P R O B L È M E S

P 40, R 1. La réponse est négative (¹).

I. 3, p. 240.

(¹) Voir J. S. Lipiński, *Sur une intégrale*, à paraître dans Colloquium Mathematicum.

P 47, R 2. Une solution partielle est contenue dans le résultat de Sawyer (²), qui a démontré que le minimum d'aire d'une région fermée plane ayant un centre de symétrie et couvrant en toute position au moins un point aux coordonnées entières est égal à 4/3; il a donné aussi un exemple d'une telle région.

I. 3, p. 243.

(²) D. B. Sawyer, *On the covering of lattice points by convex regions*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford second series 4 (1953), p. 284-292.

P 101, R 2. Résultats ultérieurs sont à trouver dans le travail de Hyltén-Cavallius, ce volume, p. 59-65.

II. 4, p. 301.

P 133, R 1. Le résultat de Kolmogoroff (³) d'après lequel toute fonction continue de trois variables est de la forme

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{7} h_k[\varphi_k(x_1, x_2), x_3],$$

où h_k et φ_k sont des fonctions continues, entraîne la réponse négative à ce problème, de même qu'au problème **P 187.**

Les problèmes **P 187** et **P 188** doivent être restreints à $n \leqslant 20$.

III. 2, p. 170.

(³) А. Н. Колмогоров, *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения,* Доклады Академии Наук СССР 114 (1957), p. 953-956.

P 167, R 1. La réponse est affirmative (4).

IV, 2, p. 240.

(4) Voir J. S. Lipiński, *Sur l'uniformisation des fonctions continues*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 5 (1957), p. 1019-1021 et J. Mioduszewski, *Solution générale d'un problème de Sikorski*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques 6 (1958), p. 169-173.

P 168, R 2. P. Erdös a signalé par lettre l'impossibilité de la solution conforme à celle supposée dans **R 1** par l'auteur du problème: l'exposant 1/2 dans l'estimation

$$\int_0^{2\pi} |\cos n_1 x + \cos n_2 x + \ldots + \cos n_k x|\, dx = O(n_k^{1/2}),$$

où $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_k$ sont des entiers non-négatifs, ne peut pas être diminué. La démonstration en sera publié dans Colloquium Mathematicum.

IV. 2, p. 241.

P 175, R 1. La solution affirmative de (1) découle des résultats récents de Świerczkowski (5). Une simple démonstration directe paraîtra dans Colloquium Mathematicum.

IV. 2, p. 243.

(5) S. Świerczkowski, *On a free group of rotations of the Euclidean space*, Indagationes Mathematicae 20 (1958), p. 376-378.

P 187, 188, R 1. Voir **P 133, R 1** ci-dessus, p. 329.

IV. 2, p. 244.

P 192, R 1. L'auteur du problème a démontré l'existence du couple de points dont il s'agit et établi leurs propriétés caractéristiques (6).

IV. 2, p. 245.

(6) H. Steinhaus, *Sur la division des corps matériels en parties*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 4 (1956), p. 801-804.

J. DIEUDONNÉ (PARIS)

P 233. Formulé dans la communication *Un critère de normalité pour les espaces produits.*

Ce volume, p. 31.

M. FRÉCHET (PARIS)

P 234, 235. Formulés dans la communication *Sur deux problèmes d'analyse non résolus.*

Ce volume, p. 33 et 36.

S. C. KLEENE (MADISON, WISC.)

P 236, 237, 238, 239 et **240.** Formulés dans la communication *Extension of an effectively generated class of functions by enumeration.*

Ce volume, p. 77-78.

P. ERDÖS, P. SZÜSZ ET P. TURÁN (BUDAPEST)

P 241 et **242.** Formulés dans la communication *Remark to the theory of diophantine approximation.*

Ce volume, p. 119-120.

M. KATĚTOV (PRAGUE)

P 243, 244, 245 et **246.** Formulés dans la communication *О продолжении локально конечных покрытий.*

Ce volume, p. 149.

J. L. KELLEY (CAMBRIDGE)

P 247 et **248.** Formulés dans la communication *On mappings of plane sets.*

Ce volume, p. 153.

D. MENCHOFF (MOSCOU)

P 249. Formulé dans la communication *Sur les suites convergentes des sommes partielles des séries trigonométriques.*

Ce volume, p. 164.

D. SCOTT (PRINCETON, N. J.) ET A. TARSKI (BERKELEY, CAL.)

P 250. Formulé dans la communication *The sentential calculus with infinitely long expressions.*

Ce volume, p. 170.

A. TARSKI (BERKELEY, CAL.)

P 251. Formulé dans la communication *Remarks on predicate logic with infinitely long expressions.*

Ce volume, p. 175.

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

P 252. Formulé dans la communication *Sur une question concernant le nombre de diviseurs premiers d'un nombre naturel.*

Ce volume, p. 210.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 253. Formulé dans la communication de B. Knaster, A. Lelek et Jan Mycielski, *Sur les décompositions d'ensembles connexes.*

Ce volume, p. 228.

S. ZUBRZYCKI (WROCŁAW)

P 254. Formulé dans la communication *Remarks on random, stratified and systematic sampling in a plane.*

Ce volume, p. 264.

J. DE GROOT (AMSTERDAM)

P 255, 256 et **257.** Formulés dans la communication *Some special metrics in general topology.*

Ce volume, p. 283 et 285.

A. G. WALKER (LIVERPOOL)

P 258. There are n members of an international congress; each member speaks only one language, and the n languages are all different. How many interpreters are needed such that any two members of the congress can talk to each other, assuming that each interpreter can talk in three languages and that interpreters with all possible combinations are available.

New Scottish Book, Probl. 352, 21. IX. 1957.

WU WEN-TSÜN (PÉKIN)

P 259. Let $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ be continuous and differentiable at $(x_1, x_2) = (0, 0)$ with $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$.

Then

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{at} \quad (0, 0)$$

is a sufficient condition for (f_1, f_2) to be a locally homeomorphic map of a certain neighbourhood of $(0, 0)$ in the (x_1, x_2)-plane to a certain neighbourhood of $(0, 0)$ in the (y_1, y_2)-plane. If $J(0, 0) = 0$ and if higher derivatives of f_1 and f_2 exist, what are the conditions upon these derivatives to guarantee that (f_1, f_2) will be such a locally homeomorphic map?

For a function of a single variable the analogous problem has an obvious solution.

New Scottish Book, Probl. 356, 31. X. 1957.

S. ŚWIERCZKOWSKI (WROCŁAW)

P 260. Le nombre φ/π étant irrationnel, est-ce qu'il en résulte que le groupe de rotations de l'espace des x, y, z engendré par la rotation d'angle φ autour de l'axe des z et par celle de même angle autour de l'axe des x est libre?

Nouveau Livre Ecossais, Probl. 357, 31. X. 1957.

B. PENKOV (SOFIA)

R sei die reelle Gerade, B ein Banachscher Raum, B^* sein konjugierter Raum und F der kleinste σ-Körper, der die Mengen

$$\{\omega\colon \omega \in B, l(\omega) < t\}$$

für alle $l \in B^*$ und $t \in R$ enthält.

P 261. Wie lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein System von Verteilungsfunktionen $F_l(t)$ $(l \in B^*)$, so daß eine σ-additive auf dem Körper F definierte reelle Mengenfunktion P mit $P(B) = 1$ existiert, welche mit F_l durch die Formel

$$F_l(t) = P(\{\omega\colon \omega \in B, l(\omega) < t\})$$

für alle $l \in B^*$ und $t \in R$ zusammenhängt?

Dieselbe Frage für den Sonderfall: B — die Ebene, F — der Borelsche Mengenkörper.

Neues Schottisches Buch, Probl. 359, 4. XI. 1957.

S. HARTMAN (WROCŁAW)

P 262. Admettons l'existence, pour deux nombres donnés α et β, d'un nombre c tel que pour tout $t > 1$ il existe des entiers x et y qui satisfont aux inégalités

$$|\alpha x - y - \beta| < 1/t, \tag{1}$$

$$|x| < ct. \tag{2}$$

Est-ce qu'il en résulte, pour les mêmes α et β, l'existence d'un nombre c_1 tel que pour tout $t > 1$ il existe des entiers x et y qui satisfont à (1) et à l'inégalité

$$0 < x < c_1 t \text{?} \tag{2'}$$

Nouveau Livre Écossais, Probl. 360, 27. XI. 1957.

Š. SCHWARZ (BRATISLAVA)

P 263. Convenons de dire qu'un groupe G *admet une décomposition* S lorsque $G = \bigcup_{a \in A} S_a$, card $A \geqslant 2$, où les S_a sont des sous-groupes et $\alpha \neq \beta$ entraîne $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe (infini) *non-commutatif* admette une décomposition S.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 361, 27. XI. 1957.

B. KNASTER (WROCŁAW)

Soit f une fonction définie dans un espace X et dont l'ensemble des valeurs constitue un espace Y supposé au moins un T_2 (7). Appelons *multiplicité* n (8) de f au point $y \in Y$ la puissance de l'ensemble $f^{-1}(y)$.

P 264. X étant le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, est-ce que toute fonction continue f de multiplicité finie au plus n en chaque point est une superposition d'un nombre fini de fonctions continues dans X de multiplicité au plus 2 en chaque point?

P 265. Pour quelles multiplicités n, tout continu qui se laisse obtenir de la circonférence par une fonction continue de multiplicité au plus n en chaque point peut être obtenu du segment rectiligne par une telle fonction?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 368 et 369, 20. I. 1958.

(7) au sens de P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, p. 67 („espaces de Hausdorff").

(8) Cf. P 223, Colloquium Mathematicum 5 (1958), p. 235.

P 266. Est-ce qu'aucun continu acyclique ne se laisse obtenir de lui-même par une fonction continue de multiplicité constante 2 en chaque point?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 379, 22. IV. 1958.

B. KNASTER et A. LELEK (WROCŁAW)

P 267. Il existe deux ensembles compacts (et même deux continus) *quasi-homéomorphes* dont l'un seulement est homéomorphe à un ensemble plan (9). Existe-t-il un couple de continus localement connexes ayant la même propriété?

Wrocław, le 12. III. 1957.

(9) K. Borsuk, *Remarques sur la quasi-homéomorphie*, ce volume, p. 1-4.

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 268. Posons pour $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ et $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$, où $k = 1, 2, \ldots$,

$$a_n^{(k)} = k-1+\{n\alpha\},$$

$\{\ \}$ désignant le reste modulo 1. Soit $\gamma_1^{(k)} \leqslant \gamma_2^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{2^k-1}^{(k)}$ la suite des 2^{k-1} nombres $a_n^{(k)}$, où $k-1 \leqslant a_n^{(k)} < k$, rangés d'aprés leur grandeur. Choisissons-en ceux pour lesquels $\gamma_n^{(k)} = a_n^{(k)}$ et enfin rangeons les, pour tous les $k = 1, 2, \ldots$, en une suite croissante $\beta_1, \beta_2, \ldots$

Est-ce que cette suite est poissonienne (10)?

Wrocław, le 20. XI. 1957.

P 269. Montrer que par tout point intérieur d'un solide convexe passe une section plane dont un diamètre (corde de plus grande longueur) contient ce point.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 365, 23. XII. 1957.

P 270. Let us draw on every face of the regular dodekahedron an arrow (i. e. a directed segment). The problem is to prove that there will be always at least one pair of neighbouring faces with arrows enclosing an angle greater than 90°.

Wrocław, 13. XI. 1957.

(10) au sens précisé dans le problème P 173, Colloquium Mathematicum 4 (1957), p. 242.

K. URBANIK (WROCŁAW)

P 271. Soit G un groupe topologique compact. Une mesure borelienne normée μ s'appelle *infiniment divisible* lorsqu'il existe une suite des mesures boreliennes normées $\{\mu_n\}$ telles que

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \ldots * \mu_n}_{n \text{ fois}} \text{ pour tout } n = 1, 2, \ldots, \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mu_n(\{e\}) = 1,$$

$*$ désignant le produit de composition des mesures et e étant l'unité du groupe G.

Est-ce que toute mesure infiniment divisible est une distribution poissonienne composée, c'est-à-dire que sa fonction caractéristique est de la forme

$$\varphi_\mu(U) = \exp \int_G \big(U(x) - E\big) \nu(dx),$$

où ν est une mesure borelienne dans G (pas nécessairement normée) et U est la représentation unitaire du groupe G?

Pour les groupes G abéliens, la réponse est affirmative ([11]).

Nouveau Livre Écossais, Probl. 374, 14. II. 1958.

P 272. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Quelles sont toutes les distributions-limites de la suite

$$\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{b_n} - a_n\right\}_{n=1,2,\ldots},$$

où a_n et b_n sont des constantes et $b_n \to \infty$, en admettant que tout X_n ne prend que deux valeurs au plus?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 375, 14. III. 1958.

([11]) K. Urbanik, *Poisson distributions on compact Abelian topological groups*, ce volume, p. 13-24.

B. GNIEDENKO (KIEV)

P 273. La même question que dans **P 272** en admettant (sans aucune hypothèse sur le nombre de valeurs des X_n) que, pour un choix convenable des constantes $b_1, b_2, \ldots$, la distribution des variables aléatoires $b_1 X_1$, $b_2 X_2, \ldots$ est indépendante de n.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 376, 14. III. 1958.

P 274. Стационарные случайные процессы $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t), \ldots$ взаимно независимы и одинаково распределены (т. е. для каждого n и для каждой группы $t_1, t_2, \ldots, t_n$ распределение вектора $\{\xi_k(t_1), \ldots, \xi_k(t_n)\}$ не зависит от k).

Охактеризовать класс возможных предельных процессов для сумм

$$\frac{1}{B_n(t)} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) - A_n(t)$$

$\big(A_n(t)$ и $B_n(t)$ — неслучайные функции$\big)$.

Новая Шотландская Книга, Пробл. 378, 14. III. 1958.

T. GANEA (BUCAREST)

P 275. Does there exist a finite dimensional compact metric homogeneous absolute retract? (A space is *homogeneous* if, for any two points, there exists a homeomorphism of the whole space onto itself sending one point into the other).

P 276. Does there exist a connected and locally connected topological group whose multicoherence degree is not 0, 1 or ∞? (See details in the authors papers *Zur Multikohärenz topologischer Gruppen*, Mathematische Nachrichten 7 (1952), p. 323-334 and 13 (1955), p. 9-18).

Bucarest, 30. IX. 1957.

H. FREUDENTHAL (UTRECHT)

P 277. Est-il vrai que tout groupe transitif de rotations de la n-sphère a un sous-groupe transitif fermé?

Utrecht, le 3. X. 1957.

V. JARNÍK (PRAGUE)

P 278. $\Theta = \{\theta_1, \ldots \theta_n\}$ étant un système de nombres réels, posons pour $t \geqslant 1$

$$\psi(t, \Theta) = \min\big(\max_{j=1,\ldots,n} |q\theta_j - p_j|\big),$$

où le symbole min se rapporte à tous les systèmes de nombres entiers $q, p_1, \ldots, p_n$ tels que $0 < q \leqslant t$.

Quelle est, pour $n > 1$, la plus grande constante c_n telle que l'on ait

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{1/n}\psi(t,\Theta) \geqslant c_n$$

pour presque tous les systèmes?

On sait que

$$t^{1/n}\psi(t,\Theta) \leqslant 1$$

et on voit sans peine que $c_1 = 1$ et $c_n \geqslant 1/2$ pour $n = 2, 3, \ldots$

Prague, le 26. XI. 1957.

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME VI

COMMUNICATIONS