[7] R. L. Moore, *Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 189-202.
[8] Jan Mycielski, *Problème 314*, Nouveau Livre Écossais, Wrocław 29, X. 1956 (non publié).
[9] W. Sierpiński, *Un théorème sur les continus*, Tôhoku Mathematical Journal 13 (1918), p. 300-303.
[10] — *Sur quelques propriétés topologiques du plan*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 1-6.
[11] P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*, Verhandelingen der Koninklijke Akademie von Wetenschappen, Amsterdam, 1 sectie, 13 (1928), p. 1-172.
[12] G. T. Whyburn, *Concerning points of continuous curves defined by certain im kleinen properties*, Mathematische Annalen 102 (1930), p. 313-336.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LA CONVERGENCE DES INTÉGRALES

PAR

M. BIERNACKI (LUBLIN)

Je vais établir la proposition suivante:

THÉORÈME. *p étant un nombre positif arbitraire et $y(x)$ une fonction deux fois continûment dérivable pour $x \geqslant x_0$, si $y'(x_0) > 0$, $y''(x) > 0$ pour $x \geqslant x_0$ et si l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} (y'/y'')^p\,dx$$

est convergente, alors il en est de même de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} (y/y')^p\,dx.$$

Dans la démonstration, on peut évidemment supposer que $x_0 = 0$ et que $y'(0) = 1$.

Ce théorème signifie que y''/y' est „en moyenne" plus petite que y'/y. Il est curieux que, dans le cas des fonctions analytiques et des moyennes sur les circonférences, ce soit le contraire qui a lieu (cf. [1]).

LEMME I. *Si $p > 0$ et $q < 1$, on a $(1-q)^{-p} \geqslant 1+qp$.*

Si $q \leqslant -1/p$, l'inégalité est évidente, car le second membre est non positif. Si $q > 0$, le lemme résulte immédiatement de la formule du binôme appliquée au premier membre de l'inégalité.

Si $-1/p < q < 0$, posons $s = -q$; l'inégalité pourra s'écrire $1+s \leqslant (1-ps)^{-1/p}$, où $0 < ps < 1$, et elle résulte encore de la formule du binôme appliquée à son second membre.

LEMME II. *Considérons l'équation différentielle*

$$v' + a(x)v = 1 \tag{1}$$

où $a(x)$ est positive et continue pour $x \geqslant 0$ et où $\int_0^{\infty} dx/[a(x)]^p$ converge.

Si $v(x)$ est une solution quelconque de (1) *l'intégrale* $\int\limits_0^\infty [v(x)]^p dx$ *converge* (1).

Supposons d'abord que $v(0) > 0$; il en résulte que $v(x) > 0$ pour tout $x > 0$, car si l'on avait $v(x) = 0$, on aurait aussi, d'après (1), $v'(x) = 1$; il résulte alors de (1) que l'on a $v'(x) < 1$ pour tout $x > 0$. En remplaçant dans le lemme I q par v', on obtient l'inégalité

$$v^p - 1/a^p = v^p - v^p/(1-v')^p \leqslant v^p - v^p(1+v'p) = -pv^p v',$$

donc

$$\int\limits_0^x v^p dx \leqslant \int\limits_0^x \frac{dx}{a^p} + \frac{p}{p+1}[v^{p+1}(0) - v^{p+1}(x)].$$

Lorsque $x \to \infty$, on en déduit tout de suite le lemme II dans le cas où $v(0) > 0$. Si $v(0) \leqslant 0$, il suffit de remarquer que si $v(x) \leqslant 0$, on a, d'après (1), $v'(x) \geqslant 1$ et par suite $v(x_0) > 0$ pour une valeur assez grande de x_0; on peut donc reprendre le raisonnement précédent en y remplaçant 0 par x_0.

Pour établir le théorème, posons $y''(x)/y'(x) = a(x)$; $a(x)$ remplit bien les conditions du lemme II. D'autre part, la solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$v(x) = \Big[c + \int\limits_0^x e^{\int_0^x a(x)dx} dx\Big] e^{-\int_0^x a(x)dx}.$$

Si la constante c est convenablement choisie, on trouve, en vertu de la définition de $a(x)$, que $v(x) = y(x)/y'(x)$; le théorème s'ensuit donc immédiatement du lemme II.

Remarque. Il s'ensuit des hypothèses du théorème que $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$; il résulte donc du théorème que *l'intégrale*

(2) $$\int\limits_{x_0}^\infty dx/y'^p$$

est aussi convergente. Or, dans le cas où $p \leqslant 1$, on peut trouver une démonstration directe de ce fait; cette démonstration montre de plus que *l'intégrale* (2) *converge très rapidement.* On peut toujours supposer que $x_0 = 0$ et $y'(0) = 1$.

(1) Dans le cas où $p = 1$ et $v(0) = 0$, le lemme II a été établi par Z. Opial ([3], théorème 5), qui a d'ailleurs remarqué plus tard que la démonstration de cet article s'étend au cas de p positif quelconque. La démonstration des lemmes I et II exposée ici constitue une extension d'une autre démonstration de Z. Opial relative au cas où $p = 1$ (cette démonstration n'a pas été publiée jusqu'à présent).

Lemme III. *Si $p > 0$, $a(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$ et si $\int\limits_0^\infty dx/a^p = K < \infty$, on a, pour $x > 0$, $\int\limits_0^\infty a^p dx \geqslant x^2/K$. Si $0 < p \leqslant 1$, on a aussi*

$$\int\limits_0^x a\,dx \geqslant \left(\frac{1}{K}\right)^{1/p} x^{1+p^{-1}}.$$

$a^p(x)$ et $1/a^p(x)$ étant toujours „contrairement croissantes" on a, en effet, d'après une inégalité de Tchébycheff (cf. [2], p. 168)

$$x = \int\limits_0^x \frac{1}{a^p}\cdot a^p dx \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{dx}{a^p}\int\limits_0^x a^p dx \leqslant \frac{K}{x}\int\limits_0^x a^p dx,$$

d'où la première inégalité du lemme. Pour en obtenir la seconde, il suffit de remarquer que la moyenne intégrale d'ordre p est une fonction croissante de p (cf. [2], p. 143), donc que l'on a pour $p < 1$

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x a(x)\,dx \geqslant \left[\frac{1}{x}\int\limits_0^x a^p dx\right]^{1/p} \geqslant \left(\frac{1}{K}\right)^{1/p} x^{1/p}.$$

On a donc pour $p \leqslant 1$

$$\frac{1}{y'^p} = e^{-p\int_0^x a(x)dx} \leqslant e^{-p(1/K)^{1/p}x^{1+p^{-1}}}$$

et ceci achève la démonstration de l'assertion précédente.

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Biernacki, *Sur une inégalité entre les moyennes des dérivées logarithmiques*, Mathematica 23 (1947-48), p. 54-59.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[3] Z. Opial, *Sur l'allure asymptotique des intégrales de l'équation différentielle* $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 5 (1957), p. 847-853.

Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1958