\langle G_1, \zeta_c\rangle$ engendré par $G_1 \cup \{\zeta_c\}$.

PROPOSITION 3. *Si c est rationnel, soit $c = p/q$ avec $(p,q) = 1$, alors $G_c = G(U^{(q)})$; si c est irrationnel, $\overline{G}_c = G_2$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons $c = p/q$. On a alors

$$\|qn!\zeta_c\| = \left\| \frac{q}{n}\left[n\frac{p}{q}\right] + o(1) \right\| = \|p + o(1)\| = o(1)$$

et

$$\|n!\zeta_c - (n-1)!\zeta_c\| = \left\|\frac{p}{q} + o(1) - \frac{p}{q} + o(1)\right\| = o(1)\,,$$

ce qui entraîne $\zeta_c \in G(U^{(q)})$ et donc $G_c \subset G(U^{(q)})$.

Soit maintenant x un élément de $G(U^{(q)})$, et considérons le développement de x donné en (1). Alors $\|qn!x\|$ tend vers 0, c'est-à-dire que qb_n/n tend vers 0 dans le tore. On peut donc écrire

$$qb_n = ni_n + n\varepsilon_n \qquad \text{avec } i_n \in \mathbb{N} \text{ et } \varepsilon_n \text{ tendant vers } 0\,.$$

On a donc

$$o(1) = \|n!x - (n-1)!x\| = \frac{i_n + \varepsilon_n}{q} - \frac{i_{n-1} + \varepsilon_{n-1}}{q} + o(1)\,,$$

d'où $i_n - i_{n-1} = o(1)$, c'est-à-dire que la suite (i_n) est stationnaire. Donc $i_n = i$ pour $n \ge n_0 \ge q$, et si p^* est un inverse de p modulo q, on a

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{[np/q]}{n} = \frac{p}{q}, \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{b_n}{n} = \frac{i}{q}\,,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \frac{b_n - ip^*[np/q]}{n} = 0\,. \tag{14}$$

Si on pose $a_n = b_n - ip^*[np/q]$, la condition $|a_n| \ll n$ et la propriété (14) entraînent que la série $\sum a_n/(n+1)!$ appartient à G_1. Donc $x - ip^*\zeta_c \in G_1$, et $x \in G_c$.

Supposons maintenant c irrationnel. Si $G(U)$ contient G_c, u_n a la forme donnée par la proposition 1. D'autre part, $\|\zeta_c u_n\|$ tend vers 0. On a donc, en reprenant les notations (6) de la proposition 1,

$$\|k_{i,n}\zeta_c\| = c + o(1)$$

(d'après la forme de ζ_c, et car $k_{i,n}$ croît vers $+\infty$), d'où, dans le tore,

$$o(1) = \zeta_c u_n \equiv \sum_{i=1}^{j(n)} \pm k_{j,n}!\zeta_c \equiv \Big(\sum_{i=1}^{j(n)} \pm c\Big) + o(1)$$

car j est borné. Puisque c est irrationnel, cela n'est possible que si, pour n assez grand, on a

$$\sum_{i=1}^{j(n)} \pm 1 = 0\,, \tag{15}$$

les $\pm$ étant les signes intervenant dans (6). Si on prend $x \in G_2 - G_1$, et si on considère son développement donné par (1), on a dans le tore

$$xn! \equiv b_n/n + o(1) = \ell + o(1) \qquad \text{avec } \ell = \lim{}^{*}\, b_n/n \in\,]0,1[\,,$$

d'où

$$xu_n \equiv \sum_{i=1}^{j(n)} (\pm\ell + o(1)) = o(1)$$

car j est borné. Donc $x \in G(U)$. On a donc montré que $G_2 \subset G(U)$, d'où $G_2 \subset \overline{G}_c$.

Il reste à montrer l'inclusion inverse.

LEMME. $\overline{G}_2 = G_2$.

Démonstration. Soit $y \notin G_2$, et (b_n) son développement associé donné en (1). Alors b_n/n n'a pas de limite dans le tore, donc il existe deux suites disjointes $n_1 = n_1(k)$ et $n_2 = n_2(k)$ telles que

$$0 \le \ell_1 = \lim_{k\to\infty}{}^* \, b_{n_1(k)}/n_1(k) < \ell_2 = \lim_{k\to\infty}{}^* \, b_{n_2(k)}/n_2(k) < 1\,.$$

Pour k donné, soit $k' = k'(k)$ le plus petit indice tel que $n_2(k') \ge n_1(k) + 1$. Soit U la suite croissante de tous les entiers $n_2(k')! - n_1(k)!$, k décrivant $\mathbb{N}$. Alors U croît vers $+\infty$, et on a

$$\begin{aligned} &G_2 \subset G(U) &&\text{car } n_2(k') \text{ et } n_1(k) \text{ tendent vers } +\infty \text{ avec } k\,;\\ &y \notin G(U) &&\text{car } \lim_{m\to\infty} \|yu_m\| = \ell_2 - \ell_1 > 0\,. \end{aligned}$$

Donc $y \notin \overline{G}_2$. Cela montre donc que $\overline{G}_2 \subset G_2$, d'où l'égalité $\overline{G}_2 = G_2$. ∎

Mais il est clair que $\zeta_c \in G_2$, donc $G_c \subset G_2$, d'où la même inclusion pour leur adhérences : $\overline{G}_c \subset \overline{G}_2 = G_2$. Cela termine la démonstration de la proposition 3. ∎

3.3. Lorsque c est irrationnel, l'adhérence de G_c est bien plus grosse que G_c. Plus précisément, on a

$$G_2/G_c \simeq \mathbb{R}/\langle 1, c\rangle\,.$$

PROPOSITION 4. $G_2 \notin \mathcal{G}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite U telle que $G(U) = G_2$. Donc $G(U)$ contient G_1, et U peut s'écrire sous la forme (6). On peut alors construire de proche en proche une suite d'entiers p_m, comme suit : $p_0 = 0$; si p_m est connu, p_{m+1} est construit de la façon suivante : puisque $k_{1,n'}$ tend vers $+\infty$ avec n', il existe n minimal tel que

$$\forall n' \ge n\,, \qquad k_{1,n'} \ge p_m\,,$$

et on pose alors $p_{m+1} = k_{j,n} + 1$.

Pour tout entier n, l'intervalle $[k_{1,n}, k_{j,n}]$ rencontre au plus deux intervalles $[p_m, p_{m+1}]$, alors nécessairement consécutifs. Posons

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} \qquad \text{avec } a_n = n\{\operatorname{Log} m\} \text{ pour } p_m < n \le p_{m+1}\,.$$

Il est clair que $x \notin G_2$, puisque $\{\operatorname{Log} m\}$ n'a pas de limite.

D'autre part, lorsque n tend vers $+\infty$, on a dans le tore

$$xu_n \equiv \sum_{i=1}^{j} \pm \frac{a_{k_{i,n}}}{k_{i,n}} + o(1) \equiv \sum_{i=1}^{j} \pm \operatorname{Log} m_{i,n} + o(1)\,.$$

D'après la construction des a_n, $m_{i,n}$ prend pour n fixé au plus deux valeurs, soit m_n et $m_n + 1$. D'où

$$xu_n \equiv \sum_{i=1}^{j} \pm \operatorname{Log} m_n + O(J \operatorname{Log}(1 + 1/m_n)) + o(1)\,.$$

Comme m_n tend vers $+\infty$, le terme en O est un $o(1)$. De plus, $G(U)$ contient G_2, et donc en utilisant (15), on a

$$\sum_{i=1}^{j} \pm \operatorname{Log} m_n = (\operatorname{Log} m_n) \sum_{i=1}^{j} \pm 1 = 0\,.$$

Donc $x \in G(U)$, et $G_2 \neq G(U)$. ■

3.4. Les théorèmes 1 et 2 se déduisent immédiatement des propositions 3 et 4, qui entraînent respectivement $\langle G_1, \zeta_{\sqrt{2}-1}\rangle \notin \mathcal{G}$ et $\overline{\langle G_1, \zeta_{\sqrt{2}-1}\rangle} \notin \mathcal{G}$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[BOR] J.-P. Borel, *Sous-groupes de $\mathbb{R}$ liés à la répartition modulo 1 de suites*, Ann. Fac. Sci. Toulouse 5 (1983), 218–235.

[EGG] E. H. Eggleston, *Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory*, Proc. London Math. Soc. (2) 54 (1952), 42–93.

[ERD] P. Erdős and S. J. Taylor, *On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences*, ibid. 7 (1957), 598–615.

[MEL1] J.-F. Méla, *Groupes de valeurs propres des systèmes dynamiques et sous-groupes saturés du cercle*, C. R. Acad. Sci. Paris 296 (1983), 419–422.

[MEL2] —, *Sous-groupes remarquables du cercle en analyse harmonique et en théorie ergodique*, Groupe de travail de théorie ergodique, CIRM Luminy, septembre 1988.

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE LIMOGES
123, AVENUE ALBERT THOMAS
F-87060 LIMOGES CEDEX
FRANCE

Reçu par la Rédaction le 16.3.1990