Remark 1. The example in [2] shows that assumption (6) cannot be omitted also for f being a polynomial. It may be replaced by the assumption that $f_q(x, y, z, q) \leqslant f_q(x, y, z, q^*)$ for $q \geqslant q^*$.

Remark 2. The assumptions of Theorem T are satisfied in particular for $f = a(x, y, z,)q + b(x, y, z)$, where a, b are of class C^1.

REFERENCES

[1] A. Pliś, *Characteristics of non-linear partial differential equations*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 2 (1954), p. 419.

[2] — *On characteristics of partial differential equations*, ibidem 5 (1957), p. 957.

[3] T. Ważewski, *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques 24 (1951), p. 1-12.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LES DÉCOMPOSITIONS D'ENSEMBLES CONNEXES

PAR

B. KNASTER, A. LELEK ET JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

I. Introduction

Nous entendons dans cette communication par *décomposition* d'un ensemble de points celle en une somme de ses sous-ensembles non-vides et disjoints.

La *connexité* d'un ensemble est, par définition, son indécomposabilité en deux ensembles fermés dans lui (1). Les *continus* sont les ensembles à la fois connexes et compacts ou — ce qui est la même chose dans les espaces compacts — les fermetures d'ensembles connexes. Les ensembles connexes et ouverts s'appellent *régions*.

L'indécomposabilité en deux ensembles fermés entraînant celle en n'importe quel nombre fini n d'ensembles fermés (puisque la somme de $n-1$ ensembles de ce genre en est encore un), la question s'impose si un X connexe peut se décomposer en une suite dénombrable d'ensembles fermés dans lui. Cette question a été résolue d'abord pour les continus: aucun continu X ne se laisse décomposer ainsi (2), mais il existe, déjà sur le plan, des X connexes et localement compacts, en particulier des ensembles connexes et fermés (dits aussi *continus non-bornés*) qui se décomposent en suites dénombrables d'ensembles fermés dans eux (3); pourtant, au moins l'un d'eux ne peut alors être connexe (4). Il existe aussi parmi les F_σ plans bornés, mais qui ne sont pas des G_δ (donc, à plus forte raison, localement compacts), qui se laissent dé-

(1) Voir [5], p. 303 et [1] p. 244.

(2) Voir [9], p. 300.

(3) Voir [2], p. 58 et [10], p. 5.

(4) Voir [6]. Ce travail contient aussi un exemple du continu non-borné irréductible entre deux points, décomposable en un seul ensemble fermé non-connexe et une infinité dénombrable de continus non-bornés; cf. également [7].

composer en des suites dénombrables d'arcs [5] (c'est-à-dire de continus homéomorphes au segment de droite).

Cependant, *tous ces exemples ont le trait commun de ne pas être localement connexes*. On ignorait donc si une décomposition d'un X connexe en une suite dénombrable de X_i fermés dans lui puisse être compatible avec la connexité locale de X (problème posé récemment par Jan Mycielski [6]), voire avec la connexité locale *héréditaire* de X (c'est-à-dire associée à celle de tous les sous-ensembles connexes de X). Nous en avons trouvé un exemple particulièrement simple: les X_i y sont des arcs formés chacun d'un nombre fini de demi-circonférences. Cet exemple est spatial (voir l'exemple 1, p. 235).

Par contre, il existe un ensemble plan connexe et localement connexe, mais ne l'étant pas héréditairement, qui se laisse décomposer en une suite dénombrable de segments rectilignes (voir l'exemple 3, p. 240).

L'autre trait commun de tous les exemples connus des X connexes décomposables en des suites dénombrables des X_i fermés dans eux est que *le diamètre de X_i ne tend jamais vers* 0 avec $i \to \infty$ (même lorsqu'il a ce nombre pour sa borne inférieure). Le théorème 1 (dû à A. Lelek) qui va suivre (voir p. 229) montre que le phénomène est général pour tous les X métriques connexes, le soient-ils localement ou non.

Toutefois, la convergence des diamètres des X_i vers 0 est possible pour des X connexes, et même localement connexes, lorsqu'on atténue, même très légèrement, la condition que les X_i soient fermés dans X. Alors, on peut exiger par exemple que chaque X_i soit un *constituant* de X (c'est-à-dire somme de tous les sous-continus de X qui en contiennent un même point) et même qu'il soit homéomorphe au segment rectiligne privé d'un bout. Un tel X, qui est évidemment encore un F_σ, est réalisé sur le plan par l'exemple 2 (voir p. 235).

Telles sont les formes de la décomposabilité paradoxale des X localement connexes qui nous soient connues jusqu'à présent.

Le problème suivant reste ouvert:

P 253. Existe-t-il un $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ *plan* (variante: où les X_i sont géométriquement semblables deux à deux), connexe, *héréditairement* localement connexe et tel que tous les X_i soient des arcs (variantes: ensembles compacts, ensembles fermés dans X, constituants de X aux diamètres tendant à 0) disjoints deux à deux?

D'autre part, aucun espace métrique complet, connexe et localement connexe ne peut être décomposé en une suite dénombrable d'ensembles fermés dans lui (voir le théorème 2, p. 234). En particulier, une telle décomposition est impossible pour un X métrique, connexe, localement connexe et localement compact, car X est alors un G_δ dans un espace compact [7], donc complet (tout en étant à la fois un F_σ).

Les résultats qui viennent d'être résumés montrent que le seuil des singularités — et même d'emblée celui des plus accentuées — que manifeste la notion de connexité, si simple et régulière pour les continus, se trouve non pas au passage des ensembles localement connexes à ceux connexes tout court, mais déjà dans la famille des ensembles localement connexes et même héréditairement localement connexes, à savoir au passage de ceux qui sont des G_δ (dans des espaces métriques complets) à ceux qui ne le sont pas.

Tous les espaces X considérés dans la suite sont supposés métriques. Les notations sont celles employées dans l'oeuvre de Kuratowski (voir [3] et [4]).

II. Théorèmes

THÉORÈME 1. *$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ étant une série d'ensembles fermés dans X, non-vides, disjoints et tels que*

$$\lim_{i\to\infty} \delta(X_i) = 0, \tag{1}$$

on a une décomposition $X = M + N$ en deux ensembles fermés disjoints de la forme

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} X_{i_j} \quad \text{et} \quad N = \sum_{j=1}^{\infty} X_{k_j}. \tag{2}$$

Démonstration. Notons d'abord que

(i) *F étant fermé dans X, il en est de même de l'ensemble*

$$A^* = \sum_{X_i \cdot F \neq 0} X_i.$$

En effet, soit $p_0 \in X$. Il existe donc un i_0 tel que $p_0 \in X_{i_0}$. Il s'agit de montrer que $p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$, où $p_n \in A^*$ pour $n = 1, 2, \ldots$ entraîne

---

(5) Soit par exemple $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ où X_i est l'arc formé par le segment de droite unissant le point $(1/2^i, 1)$ au point $(1/2^i, 0)$ et par les trois quarts de la circonférence de centre $(0, 0)$ unissant le point $(1/2^i, 0)$ au point $(0, 1/2^i)$. Cet exemple ne diffère de celui localement compact, donc un G_δ, dû à Sierpiński (voir [4], p. 115) que par la suppression des intervalles ouverts $1/2^i < y < 3/2^{i+1}$ et $3/2^{i+2} < y < 1/2^i$ de l'axe d'ordonnées. La démonstration de la connexité est la-même.

(6) Voir [8].

(7) Voir [4], p. 50.

$p_0 \epsilon A^*$. On peut se borner, évidemment, au cas où tout p_n appartient à un X_{i_n} différent. Mais alors on a $(p_0) = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} X_{i_n}\cdot F$ en vertu de (1), d'où $p_0 \epsilon F$, puisque F est fermé. On a donc $p_0 \epsilon X_{i_0}\cdot F$, d'où $X_{i_0}\cdot F \neq 0$ et par conséquent $X_{i_0} \subset A^*$ d'après la définition de A^*. Ainsi, (i) est établi.

Considérons à présent, pour $p \epsilon X$ et $\varepsilon \geqslant 0$, la sphère massive $Q(p, \varepsilon) = \underset{x\epsilon X}{E}\{\varrho(p, x) \leqslant \varepsilon\}$, où ϱ désigne la distance dans X. Posons pour $A \subset X$, $B \subset X$ et m entier quelconques

$$(3) \qquad Q(A, m; B) = \sum_{p\epsilon A} Q\big(p, \varrho(p, B)/m\big),$$

où $\varrho(p, B) = \inf_{x\epsilon B} \varrho(p, x)$. Nous allons montrer que

(ii) *A et B étant fermés dans X et disjoints, on a pour tout $m = 2, 3, \ldots$*

$$B\cdot\overline{Q(A, m; B)} = 0.$$

En effet, m étant fixé, soit $q = \lim_{n\to\infty} q_n$, où $q_n \epsilon Q(A, m; B)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il existe donc des $p_n \epsilon A$ tels que

$$(4) \qquad q_n \epsilon Q\big(p_n, \varrho(p_n, B)/m\big) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il s'agit de montrer que $q \epsilon X - B$. Il en est sûrement ainsi lorsque $\lim_{n\to\infty} \varrho(p_n, B)/m = 0$, car on a alors $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = q$ en vertu de (4), d'où $q \epsilon A$ (puisque A a été supposé fermé dans X) et $A\cdot B = 0$ par hypothèse. Reste donc à admettre l'existence d'un nombre $\lambda > 0$ et d'une suite d'indices $\{n_j\}$ telle que $\varrho(p_{n_j}, B)/m > \lambda$ pour $j = 1, 2, \ldots$ Mais il en résulte d'après la conséquence $\varrho(q_n, B) \geqslant \varrho(p_n, B) - \varrho(p_n, B)/m$ de (4) que $\varrho(q_{n_j}, B) > (m-1)\lambda > 0$ (puisque $m > 1$), d'où $\lim_{j\to\infty} q_{n_j} = \lim_{n\to\infty} q_n = q \epsilon X - B$. Ainsi, (ii) est également établi.

Appelons, pour abréger, *série* tout ensemble fermé dans X et qui est une somme finie ou infinie des X_i. Nous allons montrer que

(iii) *A étant une série et B fermé dans X, disjoint de A, il existe pour tout $m = 1, 2, \ldots$ une série A^* satisfaisant aux conditions:*

$$(5) \qquad A \subset \operatorname{Int}(A^*),$$

$$(6) \qquad A^* \subset Q(A, m; B).$$

En effet, m étant fixé, soit $p \epsilon A$, donc $\varrho(p, B) > 0$. Les X_i étant disjoints deux à deux et A en étant une série, $X_i - A \neq 0$ entraîne $X_i\cdot A = 0$, donc aussi $\varrho(p, X_i) > 0$. Il en résulte en vertu de (1) l'existence d'un nombre $\varepsilon(p) > 0$ pour lequel $\varrho(p, X_i) \leqslant \varepsilon(p)$ et $X_i - A \neq 0$ entraînent $X_i \subset Q\big(p, \varrho(p, B)/m\big)$. En désignant donc par $I(p)$ l'ensemble de tous les i pour lesquels

$$(7) \qquad \varrho(p, X_i) \leqslant \varepsilon(p)/2 \quad \text{et} \quad X_i - A \neq 0$$

et en posant

$$(8) \qquad A^\varepsilon = A + \sum_{p\epsilon A} \sum_{i\epsilon I(p)} X_i,$$

il vient d'après (3)

$$(9) \qquad A^\varepsilon \subset Q(A, m; B).$$

De plus, $p \epsilon A$ et $\varrho(p, x) \leqslant \varepsilon(p)/2$ entraînent $x \epsilon A^\varepsilon$ en vertu de (8) car même lorsque $x \epsilon X - A$, celui des sommandes X_i de X qui contient le point x satisfait aux conditions $\varrho(p, X_i) \leqslant \varrho(p, x) \leqslant \varepsilon(p)/2$ et $X_i - A \neq 0$, c'est-à-dire à (7), et se trouve donc rangé dans A^ε. Ainsi, A^ε contient $Q(p, \varepsilon(p)/2)$ pour tout $p \epsilon A$, d'où

$$(10) \qquad A \subset \operatorname{Int}(A^\varepsilon).$$

Posons

$$(11) \qquad A^* = \sum_{X_i\cdot \overline{A^\varepsilon} \neq 0} X_i.$$

Ainsi défini, A^* est fermé dans X en vertu de (i) en y posant $F = \overline{A^\varepsilon}$. D'après (11), A^* est donc une série. X en étant une par définition et A^ε étant un sous-ensemble de X en vertu de (8), on a d'après (11) aussi $A^\varepsilon \subset A^*$. Il en résulte en vertu de (10) que A^* satisfait à la condition (5).

Quant à la condition (6), il suffit, en vertu de (11), de montrer que $X_i\cdot\overline{A^\varepsilon} \neq 0$ entraîne $X_i \subset Q(A, m; B)$. On peut se borner au cas où $X_i\cdot(\overline{A^\varepsilon} - A^\varepsilon) \neq 0$, car A^ε étant d'après (8) une somme de certains X_i (puisque A est une série par hypothèse), $X_i\cdot A^\varepsilon \neq 0$ entraîne $X_i \subset A^\varepsilon$ et l'on n'aurait qu'à appliquer (9). Soit donc

$$(12) \qquad q \epsilon X_i\cdot(\overline{A^\varepsilon} - A^\varepsilon).$$

Par conséquent, $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ pour une suite de points $q_n \epsilon A^\varepsilon - A$, puisque $A = \overline{A}$ par hypothèse et $A \subset A^\varepsilon$ en vertu de (8). Il en résulte d'après (7) et (8) l'existence d'une suite de points $p_n \epsilon A$ et d'une suite d'indices $i_n \epsilon I(p_n)$ tels que

$$(13) \qquad q_n \epsilon X_{i_n} \subset A^\varepsilon \quad \text{et} \quad \varrho(p_n, X_{i_n}) \leqslant \varepsilon(p_n)/2 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

La suite $\{i_n\}$ est infinie, car en cas contraire le point q, limite des q_n, se trouverait, en vertu de (13), dans un même $X_{i_n} \subset A^\varepsilon$ (ce sommande de X étant fermé par hypothèse), d'où $q \epsilon A^\varepsilon$, contrairement à (12). Il en résulte en vertu de (1) et (13) que

$$(q) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} X_{i_n}. \tag{14}$$

En même temps, les nombres $\varepsilon(p_n)$ ne tendent pas à 0 avec $n \to \infty$, car on aurait en cas contraire $q = \lim_{n\to\infty} p_n$ en vertu de (14), (1) et (13), d'où encore, contrairement à (12), $q \epsilon A = \bar{A} \subset A^\varepsilon$, puisque $p_n \epsilon A$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On a donc constamment $\varrho(q, q_n) \leqslant \varepsilon(p_n)/4$ et $\delta(X_{i_n}) \leqslant \varepsilon(p_n)/4$ à partir d'un n suffisamment élevé, d'où en vertu de (13)

$$\varrho(p_n, q) \leqslant \varrho(p_n, q_n) + \varrho(q_n, q) \leqslant \varrho(p_n, X_{i_n}) + \delta(X_{i_n}) + \varrho(q, q_n)$$
$$\leqslant \varepsilon(p_n)/2 + \varepsilon(p_n)/4 + \varepsilon(p_n)/4 = \varepsilon(p_n).$$

Il est ainsi démontré que A contient un point p_n situé à la distance au plus égale à $\varepsilon(p_n)$ de l'ensemble X_i, qui contient le point q en vertu de (12). Par conséquent $X_i \subset Q(p_n, \varrho(p_n, B)/m)$ d'après la définition de $\varepsilon(p_n)$, d'où $X_i \subset Q(A, m; B)$ d'après (3), ce qui achève la démonstration de (iii).

L'ensemble M de la forme (2) sera maintenant défini comme la somme d'ensembles M_n fermés, croissants et étant des séries. La suite $\{M_n\}$ et une suite auxiliaire d'indices croissants $\{i_n\}$ seront définies par induction à partir de $M_1 = X_1$ et $i_1 = 2$ de manière que les conditions suivantes soient satisfaites:

$$M_n \cdot (X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}) = 0, \tag{15}$$

$$M_n \subset \operatorname{Int}(M_{n+1}), \tag{16}$$

$$M_{n+1} \subset Q(M_n, 4^n; X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}), \tag{17}$$

(18) i_{n+1} est le plus petit $i > i_n$ pour lequel $M_{n+1} \cdot X_i = 0$.

La condition (15) est satisfaite pour $n = 1$, les sommandes X_i de X étant des ensembles fermés disjoints par hypothèse. En appliquant (iii) à $A = M_n$, $m = 4^n$ et $B = X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}$, posons $M_{n+1} = A^*$. Alors, en supposant M_n et i_n définis conformément à toutes les conditions requises, M_{n+1} est fermé, il est une série et il satisfait à (16) pour $n+1$ et à (17) en vertu de (5) et (6). En appliquant (ii) aux mêmes A, m et B, il vient $(X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}) \cdot Q(M_n, 4^n; X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}) = 0$, d'où $M_{n+1} \cdot (X_{i_1} + \ldots + X_{i_n}) = 0$ en vertu de (17). La réalisation de (15) pour $n+1$ et de (18) est donc assurée toutes les fois qu'il existe un $i > i_n$ tel que l'on ait $M_{n+1} \cdot X_i = 0$ pour M_{n+1} qui vient d'être défini. Si non, posons $M = M_{n+1}$, et si oui, la suite $\{M_n\}$ est infinie; posons alors

$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ (ce qui équivaut d'après (16) à $M = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$).

Dans le premier cas, on aurait donc $M \cdot X_i \neq 0$ pour tout $i > i_n$, d'où $X_i \subset M$ pour tous ces indices, M étant une série. L'inégalité $X_i - M \neq 0$ ne se présenterait donc que pour un ensemble fini de valeurs de i et elle équivaudrait à $X_i \subset X - M$. Pour ces raisons, l'ensemble $N = X - M = \sum_{X_i - M \neq 0} X_i$ serait aussi fermé, donc aussi une série; la décomposition de X en M et N fermés de la forme (2) serait ainsi établie.

Dans le second cas, M et $N = X - M$ sont également de la forme (2) et M est ouvert dans X en vertu de (16). Par conséquent N y est fermé.

Reste donc à montrer que, dans ce cas, $M = \bar{M}$, c'est-à-dire que $\bar{M} \cdot N = 0$ ou — ce qui revient au même, N étant composé en vertu de (18) exactement de tous les X_{i_n} où $n = 1, 2, \ldots$ — que

$$X_{i_n} \cdot \bar{M} = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Nous allons montrer à ce but qu'un indice quelconque $k = 1, 2, \ldots$ et un point $p_k \epsilon M_k$ étant donnés, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots, k-1$ un point $p_n \epsilon M_n$ tel que

$$\varrho(p_n, p_k) < \varrho(p_n, X_{i_n})/2, \tag{20}$$

où i_n sont définis par (18). En effet, vu (3) et (17), il existe pour tout $j = n, n+1, \ldots, k-1$ un $p_j \epsilon M_j$ tel que $p_{j+1} \epsilon Q(p_j, \varrho(p_j, X_{i_1} + \ldots + X_{i_j})/4^j)$, donc que $\varrho(p_j, p_{j+1}) \leqslant \varrho(p_j, X_{i_1} + \ldots + X_{i_j})/4^j \leqslant \varrho(p_j, X_{i_n})/4^j$, car $1 \leqslant n \leqslant j$, d'où $\varrho(p_j, p_{j+1}) \leqslant [\varrho(p_n, X_{i_n}) + \varrho(p_n, p_{n+1}) + \ldots + \varrho(p_{j-1}; p_j)]/4^j$. On a ainsi pour les nombres

$$a = \varrho(p_n, X_{i_n}) \quad \text{et} \quad a_j = \varrho(p_j, p_{j+1}) \tag{21}$$

les inégalités $a_n \leqslant a/4^n$ et $a_j \leqslant (a + \sum_{h=n}^{j-1} a_h)/4^j$, d'où $a_n < a/3^n$ et, en admettant aussi pour $h = n+1, \ldots, j-1$ l'inégalité $a_h < a/3^h$ qui vient de se présenter pour $h = n$, on la retrouve également pour $h = j$; en effet,

$$a_j < \Big(a + \sum_{h=n}^{j-1} a/3^h\Big)\Big/ 4^j = a\Big(1 + \sum_{h=n}^{j-1} 1/3^h\Big)\Big/ 4^j$$
$$= (a/4^j)\{1 + (1/3^n)[(1 - 1/3^{j-n})/(1 - 1/3)]\}$$
$$= (a/4^j)[(1 - 1/3 + 1/3^n - 1/3^j)/(1 - 1/3)]$$
$$< a/(4^j \cdot 2/3) < 3a/(3^3 \cdot 3^{j-2}) = a/3^j.$$

On a ainsi en vertu de (21)

$$\varrho(p_n, p_k) \leqslant \sum_{j=n}^{k-1} \varrho(p_j, p_{j+1}) = \sum_{j=n}^{k-1} a_j < \sum_{j=n}^{k-1} a/3^j < a/2,$$

c'est-à-dire l'inégalité (20).

Il est donc démontré que $n < k$ entraîne, en termes de la définition (3), $M_k \subset Q(M_n, 2; X_{i_n})$, d'où

$$M = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \subset Q(M_n, 2; X_{i_n}) \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vu que $M_n \cdot X_{i_n} = 0$ en vertu de (15), on a d'après (ii), en y posant $A = M_n$, $B = X_{i_n}$ et $m = 2$, l'égalité $X_{i_n} \cdot \overline{Q(M_n, 2; X_{i_n})} = 0$, d'où (19), ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ étant la décomposition d'un espace X en ensembles X_i fermés dans X et satisfaisants à* (1), *toute composante de X_i* ($i = 1, 2, \ldots$) *est une composante de X.*

THÉORÈME 2. *$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ étant une série d'ensembles fermés dans X (supposé connexe), non-vides et disjoints, X n'est pas à la fois localement connexe et complet* ([8]).

Démonstration. Supposons le contraire. En tant que complet, connexe et localement connexe, X serait localement connexe par arcs ([9]), donc aussi connexe par arcs tout court ([10]). Soit A un arc unissant dans X un point de X_i à un point de X_j où $j \neq i$. On aurait donc la décomposition $A = \sum_{i=1}^{\infty} A \cdot X_i$ en sommandes disjoints et fermés dans $A \cdot X = A$ dont au moins deux, à savoir $A \cdot X_i$ et $A \cdot X_j$, seraient non-vides. C'est toutefois impossible en vertu du théorème de Sierpiński, précité au renvoi ([2]), p. 227.

Le théorème 2 est ainsi démontré. La décomposition qu'il concerne peut se présenter cependant pour des X connexes qui sont des G_δ sans être localement connexes (tel l'exemple plan précité au renvoi ([5]), p. 228), et pour des X localement connexes qui sont des F_σ sans être des G_δ (tel l'exemple plan 3 qui va suivre).

([8]) donc aussi G_δ dans un espace métrique et complet (voir [3], p. 315 et 316).
([9]) en vertu du théorème de Mazurkiewicz-Moore-Menger (voir [4], p. 184).
([10]) Cf. ibidem, p. 182, 2.

III. Exemples

EXEMPLE 1. *Ensemble $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ connexe, héréditairement localement connexe et tel que les X_i sont des arcs disjoints, composés chacun d'un nombre fini de demi-circonférences.*

Soit, dans l'espace $\mathcal{E}^3$, X_i l'arc composé de $p_i - 2$ demi-circonférences unissant sur le plan $z = y/i$ successivement les $p_i - 1$ points

(22) $\quad (1/p_i, 0, 0), \quad (2/p_i, 0, 0), \quad \ldots, \quad (1-(1/p_i), 0, 0)$

de l'axe d'abscisses, p_i étant le i-ème nombre premier à partir de $p_1 = 3$. Les arcs X_i sont donc disjoints deux à deux.

Soit $\mathcal{I}$ le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ de l'axe d'abscisses. L'ensemble $\bar{X} = X + \mathcal{I}$ est l'exemple connu d'un continu héréditairement localement connexe qui contient une suite infinie d'arcs disjoints *de diamètres ne tendant pas à zéro* ([11]), à savoir la suite $\{X_i\}$. Or la connexité locale héréditaire du continu $\bar{X}$ entraîne celle, également héréditaire, de X, si X est connexe ([12]). Il l'est en effet, puisqu'en supposant que $X = M + N$, $\bar{M} \cdot N + M \cdot \bar{N} = 0$ et $X_m \subset M$, le bout $(1/p_m, 0, 0)$ par exemple de la première demi-circonférence de l'arc X_m se trouverait dans $\bar{M}$ avec son entourage U_m ouvert dans $X \cdot \mathcal{I}$ (sinon, l'on aurait $M \cdot \bar{N} \neq 0$) et la situation serait tout à fait analogue pour $X_n \subset N$; en choisissant donc un i tel que $1/p_i < \min\{\delta(U_m), \delta(U_n)\}/2$, l'ensemble des points (22), à savoir celui des bouts de X_i, empièterait sur $U_m \subset M$ et sur $U_n \subset N$ simultanément, ce qui est impossible pour $X_i \subset M + N$ connexe, M et N étant séparés.

L'existence d'un tel X sur le plan est un problème ouvert (voir p. 228).

EXEMPLE 2. *Ensemble $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ plan connexe, localement connexe (mais pas héréditairement localement connexe) et tel que les X_i sont des arcs sans un de leurs bouts, que $\lim_{i\to\infty} \delta(X_i) = 0$ et qu'ils sont des constituants de X* (fig. 1).

Oxy étant un système de coordonnées sur le plan $\mathcal{E}^2$, adoptons les notations suivantes:

(I) $\langle p, q \rangle$ est le segment de droite aux bouts p et q.

([11]) Voir [11], p. 46, [12], p. 333 et [4], p. 197. Un tel exemple est impossible sur $\mathcal{E}^2$.
([12]) d'après un théorème général de R. L. Wilder (voir [4], p. 199, 5^0, en y désignant E par X).

(II) C_0 est le carré aux sommets opposés $(0, -1)$ et $(2, 1)$; $p_* = (0, -1)$, $p^* = (0, 1)$.

(III) B_0 (*base* de C_0) est le côté $\langle (0, -1), (0, 1)\rangle$ de C_0.

(IV) C/B est le carré C *orienté*, à savoir dont le côté B lui est assigné comme sa base.

(V) $f_{C/B}$: $C_0/B_0 \to C/B$ est la fonction transformant *par similitude* le carré orienté C_0/B_0 en carré orienté C/B de façon que $B = f_{C/B}(B_0)$, f_{C_0/B_0} étant l'identité.

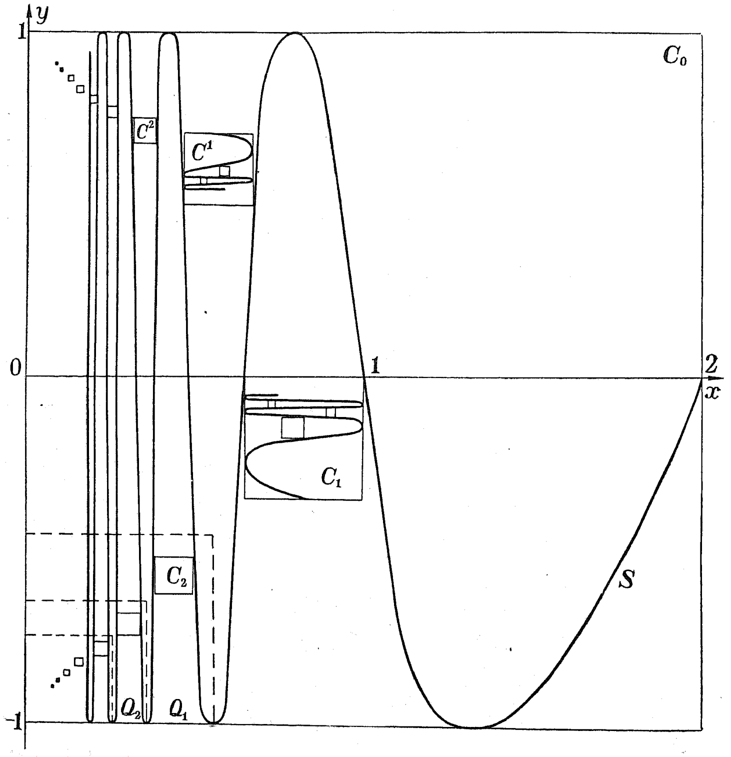

Fig. 1

S étant l'ensemble de points (x, y) où $y = \sin(2\pi/x)$ et $0 < x \leqslant 2$ (donc ensemble homéomorphe au segment de droite sans un bout), on a évidemment

(23) $$S \subset C_0.$$

Désignons pour $n = 1, 2, \ldots$ par p_n et q_n respectivement les points d'intersection (uniques) de la droite $y = (1-n)/n$ avec la partie de S pour laquelle $4/(4n+3) \leqslant x \leqslant 4/(4n-1)$, et par p^n et q^n respectivement ceux (également uniques) de la droite $y = n/(n+1)$ avec la partie de S pour laquelle $4/(4n+5) \leqslant x \leqslant 4/(4n+1)$. Supposons en outre que les abscisses de p_n et p^n soient inférieures à celles de q_n et q^n respectivement. Désignons par C_n le carré de base $B_n = \langle p_n, q_n\rangle$ situé sur le demi-plan $y \leqslant (1-n)/n$ et par C^n celui ayant pour base $B^n = \langle p^n, q^n\rangle$ situé sur le demi-plan $y \geqslant n/(n+1)$ respectivement.

Notons les relations évidentes pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$\varrho(p_n, q_n) \leqslant 4/(4n-1) - 4/(4n+3) < 3/(4n-1) \leqslant 1/n,$$
$$\varrho(p^n, q^n) \leqslant 4/(4n+1) - 4/(4n+5) < 2/(4n+1) < 1/(n+1),$$

d'où

(24) $$C_n \subset C_0 \quad \text{et} \quad C^n \subset C_0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

la distance entre les droites $y = (1-n)/n$ et $y = -1$ étant égale à $1/n$ et celle entre les droites $y = 1$ et $y = n/(n+1)$ étant égale à $1/(n+1)$. Vu que $\delta(C_n) = \sqrt{2}\varrho(p_n, q_n)$ et $\delta(C^n) = \sqrt{2}\varrho(p^n, q^n)$, il en résulte que $\delta(C_n) < \sqrt{2}/n > \delta(C^n)$, d'où

(25) $$\delta(C_n) < 2\sqrt{2}/2n = \delta(C_0)/2n > \delta(C^n) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Notons enfin qu'étant donné un carré orienté quelconque C/B, la similitude $f_{C/B}$ y détermine la ligne $f_{C/B}(S)$, de même que les deux suites infinies de carrés orientés

(26) $$\{f_{C/B}(C_n/B_n)\} \quad \text{et} \quad \{f_{C/B}(C^n/B^n)\} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et que cette ligne, de même que ces carrés, sont des sous-ensembles de C en vertu de (V), (23) et (24).

$F_{C/B}$ étant la famille de carrés orientés composée des deux suites (26), nous pouvons donc poser par recurrence d'une façon générale

(27) $$F^1_{C/B} = F_{C/B} \quad \text{et} \quad F^j_{C/B} = \sum F_{C'/B'} \quad \text{où} \quad C'/B' \in F^{j-1}_{C/B}$$

pour $j = 2, 3, \ldots$

Ceci fait, soit en particulier

(28) $$X = S + \sum_{j=1}^{\infty} \sum f_{C/B}(S) \quad \text{où} \quad C/B \in F^j_{C_0/B_0}.$$

Ainsi défini, X *est un* F_σ *plan*, car tous les sommandes de la somme (28) sont semblables à S. En les rangeant en une suite, nous pouvons donc écrire $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, où $X_1 = S$.

X *est connexe*, chacun d'eux l'étant comme l'image semblable de S et parce qu'ils sont disposés par définition de façon que toute courbe $f_{C/B}(S)$ où $C/B \in F^j_{C_0/B_0}$ a des points-limites (exactement deux) sur l'une des courbes $f_{C'/B'}(S)$ où $C'/B' \in F^{j-1}_{C_0/B_0}$.

En détail: l'ensemble $S \cdot \overline{f_{C/B}(S)}$ n'étant vide pour aucun $C/B \in F^1_{C_0/B_0}$, la somme

$$S_1 = S + \sum f_{C/B}(S) \quad \text{où} \quad C/B \in F^1_{C_0/B_0}$$

est un ensemble connexe; or la connexité de l'ensemble

$$S_n = S + \sum_{j=1}^{n} \sum f_{C/B}(S) \quad \text{où} \quad C/B \in F^j_{C_0/B_0} \tag{29}$$

entraîne celle de l'ensemble S_{n+1}, représentable d'après (29) par la formule

$$S_{n+1} = S_n + \sum f_{C/B}(S) \quad \text{où} \quad C/B \in F^{n+1}_{C_0/B_0}; \tag{30}$$

en effet, pour chacun de ces C/B, il existe d'après (27) un $C'/B' \in F^n_{C_0/B_0}$ tel que $C/B \in F_{C'/B'}$, d'où

$$f_{C'/B'}(S) \subset S_n \tag{31}$$

en vertu de (29) et parce que l'ensemble $f_{C'/B'}(S) \cdot \overline{f_{C/B}(S)}$ est composé de deux points, donc non-vide; les deux facteurs étant connexes, leur somme l'est donc également, d'où la connexité de $S_n + f_{C/B}(S)$ en vertu de celle de S_n et d'après (31); la connexité de S_{n+1} en résulte en vertu de (30). Reste à conclure de (28) et (29) que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} S_n,$$

la suite $\{S_n\}$ étant ascendante d'après (30).

Pour établir la *connexité locale de* X, notons que X est en chacun de ses points d'ordre 1, 2 ou $\aleph_0$. Il suffit donc de se borner à ces derniers points, c'est-à-dire aux points de la forme $p \in X_{i'} \cdot X_{i''}$, où $i' \neq i''$, ces facteurs étant des sommandes différents de la somme (28): à savoir si $X_{i'}$ en est un de S_n, $X_{i''}$ l'est de S_{n+1}. Il est facile de montrer que les entourages ouverts de p dans $X - X_{i'} + (p)$ sont alors semblables à ceux du point $p_* = (0, -1)$ dans l'ensemble connexe $X + (p_*)$, en particulier aux ensembles

$$U_n = [X + (p_*)] \cdot Q_n \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

Q_n étant le carré aux sommets opposés p_* et $(4/(4n+3), 4/(4n+3)-1)$ privé de ses côtés supérieur et droit. On a donc d'après la définition des carrés C_n

$$C_m \subset Q_n \quad \text{pour} \quad m = n+1, n+2, \ldots, \tag{33}$$

car $m > n$ entraîne $(1-m)/m < 4/(4n+3)-1$, et

$$\delta(U_n) \leqslant 4\sqrt{2}/(4n+3) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

car $U_n \subset Q_n$ d'après (32); le raisonnement est d'ailleurs tout à fait analogue pour le point $p^* = (0, 1)$. En désignant par L_m l'arc sans bouts qui est la composante du point $w_m = (4/(4m+3), -1)$ dans $S \cdot Q_n$, on déduit de (32) et (33) l'égalité

$$U_n - (p_*) = \sum_{m=n+1}^{\infty} X \cdot C_m + \sum_{m=n}^{\infty} L_m.$$

Chacun des ensembles $X \cdot C_m$ est connexe comme semblable (par la similitude f_{C_m/B_m}) à l'ensemble $X + (p_*) + (p^*)$ et on a

$$L_m \cdot (X \cdot C_{m+1}) = (q_{m+1}) \neq 0 \neq (p_{m+1}) = L_{m+1} \cdot (X \cdot C_{m+1})$$

pour $m = n, n+1, \ldots$ Il en résulte la connexité de $U_n - (p_*)$, donc aussi celle de U_n, car $p^* = \lim_{m \to \infty} w_m$ et $w_m \in L_m \subset U_n$ pour $m = n, n+1, \ldots$

La connexité locale de X au point p_* (donc aussi au point p^*) est ainsi établie. Pour les autres points $p \in X$ d'ordre $\aleph_0$, considérons les ensembles $f_{C/B}(U_n)$, semblables à U_n d'après (V). En désignant par λ le coefficient de cette similitude, on a donc suivant (34)

$$\delta[f_{C/B}(U_n)] \leqslant \lambda \cdot 4\sqrt{2}/(4n+3) \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Comme $p \in X$, il existe un X_m tel que $p \in X_m$. Soit L_ε un arc sans bouts, où $p \in L_\varepsilon \subset X_m$ et $\delta(L_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Alors l'ensemble $f_{C/B}(U_n) + L_\varepsilon$ est connexe, constitue un entourage ouvert de p dans X et son diamètre ne dépasse pas $\varepsilon + \lambda \cdot 4\sqrt{2}/(4n+3)$ en vertu de (35); il est donc aussi petit que l'on veut.

Cependant la connexité locale de X n'est pas héréditaire: le sous-ensemble $M = \overline{f_{C_1/B_1}(S)} \cdot X$ par exemple est connexe sans être localement connexe au point $q = f_{C_1/B_1}(p_*) \in M$.

Pour montrer que les X_i satisfont à la condition (1), notons que

$$C/B \in F^j_{C_0/B_0} \text{ entraîne } \delta(C) < \delta(C_0)/2^j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

En effet, la conséquence $\delta(C_n) < \delta(C_0)/2 > \delta(C^n)$ de (25) entraîne, d'après (26) et (27), $\delta(C) < \delta(C')/2$ pour $C/B \in F^1_{C'/B'}$, d'où (36) pour

$j=1$ par substitution de C_0/B_0 à C'/B'. Il en résulte (36) pour $i=2,3,\ldots$ par une induction facile en considérant $F_{C'/B'}$ comme $F^1_{C'/B}$ dans (27).

Vu que $f_{C/B}(S)\subset C$ d'après (V) et (23), on a donc, en vertu de (36), $\delta[f_{C/B}(S)]<\delta(C_0)/2^j$ pour $C/B\in F^j_{C_0/B_0}$, c'est-à-dire (1) pour les sommandes de (28) considérés comme des X_i.

Reste à montrer qu'*ils sont des constituants de* X. Rappelons que, vu (V) et (28), ils sont par définition des courbes sans un bout, disjointes deux à deux et que $\overline{X_1}\cdot X-X_1=\overline{S}\cdot X-S$ est vide, tandis que, pour tout $i=2,3,\ldots$, $\overline{X_i}\cdot X-X_i$ se compose de deux points, à savoir de points $f_{C/B}(p_*)$ et $f_{C/B}(p^*)$ lorsque $X_i=f_{C/B}(S)$ pour un $C/B\in F^k_{C_0/B_0}$ (avec k quelconque). Ainsi,

(37) on a $\overline{X_1}\cdot X=S$ et $\overline{X_i}\cdot X$ est semblable à $S+(p_*)+(p^*)$.

En outre,

(38) si $K\subset S+(p_*)+(p^*)$ est un ensemble compact, on a la décomposition $K\cdot S=\sum_{h=1}^{\infty}K_h$, ces sommandes (vides ou non) étant compacts et disjoints.

Soit, en effet, $a_k=(1/2^k,0)$ pour $k=1,2,\ldots$; donc $a_k\in S$ et $(0,0)=\lim_{k\to\infty}a_k$. Vu que le point $(0,0)$ n'appartient pas à $S+(p_*)+(p^*)$ et que K est compact, on a $a_k\in S-K$ à partir d'un $k=n$. Par conséquent,

$$K\cdot S=K\cdot\big(S-\{a_k\}_{k=n+1,n+2,\ldots}\big)=\sum_{h=1}^{\infty}K\cdot\Gamma_h$$

où Γ_h est la h-ième composante de la différence figurant entre parenthèses. Reste à poser $K_h=K\cdot\Gamma_h$.

Les courbes X_i étant des semi-continus, la démonstration qu'ils sont des constituants de X se réduit à établir l'existence, pour tout sous-continu K de X, d'un seul i tel que $K\subset X_i$. Or, K étant compact, il en est de même de $K\cdot\overline{X_i}\cdot X$ pour $i=1,2,\ldots$; on a donc, en vertu de (37) et (38), $K\cdot X_i=\sum_{h=1}^{\infty}K_{ih}$ pour tout $i=1,2,\ldots$, d'où

$$K=K\cdot X=\sum_{i=1}^{\infty}K\cdot X_i=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}K_{ih}, \tag{39}$$

les K_{ih} étant compacts et disjoints pour tous les couples différents d'indices i et h (puisque les X_i le sont aussi pour des i différents). En

supposant que l'on ait à la fois $K\cdot X_{i_1}\neq 0\neq K\cdot X_{i_2}$, donc $K_{i_1h_1}\neq 0$ et $K_{i_2h_2}\neq 0$, il y aurait dans la décomposition (39) du continu K en une infinité dénombrable de sommandes compacts disjoints au moins deux non-vides, ce qui est impossible en vertu du théorème précité de Sierpiński (voir le renvoi (²), p. 227).

Toutes les propriétés requises de X sont ainsi établies. L'existence d'un pareil X, mais qui soit en outre héréditairement localement connexe, est un problème ouvert (voir p. 228).

EXEMPLE 3. *Ensemble* $X=\sum_{i=1}^{\infty}X_i$ *plan connexe, localement connexe (mais pas héréditairement localement connexe) et tel que les* X_i *sont des segments de droites disjoints* (voir fig. 2).

En vertu du théorème 1, cet exemple ne satisfait donc pas à la condition (1). L'idée de sa construction est proche de celle de l'exemple précédent, dont elle diffère surtout en ce que les demi-oscillations des courbes sinusoïdales y sont remplacées par des suites de segments parallèles, d'où la nécessité d'interposer deux suites au lieu d'une seule entre des demi-oscillations successives désunies.

Gardons les notations (I)-(V) de l'exemple 2 et ajoutons-y, au lieu de S et $F_{C/B}$, les suivantes pour $n=1,2,\ldots$:

(VI) $r_n=\big(1/n,\,-n/(n+1)\big)$, $s_n=\big(1/(n+1),\,-n/(n+1)\big)$,

$r^n=\big(1/n,\,n/(n+1)\big)$, $s^n=\big(1(n+1),\,n/(n+1)\big)$;

(VII) I_n est le segment $\langle r_n, r^n\rangle$.

On a donc $s_n\in I_{n+1}$ et $s^n\in I_{n+1}$ pour $n=1,2,\ldots$ Posons

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}I_n; \tag{40}$$

on a donc en vertu de (II)

$$T\subset \mathrm{Int}(C_0). \tag{41}$$

Désignons par E_n le carré de base $D_n=\langle r_n, s_n\rangle$ situé sur le demi-plan $y\leqslant -n/(n+1)$ et par E^n celui de base $D^n=\langle r^n, s^n\rangle$ situé sur le demi-plan $y\geqslant n/(n+1)$. On a donc pour $n=1,2,\ldots$

$$E_n+E^n\subset C_0, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(E_m)\cdot\mathrm{Int}(E_n)&=\mathrm{Int}(E^m)\cdot\mathrm{Int}(E^n)\\&=\mathrm{Int}(E_m)\cdot\mathrm{Int}(E^n)=\mathrm{Int}(E_n)\cdot\mathrm{Int}(E^n)=0\quad\text{pour}\quad m\neq n.\end{aligned} \tag{43}$$

Étant donné un carré orienté C/B quelconque, la similitude $f_{C/B}$ définie par (V) y détermine par conséquent l'ensemble $f_{C/B}(T) \subset C$ et deux suites infinies

(44) $\quad \{f_{C/B}(E_n/D_n)\}$ et $\{f_{C/B}(E^n/D^n)\}$ où $n = 1, 2, \ldots$

de carrés orientés contenus également dans C. En désignant donc par $G_{C/B}$ la famille de tous les termes des suites (44), nous pouvons poser par recurrence

(45) $\quad G^1_{C/B} = G_{C/B}$ et $G^j_{C/B} = \sum G_{C'/B'}$ où $C'/B' \epsilon G^{j-1}_{C/B}$

pour $j = 2, 3, \ldots$, et finalement

(46) $$X = T + \sum_{j=1}^{\infty} \sum f_{E/D}(T) \quad \text{où} \quad E/D \epsilon G^j_{C_0/B_0}.$$

Ainsi défini, X *est un* F_σ *plan, composé d'une infinité dénombrable de segments rectilignes disjoints.*

En effet, T l'étant d'après (VI), (VII) et (40), il en est de même de tout $f_{E/D}(T)$, et E/D parcourt d'après (46) une infinité dénombrable de familles $G^j_{C_0/B_0}$ dont chacune est dénombrable par définition (45). En rangeant tous ces segments en une suite, nous pouvons donc écrire $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$.

Pour montrer que ces segments sont disjoints deux à deux, notons les propriétés (47) et (48) suivantes des familles $G^j_{C_0/B_0}$, où $j = 1, 2, \ldots$:

(47) Si $E' \neq E''$, $E'/D' \epsilon G^j_{C_0/B_0}$ et $E''/D'' \epsilon G^j_{C_0/B_0}$, on a
$$\mathrm{Int}(E') \cdot \mathrm{Int}(E'') = 0.$$

En effet, en vertu de (43), on a (47) pour $j = 1$, conformément à (44) et (45). Il en résulte par une induction évidente que si les carrés orientés E'/D' et E''/D'' de $G^{j+1}_{C_0/B_0}$ sont situés dans un même E/D de $G^j_{C_0/B_0}$, leurs intérieurs sont disjoints; il en est de même s'ils sont situés dans deux carrés distincts appartenant à $G^j_{C_0/B_0}$, les intérieurs de ces derniers étant disjoints en vertu de la propriété (47) présupposée pour j dans l'induction.

(48) Si $E/D \epsilon G^j_{C_0/B_0}$, on a $T \cdot \mathrm{Int}(E) = 0$ et, en outre,

$f_{E'/D'}(T) \cdot \mathrm{Int}(E) = 0$ pour tous les $E'/D' \epsilon G^k_{C_0/B_0}$ où $k = 1, 2, \ldots, j-1$.

En effet, pour $j = 1$ la première partie de (48) revient aux égalités

(49) $\quad T \cdot \mathrm{Int}(E_n) = T \cdot \mathrm{Int}(E^n) = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$,

qui sont des conséquences directes des définitions de E_n, E^n et T,

la seconde partie de (48) étant satisfaite trivialement par défaut de la classe $G^1_{C_0/B_0}$. Or $E/D \epsilon G^{j+1}_{C_0/B_0}$ équivaut d'après (45) à $E/D \epsilon G_{E'/D'}$ pour un $E'/D' \epsilon G^j_{C_0/B_0}$, d'où $E \subset E'$, donc $\mathrm{Int}(E) \subset \mathrm{Int}(E')$ par similitude d'après (V), (42) et (44).

En admettant donc (48) pour j, les deux parties s'en trouvent établies pour $j+1$, excepté l'égalité
$$f_{E'/D'}(T) \cdot \mathrm{Int}(E) = 0$$
pour les carrés orientés $E/D \epsilon G^{j+1}_{C_0/B_0}$ et $E'/D' \epsilon G^j_{C_0/B_0}$, pour lesquels il existe donc, en vertu de (45), un $E^*/D^* \epsilon G^j_{C_0/B_0}$ tel que

(50) $$E/D \epsilon G^1_{E^*/D^*}.$$

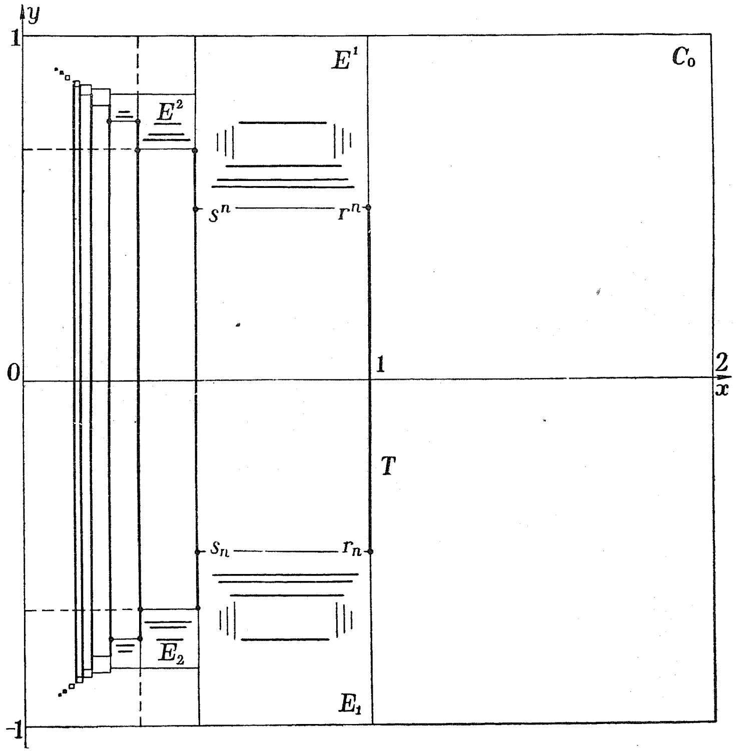

Fig. 2

Deux cas sont à considérer:

1° $E' = E^*$. Dans ce cas, (50) entraîne, vu (44) et (45), l'existence d'un $E''/D'' \in G^1_{C_0/B_0}$ tel que $E = f_{E^*/D^*}(E'')$. Or f_{C_0/B_0} étant l'identité, la relation $E''/D'' \in G^1_{C_0/B_0}$ veut dire que l'on a soit $E''/D'' = E_n/D_n$, soit $E''/D'' = E^n/D^n$ pour un $n = 1, 2, \ldots$ et l'égalité à établir en résulte aussitôt, car (en nous bornant par raison de symétrie à la première des deux alternatives) on a dans le cas considéré

$$f_{E'/D'}(T)\cdot\mathrm{Int}(E) = f_{E^*/D^*}(T)\cdot\mathrm{Int}f_{E^*/D^*}(E'') = f_{E^*/D^*}(T)\cdot f_{E^*/D^*}\mathrm{Int}(E'')$$
$$= f_{E^*/D^*}(T)\cdot f_{E^*/D^*}\mathrm{Int}(E_n) = f_{E^*/D^*}(T)\cdot\mathrm{Int}(E_n) = 0$$

en vertu de (49).

2° $E' \neq E^*$. Dans ce cas, (41) entraînant par similitude $f_{E'/D'}(T) \subset \mathrm{Int}(E')$ d'après (V), et (50) entraînant $\mathrm{Int}(E) \subset \mathrm{Int}(E^*)$ d'après (42), l'égalité à établir en résulte comme suit:

$$f_{E'/D'}(T)\cdot\mathrm{Int}(E) \subset \mathrm{Int}(E')\cdot\mathrm{Int}(E) \subset \mathrm{Int}(E')\cdot\mathrm{Int}(E^*) = 0$$

en vertu de (47), car on y peut remplacer E'' par E^* dans le cas considéré.

Les propriétés (47) et (48) ainsi établies montrent — en rappelant que $f_{E/D}(T) \subset \mathrm{Int}(E)$ en vertu de (V) et (41) — que les sommandes T et $f_{E/D}(T)$ de la somme (46) sont disjoints. La structure des $f_{E/D}(T)$ étant semblable à celle de T et T étant composé d'après (40) de segments disjoints, tous les segments X_i formant X sont disjoints deux à deux.

Pour établir la *connexité de* X, nous allons montrer ceci: H étant un ensemble fermé-ouvert dans X et tel que $I_n\cdot H \neq 0$ pour un indice $n \neq 1$, on a $T \subset H$ et $\sum f_{E/D}(T) \subset H$ pour tous $E/D \in G^1_{C_0/B_0}$.

En effet, $I_n\cdot H \neq 0$ entraîne par suite de la connexité de I_n que $I_n\cdot(X-H) = 0$, d'où $I_n \subset H$. On a donc suivant (VI) et (VII)

$$r_n \in I_n, \quad r^n \in I_n, \quad s_{n-1} \in I_n \quad \text{et} \quad s^{n-1} \in I_n$$

- points-limites des bouts de segments dont se composent les ensembles

$$f_{E_n/D_n}(T), \quad f_{E^n/D^n}(T), \quad f_{E_{n-1}/D_{n-1}}(T) \quad \text{et} \quad f_{E^{n-1}/D^{n-1}}(T)$$

respectivement. Comme ouvert (dans X), H contient donc des suites infinies de points de ces ensembles et, par conséquent, les segments tout entiers auxquels ils appartiennent, donc aussi leurs bouts opposés. Or ces derniers convergent vers les points

$$s_n \in I_{n+1}, \quad s^n \in I_{n+1}, \quad r_{n-1} \in I_{n-1} \quad \text{et} \quad r^{n-1} \in I_{n-1}$$

respectivement. Comme fermé (dans X), H contient donc les segments I_{n+1} et I_{n-1}. Reste à appliquer l'induction suivant n, les ensembles $f_{E/D}(T)$ étant semblables à T en vertu de (V).

Ceci établi, il est facile de montrer par l'induction suivant j que tous les sommandes de X figurant dans (46) sont contenus dans H, c'est-à-dire que $H = X$. La décomposition de X en deux ensembles non-vides et séparés, donc fermé-ouverts dans X, est ainsi impossible.

La démonstration de la *connexité locale de* X se réduit, comme pour l'exemple précédent, à celle en ses points d'ordre infini, à savoir en chaque point $p \in X_i\cdot D$ pour $E/D \in G^j_{C_0/B_0}$, où $j = 1, 2, \ldots$

Soit R_n l'intérieur du carré aux sommets opposés p_* et $(1/n, (1-n)/n)$; on a donc $\delta(R_n) = \sqrt{2}/n$. On montre tout comme pour l'exemple précédent que, pour tout indice $n = 1, 2, \ldots$, l'ensemble $V_n = [X+(p_*)]\cdot R_n$ est un entourage ouvert et connexe de p_* dans $X+(p_*)$ et que certains entourages ouverts de p sont semblables à V_n augmenté de l'intervalle $-1/n < x < 0$ ou $-1/n < x < 1/n$ de la droite $y = -1$, suivant que p correspond à r ou à s (munis d'indices) dans la notation (VI). Ces entourages sont donc connexes et de diamètre arbitrairement petit.

Cependant la connexité locale de X n'est pas héréditaire: le sous-ensemble

$$N = X - \sum_{n=1}^{\infty} f_{f_{E_1/D_1}(E_n/D_n)}(T)$$

par exemple est connexe sans être localement connexe au point $q = f_{E_1/D_1}(p_*) \in N$.

L'existence d'un X ayant les propriétés de l'exemple 3 et, en outre, héréditairement localement connexe, reste un problème ouvert (voir p. 228).

TRAVAUX CITÉS

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[2] B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non-bornés*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 23-58.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948.

[4] — *Topologie II*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1950.

[5] N. J. Lennes, *Curves in Non-Metrical Analysis Situs, with an Application in the Calculus of Variations*, American Journal of Mathematics 33 (1911), p. 287-326.

[6] S. Mazurkiewicz, *Sur les continus plans non bornés*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 188-205.

[7] R. L. Moore, *Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), p. 189-202.

[8] Jan Mycielski, *Problème 314*, Nouveau Livre Écossais, Wrocław 29, X. 1956 (non publié).

[9] W. Sierpiński, *Un théorème sur les continus*, Tôhoku Mathematical Journal 13 (1918), p. 300-303.

[10] — *Sur quelques propriétés topologiques du plan*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 1-6.

[11] P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*, Verhandelingen der Koninklijke Akademie von Wetenschappen, Amsterdam, 1 sectie, 13 (1928), p. 1-172.

[12] G. T. Whyburn, *Concerning points of continuous curves defined by certain im kleinen properties*, Mathematische Annalen 102 (1930), p. 313-336.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 8. 2. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LA CONVERGENCE DES INTÉGRALES

PAR

M. BIERNACKI (LUBLIN)

Je vais établir la proposition suivante:

THÉORÈME. *p étant un nombre positif arbitraire et $y(x)$ une fonction deux fois continûment dérivable pour $x \geqslant x_0$, si $y'(x_0) > 0$, $y''(x) > 0$ pour $x \geqslant x_0$ et si l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} (y'/y'')^p\,dx$$

est convergente, alors il en est de même de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} (y/y')^p\,dx.$$

Dans la démonstration, on peut évidemment supposer que $x_0 = 0$ et que $y'(0) = 1$.

Ce théorème signifie que y''/y' est „en moyenne" plus petite que y'/y. Il est curieux que, dans le cas des fonctions analytiques et des moyennes sur les circonférences, ce soit le contraire qui a lieu (cf. [1]).

LEMME I. *Si $p > 0$ et $q < 1$, on a $(1-q)^{-p} \geqslant 1+qp$.*

Si $q \leqslant -1/p$, l'inégalité est évidente, car le second membre est non positif. Si $q > 0$, le lemme résulte immédiatement de la formule du binôme appliquée au premier membre de l'inégalité.

Si $-1/p < q < 0$, posons $s = -q$; l'inégalité pourra s'écrire $1+s \leqslant (1-ps)^{-1/p}$, où $0 < ps < 1$, et elle résulte encore de la formule du binôme appliquée à son second membre.

LEMME II. *Considérons l'équation différentielle*

$$v' + a(x)v = 1 \tag{1}$$

où $a(x)$ est positive et continue pour $x \geqslant 0$ et où $\int_0^{\infty} dx/[a(x)]^p$ converge.