Soient t et s, $t \gg s$, deux éléments distincts de (10); désignons par (t, s) l'ensemble de tous les éléments x de (10) satisfaisant à la condition (7).

Considérons l'élément s_ξ de (10). D'après les conditions 1°-2°, il existe deux termes de (10), t' et s_{ξ_1}, tels que l'on ait $t' \gg s_\xi \gg s_{\xi_1}$ $(\xi < \xi_1)$ et que l'ensemble (t', s_{ξ_1}) soit au plus dénombrable. Lorsque $t' = s_0$ ou $t' = t_{\eta'}$ $(0 < \eta' < \omega_c)$, la formule (11) est démontrée, car on a dans tous les deux cas l'inclusion $K_\xi \subset (t', s_{\xi_1})$.

Supposons donc que l'on ait $t' = s_{\xi_2}$, $\xi_1 > \xi_2 > 0$, et $\overline{\overline{(s_{\xi_2}, s_{\xi_1})}} \leqslant \aleph_0$.

Au besoin, on reproduit le raisonnement précédent pour s_{ξ_2}, ce qui fournit l'ensemble (s_{ξ_4}, s_{ξ_3}) où l'indice ξ_4 satisfait à l'inégalité

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_4 > 0 \tag{12}$$

et $\overline{\overline{(s_{\xi_4}, s_{\xi_3})}} \leqslant \aleph_0$.

A cause de (12), ce raisonnement ne peut être répété qu'un nombre fini de fois, car, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite infinie de nombres ordinaux décroissants,

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_4 > \xi_6 > \ldots > 0,$$

ce qui est impossible. On obtient donc finalement un ensemble de la forme (t', s_{2k-1}), où l'on a soit $t' = s_{2k} = s_0$, soit $t' = t_{\eta'}$ et $\overline{\overline{(t', s_{2k-1})}} \leqslant \aleph_0$.

On a donc en tout cas

$$K_\xi \subset (s_{\xi_2}, s_{\xi_1}) + (s_{\xi_4}, s_{\xi_3}) + \ldots + (t', s_{2k-1}),$$

ce qui implique (11).

Le nombre ordinal $\xi < \omega_c$ étant choisi arbitrairement, il en résulte que $\omega_c = \omega_1$, c'est-à-dire que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Le Théorème est entièrement démontré.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Popruženko, *Sur l'égalité* $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$, Fundamenta Mathematicae 43 (1956), p. 148-155.

[2] — *Sur la vitesse de croissance des suites infinies d'entiers positifs (I)*, ibidem (à paraître).

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

ON A PROBLEM OF W. KINNA AND K. WAGNER

BY

A. MOSTOWSKI (WARSAW)

W. Kinna and K. Wagner [1] have considered the following property of sets:

(E) *there is a function f which correlates with every subset A of a set M $(\overline{\overline{A}} \geqslant 2)$ a non-void proper subset of A.*

The main result of Kinna and Wagner states that a set with the property (E) can be ordered, whence it follows that the axiom

(K) *every set M has the property* (E)

implies the axiom

(O) *every set can be ordered.*

Kinna and Wagner have raised the question whether (K) and (O) are equivalent on the basis of the usual axioms of set-theory without the axiom of choice. The purpose of this note is to show that the answer to that question is negative.

In [2] I have defined a model $\mathfrak{W}^+$ of the axioms of set-theory in which (O) is true. Hence it is sufficient to show that (K) is false in this model.

From [2], 54 and 59, we easily see that the axiom (K) relativized to the model $\mathfrak{W}^+$ can be written thus: for every $x \in \mathfrak{W}^+ - K$ there is a set $f \in \mathfrak{W}^+$ with the following three properties:

1° f is a set of ordered pairs,

2° if $y \subset x$, $y \in \mathfrak{W}^+ - K$, and if there are elements u, v such that $u \in y$, $v \in y$, and $u \neq v$, then there is an element z such that $\langle z, y\rangle \in f$, $\Lambda_0 \neq z \subset y$, and $z \neq y$,

3° if $\langle z_1, y\rangle \in f$ and $\langle z_2, y\rangle \in f$, then $z_1 = z_2$.

We shall now show that for $x = K$ there is no f with the above properties which will show the fallacy of (K) in $\mathfrak{W}^+$, since $K \in \mathfrak{W}^+ - K$ according to [2], 110.

Let us assume that there is in $\mathfrak{W}^+$ an element f satisfying 1°-3°. It follows from $f \in \mathfrak{W}^+$ that there exists a finite set $A \subset K$ such that $f \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^+(A)}$, i. e., $|\varphi, f| = f$ for all $\varphi \in \mathfrak{G}^+(A)$; cf. [2], 39 and 83.

The set K is ordered by the relation $\prec$ in the order type η (cf. [2], 80). Let $y = (\Lambda_m, \Lambda_n)$ be an open interval of K which contains no element of Λ. It is obvious that $y \in \mathfrak{W}^+$, $y \subset x$ $(= K)$ and that there are at least two elements in y. According to 2° there is a z such that $\langle z, y\rangle \epsilon f$, $\Lambda_0 \neq z, z \subset y$, and $z \neq y$. Let $\Lambda_p \epsilon z$, $\Lambda_q \epsilon y - z$. Now y can be treated as an open interval of the set of rationals and Λ_p, Λ_q as two rational numbers of this interval. Hence there is an increasing mapping of y onto itself which transforms Λ_p in Λ_q. This mapping can be extended to a mapping φ_0 of the whole K onto itself by putting $\varphi_0(\Lambda_r) = \Lambda_r$ for Λ_r lying outside y. We have thus obtained a $\varphi_0 \epsilon \mathfrak{G}^+(\Lambda)$ such that $|\varphi_0, z| \neq z$ since $|\varphi_0, z|$ contains Λ_q. According to 2° $\langle|\varphi_0, z|, |\varphi_0, y|\rangle \epsilon f$ and hence $\langle|\varphi_0, z|, y\rangle \epsilon f$, which in view of the formula $\langle z, y\rangle \epsilon f$ shows that condition 3° is not satisfied.

This concludes the proof that axiom (K) is false in the model.

Kinna and Wagner have also raised the question of the independence of the axiom of choice from the axiom (K). This problem is incomparably more difficult than the problem dealt with in this paper. It seems to me that the solution of the second problem of Kinna and Wagner is beyond the scope of the methods known at present.

REFERENCES

[1] W. Kinna und K. Wagner, *Über eine Abschwächung des Auswahlpostulates*, Fundamenta Mathematicae 42 (1955), p. 75-82.

[2] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, ibidem 32 (1939), p. 201-252.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1958

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR UNE QUESTION CONCERNANT LE NOMBRE DE DIVISEURS PREMIERS D'UN NOMBRE NATUREL

PAR

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

Désignons par $\nu(n)$ le nombre de diviseurs premiers du nombre naturel n. Combien connaît-on actuellement de nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$?

Je prouverai qu'on connaît actuellement 24 tels nombres naturels n et qu'on connaîtra un nouvel chaque fois que l'on trouvera un nouveau nombre premier de Mersenne ou de Fermat. L'hypothèse que le nombre des nombres naturels n tels que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$ est fini équivaut à l'hypothèse que le nombre des nombres premiers de Mersenne, ainsi que celui des nombres premiers de Fermat sont finis.

Voici la démonstration. Si n est un nombre naturel tel que $\nu(n) = \nu(n+1) = 1$, on a évidemment $n = p^\alpha$, $n+1 = q^\beta$, où p et q sont des nombres premiers, α et β des nombres naturels; d'où $q^\beta - p^\alpha = 1$, et on en conclut qu'un des nombres p et q est égal à 2. Si $q = 2$, $p^\alpha = 2^\beta - 1 > 1$ est un nombre de Mersenne, d'où il résulte comme on sait (voir par exemple [2]; cf. aussi [1]) que $\alpha = 1$ et n est un nombre de Mersenne premier.

Si $p = 2$, on a $q^\beta = 2^\alpha + 1$. Si $\beta = 1$, $n+1 = q = 2^\alpha + 1$ est un nombre premier de Fermat. Si $\beta > 1$, $q-1 > 1$ est un diviseur de $q^\beta - 1 = 2^\alpha$ plus petit que $q^\beta - 1$, puisque $q < q^\beta$. Or q est impair. On a donc $q-1 = 2^\gamma$ où γ est un nombre naturel, et comme $2^\alpha = (q-1)(q^{\beta-1} + q^{\beta-2} + \ldots + q + 1)$, on a $q^{\beta-1} + q^{\beta-2} + \ldots + q + 1 = 2^{\alpha-\lambda}$. Le côté gauche de cette égalité est donc un nombre pair et, comme il est une somme de β nombres impairs, on conclut que β est un nombre pair, donc $\beta = 2\mu$, où μ est un nombre naturel. Donc $2^\alpha = q^\beta - 1 = q^{2\mu} - 1 = (q^\mu - 1)(q^\mu + 1)$, d'où $q^\mu - 1 = 2^\delta$, $q^\mu + 1 = 2^{\alpha-\delta}$, où $\delta < \alpha$ est un nombre naturel, ce qui donne $2 = 2^{\alpha-\delta} - 2^\delta$, et comme évidemment $\alpha - \delta \geqslant \delta$, le nombre 2 est divisible par 2^δ, d'où (δ étant un nombre naturel) on trouve $\delta = 1$, donc $q^\mu = 2^\delta + 1 = 3$, d'où $q = 3$, $\mu = 1$, $\beta = 2\mu = 2$, ce qui donne $n = p^\alpha = q^\beta - 1 = 3^2 - 1 = 8$. Ainsi, nous avons le théorème suivant: