fermés sans point commun *dans une même classe* $f^{-1}(x)$ suivant $R$, on peut les séparer *dans* $G$ par deux ensembles ouverts.

*TRAVAUX CITÉS*

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chapitres I-II, Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1142, Paris 1951.

[2] — *Topologie générale*, chapitre IX, ibidem, n° 1045, Paris 1948.

[3] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 54 (1948), p. 977-982.

*Reçu par la Rédaction le 3. 10. 1957*

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

# *SUR DEUX PROBLÈMES D'ANALYSE NON RÉSOLUS*

PAR

M. FRÉCHET (PARIS)

## *PREMIER PROBLÈME*

Nous donnerons plus loin la signification de la propriété de deux ensembles $A$, $B$ symbolisée par la notation

$$dA = dB. \tag{1}$$

Le premier problème que nous proposons tire son origine de l'ensemble des deux théorèmes suivants, l'un démontré par nous, l'autre prouvé par Banach et faisant tous deux intervenir une ou plusieurs relations du type (1).

1° Un grand nombre des espaces les plus importants considérés en Analyse classique (les espaces $C$, $L_2$, ...) sont tels que

$$dC = dL_2 = \ldots \text{(}^1\text{)} \tag{2}$$

2° Quand (1) est vérifié, ou bien $A$ et $B$ sont homéomorphes, ou bien ils peuvent être décomposés en deux ensembles disjoints $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, de sorte que $A_k$ et $B_k$ soient homéomorphes ($k = 1, 2$).

Ceci étant, l'importance des espaces figurant dans la relation (2) incite à poser les questions suivantes (**P 234**), si l'on considère deux quelconques de ces espaces, *par exemple* $C$ et $L_2$,

I. $C$ et $L_2$ sont-ils homéomorphes? Et dans ce cas, préciser l'une des homéomorphies possibles.

II. Quand $C$ et $L_2$ ne sont pas homéomorphes, préciser une décomposition de $C$ et $L_2$, faites d'après 2° et indiquer explicitement les homéomorphies correspondantes.

(1) On trouvera une liste (non limitative) d'espaces importants $B$ tels que $dB = dC$, soit dans notre communication au Congrès International des Mathématiciens de Toronto en 1924, soit à la fin de notre récent ouvrage [3]. En particulier, $L_2$ est l'espace de Hilbert, $C$ est l'espace des fonctions réelles $f(x)$ continues sur $(0, 1)$, en y prenant pour norme de $f(x)$ le maximum de $|f(x)|$ sur $(0, 1)$.

**Signification de la relation** (1). On emploie généralement une définition du nombre de dimensions esquissée par Poincaré, précisée par Brouwer, explicitée et étudiée par Urysohn et Karl Menger. Ce nombre de dimensions est un nombre entier $\geqslant 0$.

Antérieurement à tous ces auteurs, nous avions proposé en 1909, la première définition du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait. Nous en avons poursuivi l'étude en 1924. Notre définition, tout à fait différente de celle qui l'a suivie, est extrêmement simple. Pour les distinguer, nous dirons que nous avons défini un *type* de dimension.

Soient $A$ et $B$ deux ensembles appartenant respectivement à deux espaces topologiques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, distincts ou non. On dira que *le type de dimension de $A$ est au plus égal à celui de $B$* (et on écrira la relation $dA \leqslant dB$) quand $A$ est homéomorphe à une partie de $B$. On dira que *ces deux types sont égaux* quand on a aussi $dB \leqslant dA$.

Nous avons aussi défini la *somme* de deux types de dimensions, mais nous n'en aurons pas besoin ici.

Remarque. A quelle sorte d'espaces topologiques faut-il s'adresser pour que cette définition ait un sens? Il faut savoir ce que signifie le mot *homéomorphe*. Si l'on dit — comme d'habitude — qu'une homéomorphie est une transformation biunivoque et bicontinue, il suffit de savoir ce qu'est une transformation continue.

On dira qu'une transformation $y = f(x)$ est *continue au point $a$ de $\mathcal{A}$* si, quand $a$ est contigu à un sous-ensemble $e$ de $\mathcal{A}$, $f(a)$ est contigu à l'ensemble des points $y$, transformés des éléments de $e$ dans $\mathcal{B}$. Et on dit que *$a$ est contigu à $e$ si $a$ appartient à l'ensemble $\bar{e}$ de fermeture de $e$.*

Finalement pour que cette définition ait un sens, il faut et il suffit qu'on sache ce qu'on entend par *fermeture de $e$*. Si l'on entend par là, comme d'habitude, l'ensemble des éléments de $e$ et de ses éléments d'accumulation, *$\bar{e}$ doit contenir $e$.*

Certains auteurs n'accordent à un espace le titre d'*espace topologique* que si la fermeture est soumise à d'autres conditions que

$$\bar{e} \supset e. \tag{3}$$

Et ils appellent *espaces prétopologiques* les espaces pour lesquels on a seulement la condition (3). Nous considérons que pour qu'on puisse édifier une topologie, il suffit de définir les $\bar{e}$ sans autre condition que (3). On définit ainsi une topologie très générale. Nous voyons, par exemple, que notre définition du type de dimension *garde un sens* pour ce que nous appelons espace topologique. C'est un exemple d'une notion entièrement topologique au sens primitif du mot et non antérieure à la topologie. C'est-à-dire qu'il est regrettable de la qualifier de prétopologique.



**Précisions.** Pour démontrer le théorème cité plus haut, Banach a obtenu en chemin des précisions supplémentaires qui pourront être utiles pour résoudre notre problème.

Supposer $dA = dB$, c'est supposer qu'il existe deux homéomorphies

$$\beta = \varphi(A), \quad \alpha = \psi(B) \quad \text{où} \quad \alpha \subset A, \quad \beta \subset B.$$

Banach [1] démontre qu'alors on peut prendre $B_1 = \varphi(A_1)$, $A_2 = \psi(B_2)$. Pour déterminer complètement la décomposition, il ajoute que $A_2$ est l'ensemble des éléments $a$ de $A$ tels que toute la suite

$$\ldots, \varphi^{-1}\psi^{-1}(a), a, \psi\varphi(a), \psi\varphi\psi\varphi(a), \ldots$$

appartienne à $\alpha$.

**Cas particulier.** Un cas intéressant est celui où $B$ est une partie de $A$, avec la même topologie que $A$. Alors on peut prendre pour $\psi$ l'identité: $\alpha \equiv B$. On aura

$$B_1 = \varphi(A_1), \quad A_2 \equiv B_2.$$

Tel est le cas où $B \equiv C$, $A \equiv C_n$ en appelant $C_n$ l'ensemble des fonctions $y = F(x)$, où $y$ est un nombre réel, où $x$ est un point de l'espace cartésien, $R_n$, à un nombre entier $n$ de dimensions au sens habituel, où $F$ est continu dans le prismatoïde $P_n$: $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, et où $\|F\| = \max\limits_{x \in R_n} |F(x)|$. Il est clair que $C$ est une partie de $C_n$ avec la même topologie, d'où $dC \leqslant dC_n$. Et on démontre facilement que $dC \geqslant dC_n$ (d'où $dC = dC_n$) au moyen de l'homéomorphie

$$f(x) = (F, F_0) + \ldots + [(F, F_p) - (F_p, F_0)] \frac{\cos 2p\pi x}{p!} + \ldots \tag{4}$$

Comme $C_n$ est séparable, c'est-à-dire est l'ensemble de fermeture d'un ensemble dénombrable $D$ d'éléments de $C_n$, on désignera par $F_0, F_1, \ldots, F_p, \ldots$ dans (4) les éléments de $D$.

### *DEUXIÈME PROBLÈME*

Plusieurs auteurs, en particulier Grassmann, avaient étendu la notion de vecteurs à des espaces abstraits. Mais la convergence n'y était définie que sur une droite. En combinant cette notion d'espace vectoriel avec notre définition des espaces abstraits distanciés (dits aussi *métriques*), S. Banach, N. Wiener et H. Hahn ont pu définir, indépendamment, une nouvelle catégorie d'espaces abstraits qui jouissent de propriétés plus nombreuses ou plus précises que chacune de deux catégories précédemment étudiées et mentionnées ci-dessus.

On a pu ainsi démontrer en une fois des propriétés précédemment établies séparément pour un certain nombre d'espaces importants rencontrés en Analyse.

Toutefois, ces applications ne se sont pas encore étendues à deux des espaces les plus utiles dans les aplications: l'espace $\Gamma$, dont chaque élément est une courbe, celui et $\Sigma$, dont chaque élément est une surface.

Et voici notre deuxième problème (P 235):

*L'espace $\Gamma$, dont chaque élément est une courbe, est-il un espace de Banach?*

La même question et des commentaires analogues à ceux qui vont suivre se posent pour l'espace $\Sigma$ dont chaque élément est une surface. Nous nous bornerons dans la suite à la considération de l'espace des courbes.

La question posée en italiques, ci-dessus, a besoin d'être précisée de deux façons.

Tout d'abord, si elle était prise au pied de la lettre, on devrait répondre par l'affirmative. En effet, l'espace des courbes ayant la puissance du continu, on pourrait établir une correspondance biunivoque entre chaque courbe et un nombre réel. La droite étant un espace de Banach, il suffirait pour faire de l'espace des courbes un espace de Banach, d'y définir les notions fondamentales de somme, de multiplication par nombres réels, de norme, d'élément neutre, par correspondance avec ces mêmes notions définies comme d'habitude sur la droite.

Mais les notions ainsi définies sur l'espace des courbes seraient privées de la signification intuitive qu'elles ont sur la droite. D'où une *première restriction de notre problème*:

L'espace dont les éléments sont des courbes, peut-il être considéré comme un espace de Banach en définissant les notions fondamentales d'élément neutre, de multiplication par nombres réels, de norme et de somme *de façon naturelle, conforme à notre intuition?*

(Il est clair que si la réponse à la question ainsi formulée était négative, l'utilité pratique de la notion d'espace de Banach se trouverait singulièrement réduite).

D'autre part, il faut préciser de quelles courbes il s'agit. Il y aura autant de formes non équivalentes de notre problème qu'il y a de catégories classiques de courbes: courbes analytiques, courbes rectifiables, courbes de Jordan, etc.

Nous considérons dans ce qui suit l'espace $\Gamma$ des courbes de Jordan, c'est-à-dire des trajectoires (ou courbes continues orientées).

Chacune de ces courbes a une représentation paramétrique de la forme



$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

(où $\varphi, \psi, \chi$ sont continues) et peut être aussi représentée par

$$x = \varphi\big(h(t)\big), \quad y = \psi\big(h(t)\big), \quad z = \chi\big(h(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où $h(t)$ est une fonction continue croissant de 0 à 1.

En particulier, quand $\varphi, \psi, \chi$ sont constantes, la courbe se réduit à un point.

Pour chacune de trois des notions fondamentales indiquées ci-dessus, il semble qu'une définition déterminée s'impose:

*L'élément neutre* sera la courbe réduite à l'origine des coordonnées.

*Le produit $aC$* d'une courbe $C$ par un nombre réel $a$, sera l'homothétique de $C$ relativement à l'origine, dans le rapport $a$.

*La norme* sera le maximum de la distance de l'origine à un point variable sur la courbe; nous pourrons dire que la norme de $C$ est la distance de l'origine à la courbe $C$ (cf. p. 38).

On vérifie immédiatement que ces trois notions satisfont aux cinq conditions indépendantes de la notion de somme qui leur sont imposées (²) pour qu'elles conviennent à un espace de Banach:

6° Le produit $aC$ est une courbe de Jordan bien déterminée connaissant $a$ et $C$.

12° $(ab)C = a(bC)$.

13° La norme $\|C\|$ de $C$ est un nombre $\geqslant 0$ bien déterminé connaissant $C$.

14° bis. L'élément de $\Gamma$ dont la norme est nulle est la courbe réduite à l'origine.

15° $\|aC\| = |a|\cdot\|C\|$.

*La somme.* La difficulté du problème est ainsi réduite à la découverte d'une définition de la somme de deux courbes de Jordan. Cette somme doit satisfaire aux conditions suivantes:

1° Etant données les 2 courbes $C$ et $C'$, leur somme $C+C'$ est déterminée,

3° $(C+C')+C'' = C+(C'+C'')$,

9° $a(C+C') = aC+aC'$,

10° $(a+b)C = aC+bC$,

V'. $\|C+C'\| \leqslant \|C\|+\|C'\|$.

Remarques. La réduction du probléme à la recherche de la somme ne laisse pas d'être encore difficile. On peut cependant faire quelques pas vers sa solution.

(²) Nous tenons compte ici de la réduction des 16 conditions de Banach (mentionnées, par exemple, dans notre ouvrage [2], p. 125-126, 140) effectuée en 1930 par Flamant.

1° Première Condition. On voit, par exemple, que, d'après la définition de $aC$, on a $1\cdot C = C$, alors, d'après 10°,

$$C+C = (1\cdot C+1\cdot C) = 2C. \tag{5}$$

Ainsi: *la somme de deux courbes identiques doit être l'homothétique de l'une d'elles par rapport à l'origine dans le rapport* 2.

2° On peut ramener la définition de la somme $S = C+C'$ de deux courbes $C$, $C'$ à la définition de la différence de deux courbes $S = C+ +(-1)C''$ (qu'on écrit plus brièvement $S = C-C''$).

Il suffit de prendre $C'' = (-1)C'$. Alors: $\|S\| = \|C-C''\| = = (C, (-1)C')$, qu'on peut écrire

$$\|C+C'\| = \|S\| = (C, -C') \tag{6}$$

en désignant par $(C, C'')$ la „distance" des 2 courbes $C$, $C''$. Si l'on a défini la distance de 2 courbes de Jordan, la relation (6) deviendra une condition imposée au choix de la somme.

(Les deux conditions (5) et (6) n'apparaissent ici que comme des conditions nécessaires au choix de la somme de deux courbes).

On peut définir la distance $(C, C'')$ de bien des manières. Mais il faudra, pour qu'on ait affaire à un espace de Banach, que la définition adoptée satisfasse aux conditions habituelles imposées à la distance:

$$(C, C'') = (C'', C) \geqslant 0; \quad (C, C'') = 0 \text{ équivaut à } C \equiv C',$$

$$(C, C_1) \leqslant (C, C_2)+(C_2, C_1).$$

En outre, pour satisfaire à notre intuition, la distance de $C_n$ variable à $C$ fixe doit tendre vers zéro quand $C_n \to C$. Il est assez naturel de dire que $C_n \to C$ quand une des représentations paramétriques de $C_n$ tend vers une des représentations paramétriques de $C$.

Nous avons donné autrefois, dans notre Thèse [4], une définition de la distance de deux courbes de Jordan, qui satisfait à ces 4 conditions. C'est la suivante. Si $C''$ est représentée par $x = a(t)$, $y = \beta(t)$, $z = \gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, on pose

$$(C, C'') = \inf_h \sqrt{[\varphi(t)-a(h(t))]^2+\ldots+[\chi(t)-\gamma(h(t))]^2} \tag{7}$$

où $h$ est une fonction continue croissant de 0 à 1 avec $t$.

Seconde condition. Dès lors, si l'on accepte cette définition de la distance de deux courbes de Jordan, on voit que le choix de la courbe $S$, $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$, $z = \nu(t)$, somme des deux courbes



$$C:\quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

$$C':\quad x = a(t), \quad y = b(t), \quad z = c(t)$$

devra satisfaire à la condition

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sqrt{\lambda^2(t)+\mu^2(t)+\nu^2(t)}$$

$$= \inf_h \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sqrt{[\varphi(t)+a(h(t))]^2+[\psi(t)+b(h(t))]^2+[\chi(t)+c(h(t))]^2}$$

(qui n'est que la traduction de la condition (6)).

Dans le cas où la borne inférieure du second membre est atteinte [3] par une seule fonction $h(t) = k(t)$ (continue et croissante), on devra avoir

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sqrt{\lambda^2(t)+\mu^2(t)+\nu^2(t)}$$

$$= \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sqrt{[\varphi(t)+a(k(t))]^2+[\psi(t)+b(k(t))]^2+[\chi(t)+c(k(t))]^2}.$$

**Nouvelle réduction du problème.** On sait que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et toute courbe de Jordan $C$, il existe une ligne polygonale orientée $P_\varepsilon$ telle que $(C, P_\varepsilon) < \varepsilon$, c'est-à-dire $\|C+(-1)P_\varepsilon\| < \varepsilon$. On aura, de même, une ligne polygonale orientée $P'_\varepsilon$ telle que $\|C'+(-1)P'_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Soient maintenant $S = C+C'$, $Q_\varepsilon = P_\varepsilon+P'_\varepsilon$; on doit avoir

$$(S, Q_\varepsilon) = \|S+(-1)Q_\varepsilon\| = \|(C+(-1)P_\varepsilon)+(C'+(-1)P'_\varepsilon)\|$$

$$\leqslant \|C+(-1)P_\varepsilon\|+\|C'+(-1)P'_\varepsilon\| < 2\varepsilon.$$

Ainsi, quand $\varepsilon \to 0$, la somme $S$ de deux courbes $C$, $C'$ est la limite de la somme $Q_\varepsilon$ de deux lignes polygonales orientées $P_\varepsilon$, $P'_\varepsilon$.

Inversement, supposons que la somme de deux courbes ne soit définie que dans le cas où ces deux courbes sont des lignes polygonales orientées. On aura

$$(Q_\varepsilon, Q_\omega) = \|Q_\varepsilon+(-1)Q_\omega\| = \|(C+(-1)P_\omega)+(-1)(C+(-1)P_\varepsilon)$$
$$+(C'+(-1)P'_\omega)+(-1)(C'+(-1)P'_\varepsilon)\| < 2\omega+2\varepsilon. \tag{8}$$

L'espace $\Gamma$, considéré comme espace distancié, sur la base de la formule (7) est complet. Dès lors, il résulte de la formule (8) que $Q_\varepsilon$ tend vers une courbe limite déterminée $\sigma$, quand $\varepsilon \to 0$. Cette courbe limite ne dé-

[3] Dans mon ouvrage [2], p. 154, on trouvera un exemple dû à Tibor Radó, montrant que cette borne n'est pas toujours atteinte.

pend pas du choix des polygonales $P_\varepsilon, P'_\varepsilon$: si on leur substitue deux autres lignes polygonales orientées $p_\varepsilon, p'_\varepsilon$ et si l'on pose $q_\varepsilon = p_\varepsilon + p'_\varepsilon$, on aura

$$(Q_\varepsilon, q_\varepsilon) = \|Q+(-1)q_\varepsilon\|$$
$$= \|(C+(-1)p_\varepsilon)+(C'+(-1)p'_\varepsilon)+(-1)(C+(-1)P_\varepsilon)+$$
$$+(-1)(C'+(-1)P'_\varepsilon)\| \leqslant 4\varepsilon.$$

D'où $(\sigma, q_\varepsilon) \leqslant (\sigma, Q_\varepsilon)+4\varepsilon$, donc $q_\xi \to \sigma$, comme $Q_\varepsilon$, quand $\varepsilon \to 0$.

Dès lors, si l'on a pu définir la somme de deux lignes polygonales orientées, alors, si, pour deux courbes de Jordan $C, C'$, on détermine des lignes polygonales approchées $P_\varepsilon, P'_\varepsilon$, telles que 1° leur somme $Q_\varepsilon$ tend vers une courbe limite unique $\sigma$ qui ne dépend pas du choix de $P_\varepsilon, P'_\varepsilon$, 2° la somme de $C$ et de $C'$ ne peut être que cette courbe limite $\sigma$.

*On est ainsi ramené* à résoudre notre problème *pour le cas théoriquement plus simple* où l'espace $\Gamma$ des courbes de Jordan est remplacé par son sous-espace $\gamma$, constitué par *les lignes polygonales orientées* (en rappelant toutefois que $\gamma$ n'est pas complet).

### TRAVAUX CITÉS

[1] S. Banach, *Un théorème sur les transformations biunivoques*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 236-239.

[2] M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérés comme introduction à l'analyse générale*, Paris 1928.

[3] — *Les mathématiques et le concret*, Paris 1952.

[4] — *Sur quelques points du Calcul fonctionnel (Thèse)*, Paris 1906.

*Reçu par la Rédaction le 12. 10. 1957*

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

# IS $w$ A FUNCTION OF $u$?

BY

K. MENGER (CHICAGO)

**1. Quantities, Fluents, Functions.** By *quantity* I mean an ordered pair whose second member (or *value*) is a number while its first member (or *object*) may be anything. (Here and in the sequel, "number" means real number). Two quantities Q and Q′ will be said to be *consistent* if and only if either *obj* Q $\neq$ *obj* Q′ or *obj* Q $=$ *obj* Q′ and *val* Q $=$ *val* Q′. (In the latter case, Q and Q′ are regarded as *equal*).

By a *fluent* I mean (reviving, in precise form, a half-forgotten term introduced by Newton) a class of pairwise consistent quantities (1). The class of all objects (all values) of a fluent will be referred to as its *domain* (its *range*). If A is any class, a fluent with the domain A is a class of quantities which, for each element $\alpha$ of A, includes exactly one quantity with the object $\alpha$. The value of that quantity, if the fluent is called $u$, will be denoted by $u\alpha$. All fluents will be designated by letters in italic type.

As an example of a fluent, I mention the time in seconds elapsed since a certain instant, condidered as the class $t$ of all quantities $(\tau, t\tau)$ for any act $\tau$ of reading a timer calibrated in seconds which showed 0 when it was started at the instant mentioned. Here, $t\tau$ denotes the number read as the result of the act $\tau$.

A fluent whose domain is a class of numbers will be called a 1-place function — briefly, a *function* (since several-place-functions will not herein be considered) (2). Examples of functions include

*log*, the class of all pairs (x, *log* x) for any x $>$ 0;

$j^3$, the class of all pairs (t, $j^3$ t) $=$ (t, t³) for any t.

Here, non-italicized letters x and t are used as number variables (3). Each replacement of those letters with a numeral yields the designation of specific elements of the functions defined, *e. g.*,

(2, *log* 2) and (2, 2³), respectively.

The letter $j$ and the name *identity* function will be permanently reserved for the class (4) of all pairs (x, x) for any number x.

**2. Incomplete, unanswerable Questions.** Let $u$ and $w$ be two fluents. Is $w = sin\,u$? Is $w$ some function of $u$? These questions are