TRAVAUX CITÉS

[1] L. Antoine, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*, Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Strasbourg, Paris 1921, p. 1-101.

[2] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313.

[3] — *Sur l'évaluation du nombre des paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 1 (1953), p. 3-5.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

REMARQUE SUR LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE ENGENDRÉ PAR LES INTÉGRALES ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

Z. MIKOŁAJSKA (CRACOVIE)

Considérons le système de $p+q$ équations différentielles écrit sous la forme vectorielle

$$\frac{dX}{dt} = F(X, Y), \qquad \frac{dY}{dt} = G(X, Y), \tag{1}$$

où $X = (x_1, \ldots, x_p)$, $Y = (y_1, \ldots, y_q)$, $F = (f_1, \ldots, f_p)$, $G = (g_1, \ldots, g_q)$, $f_i = f_i(X, Y)$, $g_i = g_i(X, Y)$.

Posons $|X| = (x_1^2+\ldots+x_p^2)^{1/2}$, $|Y| = (y_1^2+\ldots+y_p^2)^{1/2}$. Relativement au système (1), nous introduisons l'hypothèse suivante:

Hypothèse H. F et G sont de classe C^1 dans un ensemble ouvert W.

Pour l'ensemble R

$$|X| \leqslant a, \quad |Y| \leqslant b \quad (0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty) \tag{R}$$

on a par hypothèse $R \subset W$.

La frontière F de R se compose, par hypothèse, d'ensemble S des points de sortie stricte

$$|X| < a, \quad |Y| = b, \tag{S}$$

d'ensemble E des points d'entrée stricte

$$|X| = a, \quad |Y| < b, \tag{E}$$

et d'ensemble M des points de glissement extérieur

$$|X| = a, \quad |Y| = b. \tag{M}$$

Remarque 1. Pour la définition des points de sortie stricte, d'entrée stricte et de glissement extérieur, cf. [1] (p. 280).

Les ensembles S, E et M se composent respectivement de points de sortie stricte, d'entrée stricte et de glissement extérieur, si l'on suppose que

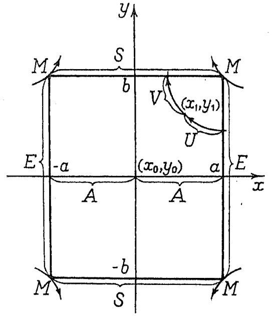
$$YG = \sum_{i=1}^{q} y_i g_i > 0 \quad \text{pour} \quad (X, Y) \epsilon S+M,$$

$$XF = \sum_{j=1}^{p} x_j f_j < 0 \quad \text{pour} \quad (X, Y) \epsilon E+M.$$

Remarque 2. En s'appuyant sur un lemme dû à K. Borsuk et K. Kuratowski, T. Ważewski a prouvé (cf. [2]) que, dans l'hypothèse H, les intégrales du système (1) qui sont asymptotiques relativement à R (c'est-à-dire sont contenues dans R pour $0 < t < \infty$) forment une famille dépendant de p paramètres essentiels au moins.

*

T. Ważewski a posé la question de savoir si, dans l'hypothèse H, l'ensemble K engendré par les intégrales du système (1) qui sont asymptotiques par rapport à R peut être non-connexe.



Le but de la présente note est de montrer que cette question a une réponse affirmative.

A cet effet, posons $x_1 = a/2$, $y_1 = b/2$ où $0 < a < +\infty$, $0 < b < +\infty$, et considérons le système de deux équations

$$\text{(1 bis)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

où $f(x, y) = -x\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$, $g(x, y) = = y\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}$.

L'ensemble R se réduira, dans notre cas, au rectangle $\{|x| \leqslant a, |y| \leqslant b\}$ (cf. la figure).

On vérifie facilement que le système (1 bis) satisfait à l'hypothèse H. Ce système a deux points singuliers: le point $(x_0, y_0) = (0,0)$ et le point (x_1, y_1). Au voisinage des points (x, y) pour lesquels

$$\text{(2)} \qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 > 0,$$

les trajectoires du système (1 bis) coïncident avec celles du système

$$\text{(1 ter)} \qquad \frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = y,$$

car en multipliant les deux équations (1 ter) par *le même* facteur positif (2), on obtient le système (1 bis). Or la totalité des trajectoires de (1 ter)

est la famille d'hyperboles $\{xy = c\}$ $(c \neq 0)$, à part l'intégrale banale $x = 0$, $y = 0$ et les intégrales rectilignes $x = 0$, $y \neq 0$ et $x \neq 0$, $y = 0$ (cf. la figure). Le point singulier (x_1, y_1) est situé sur l'hyperbole $xy = x_1 y_1$. Il divise la branche B de cette hyperbole pour laquelle $0 < x \leqslant a$, $0 < y \leqslant b$ en deux parties: la partie U où $x_1 \leqslant x \leqslant a$ et la partie V où $y_1 \leqslant y \leqslant b$. La partie U appartient à l'ensemble K (cf. l'énoncé du problème de T. Ważewski) car U correspond aux intégrales tendant vers le point singulier (x_1, y_1) pour $t \to \infty$. La partie V ne contient aucun point de K, car elle correspond aux intégrales tendant vers l'infini pour $t \to 0$. L'ensemble K engendré par les intégrales de (1 bis) asymptotiques relativement à l'ensemble R est composé de segment $A\{y = 0, |x| \leqslant a\}$ et d'ensemble U. On a $K = U+A$ et cet ensemble est évidemment non-connexe (cf. fig.).

TRAVAUX CITÉS

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques 20 (1947), p. 279-313.

[2] — *Sur l'évaluation du nombre de paramètres essentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, 1 (1953), p. 3-5.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1958