(d) Le résultat est démontré (quel que soit λ) pour $\theta > 4$; supposons donc $\theta \leqslant 4$. On sait (cf. [2]) que $\theta \epsilon S$ est la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \pi\theta^n < \infty$ et aussi bien

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi\theta^n P(\theta) < \infty,$$

$P(\theta)$ étant un polynôme en θ à coefficients entiers rationnels. Supposons $\theta \epsilon S$ et $\lambda = P(\theta)/Q(\theta) = P/Q$. Nous allons montrer que, sauf les exceptions indiquées, on a $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}} |\gamma_\xi(u)\gamma_\xi(\lambda u)| > 0$; il s'ensuivra que dv est singulière. Considérons

$$\gamma_\xi^2(P\theta^n) = \prod_{j=0}^{\infty} \cos^2 \pi P\xi^j \prod_{j=1}^{n} \cos^2 \pi P\theta^j;$$

d'après (8), cette expression tend vers une limite non nulle quand $n \to \infty$ à la condition nécessaire et suffisante que, *pour aucun entier* $j \gtrless 0$, *on n'ait* $P\xi^j = \frac{1}{2} (\mathrm{mod}\ 1)$ (*condition* $A(P)$). Supposons qu'on n'ait ni $A(P)$, ni $A(2^k P)$ (k entier > 0); alors il existe des entiers j, k, μ, v tels que $P\xi^j = (2\mu+1)/2$ et $2^k P\xi^k = (2v+1)/2$, donc $\theta^{k-j} = 2^k(2\mu+1)/(2v+1)$; on en conclut aisément que $k-j = 1$ et $v = 0$, donc $\theta = 2^k(2\mu+1)$; soit, compte tenu de la restriction $\theta \leqslant 4$, $\theta = 2$ ou $\theta = 4$. En dehors de ces cas, on vérifie que l'une au moins des trois circonstances suivantes est réalisée: $A(P)$ et $A(Q)$; $A(2P)$ et $A(2Q)$; $A(4P)$ et $A(4Q)$. En posant suivant les cas $u = Q\theta^n$, $u = 2Q\theta^n$ ou $u = 4Q\theta^n$, on voit que $\gamma^2(u)\gamma^2(\lambda u) \to l \neq 0$ quand $n \to \infty$. D'où (d), ce qui achève la démonstration du théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] B. Jessen et A. Wintner, *Distribution functions and the Riemann zeta function*, Transactions of the American Mathematical Society 38 (1935), p. 48-88.

[2] R. Salem, *Sets of uniqueness and sets of multiplicity*, ibidem 54 (1943), p. 218-228.

[3] — *On sets of multiplicity for trigonometrical series*, American Journal of Mathematics 64 (1942), p. 531-538.

[4] — *On singular monotonic functions of the Cantor type*, Journal of Mathematics and Physics 21 (1942), p. 69-81.

[5] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lwów 1935, chap. X.

Reçu par la Rédaction le 28. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR UNE PROPOSITION ÉQUIVALENTE À L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

PAR

J. POPRUŽENKO (ŁÓDŹ)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble composé de toutes les suites $s = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$ d'entiers positifs tendant vers l'infini:

(1) $$\lim_{i\to\infty} n_i = \infty.$$

s et $t = (m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ étant deux éléments de $\mathcal{E}$, écrivons

(2) $$s \gg t$$

lorsque $\lim\limits_{i\to\infty} n_i/m_i = \infty$, et dans ce cas seulement. Nous dirons alors que *la vitesse de la croissance de la suite s est plus grande que celle de t.*

La relation (2), qui est transitive et non-refléxive, établit dans $\mathcal{E}$ un ordre partiel. Démontrons qu'elle jouit de la propriété fondamentale que voici:

Lemme (comp. [2], 1). *N étant un ensemble au plus dénombrable $\subset \mathcal{E}$, il existe deux éléments de $\mathcal{E}$, s et t, tels que*

(3) $$t \gg N \gg s\ (^1).$$

Démonstration. La formule $t \gg N$ étant facile à démontrer, il ne s'agit que de la formule $N \gg s$. En voici une démonstration directe, proposée par E. Marczewski.

Soient $n_1^j, n_2^j, \ldots, n_i^j, \ldots$ $(j = 1, 2, \ldots)$ toutes les suites appartenant à N.

On peut déterminer une suite d'entiers positifs:

(4) $$1 < N_1 < N_2 < N_3 < \ldots,$$

telle que

(5) $$n_i^j \geqslant m^2 \quad \text{pour} \quad i \geqslant N_m; \quad j = 1, 2, \ldots, m;\ m = 1, 2, \ldots$$

(1) C'est-à-dire que $t \gg p \gg s$ pour tout $p \epsilon N$.

Posons

(6) $$n_i = \sqrt{\min(n_i^1, n_i^2, \ldots, n_i^m)} \quad \text{pour} \quad N_m \leqslant i < N_{m+1};\ m = 1, 2, \ldots$$

La suite $s = (n_1, n_2, \ldots)$ satisfait aux conditions du Lemme. Car:

1° il résulte de (5) que $n_i \geqslant m$ lorsque $N_m \leqslant i < N_{m+1}$, d'où d'après (4), $n_i \to \infty$;

2° en vertu de (5)-(6), on a $n_i^m/n_i > \sqrt{n_i^m}$ pour $i \geqslant N_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, donc $\lim\limits_{i\to\infty} n_i^m/n_i = \infty$.

Le Lemme étant ainsi démontré, on en conclut qu'il existe, pour tout ensemble ordonné selon la relation (2) en type $\omega_0^* + \omega_0$ représenté dans la forme

$$\ldots \geqslant p_n \geqslant \ldots \geqslant p_1 \geqslant q_0 \geqslant q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant \ldots \quad (n < \omega_0),$$

deux éléments $p = p_{\omega_0}$ et $q = q_{\omega_0}$ de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait

$$p_{\omega_0} \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant \ldots \geqslant p_1 \geqslant q_0 \geqslant q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant \ldots \geqslant q_{\omega_0} \quad (n < \omega_0),$$

et qu'il en est de même de tout ensemble dont le type d'ordre est $\gamma^* + \gamma$, où γ désigne un nombre ordinal dénombrable; car cela résulte de la remarque précédente rapprochée du fait qu'un γ limite est confinal avec ω_0.

Cependant, il en est autrement lorsque γ est indénombrable.

Soit ω_c le nombre initial de puissance du continu. Considérons la proposition (P) suivante:

Proposition (P). *Il existe un sous-ensemble H de $\mathcal{E}$, ordonné selon la relation* (2) *en type $\omega_c^* + \omega_c$ et jouissant de la propriété suivante:*

On peut attacher à tout élément p de $\mathcal{E}$ deux éléments de H, t et s, de façon que:

1° p satisfasse à la condition $t \geqslant p \geqslant s$;

2° l'ensemble des éléments x de H qui satisfont à la condition

(7) $$t \geqslant x \geqslant s$$

soit au plus dénombrable.

Notre but est de démontrer le théorème que voici:

Théorème. *L'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ est équivalente à la Proposition* (P).

Démonstration. I. L'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ entraîne la Proposition (P).

Soit ρ une relation d'ordre partiel, définie dans l'espace $\mathcal{E}$; supposons ρ assujetti à la condition suivante:

(*) *Quel que soit l'ensemble M $(M \subset \mathcal{E})$ de puissance $\leqslant \aleph_0$, il existe un élément q de $\mathcal{E}$ tel que $p\rho q$ pour tout $p \in M$.*

Supposons de plus que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Comme $\overline{\overline{\mathcal{E}}} = 2^{\aleph_0}$, nous pouvons affirmer que, dans ces hypothèses, il existe une suite transfinie $\{p_\varphi\}_{\varphi<\omega_1}$ formée d'éléments de $\mathcal{E}$, bien ordonnée selon la relation ρ [2] et contenant, pour tout $p \in \mathcal{E}$, un terme p_φ tel que $p\rho p_\varphi$ ([1], p. 148-150, Lemme; on y pose $\mathfrak{l} = \aleph_0$, $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$ et $\mu = 1$).

En interprétant la relation abstraite ρ comme définie par (2) et en appliquant le résultat précité, ce qui est possible d'après le Lemme (formule (3), côté droit) et la propriété (*) de ρ, on conclut qu'il existe une suite transfinie d'éléments de $\mathcal{E}$,

(8) $$s_0 \geqslant s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_\xi \geqslant \ldots \quad (\xi < \omega_1),$$

qui contient pour tout $p \in \mathcal{E}$ un s_{ξ_p}, dépendant de p tel que $p \geqslant s_{\xi_p}$.

Pareillement, en interprétant ρ comme la relation d'ordre, inverse de (2), et en s'appuyant sur le membre gauche de (3) rapproché de (*), on détermine une suite

(9) $$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_\eta \leqslant \ldots \quad (\eta < \omega_1)$$

ayant la propriété analogue relativement à la relation d'ordre $\leqslant$.

Au surplus, on peut supposer dans (8)-(9) que $s_0 = t_0$; car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déterminer, pour un $s_0 \in \mathcal{E}$ donné d'avance, les termes s_{ξ_0} et t_{η_0} de sorte que l'on ait $s_0 \geqslant s_{\xi_0}$, $s_0 \leqslant t_{\eta_0}$, et — ceci fait — remplacer (8)-(9) par les suites:

$$s_0 \geqslant s_{\xi_0} \geqslant s_{\xi_0+1} \geqslant \ldots \geqslant s_\xi \geqslant \ldots \quad (\xi < \omega_1),$$
$$s_0 \leqslant t_{\eta_0} \leqslant t_{\eta_0+1} \leqslant \ldots \leqslant t_\eta \leqslant \ldots \quad (\eta < \omega_1),$$

ayant les mêmes propriétés que (8)-(9).

L'égalité $s_0 = t_0$ admise, on prend pour H la totalité des termes qui figurent dans la formule

(10) $$\ldots \geqslant t_\eta \geqslant \ldots \geqslant t_{\omega_0} \geqslant \ldots \geqslant t_1 \geqslant s_0 \geqslant \ldots \geqslant s_\xi \geqslant \ldots \quad (\xi < \omega_1, \eta < \omega_1)$$

et l'on vérifie de suite, vu $\omega_1 = \omega_c$, que l'ensemble H satisfait alors aux conditions de la Proposition (P), qui se trouve ainsi démontrée.

II. La Proposition (P) entraîne l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Admettons que la Proposition (P) soit vraie. L'ensemble H qui y figure ayant le type d'ordre $\omega_c^* + \omega_c$, on peut le mettre sous la forme (10), les termes s_ξ et t_η supposés définis pour tout $\xi < \omega_c$ et tout $\eta < \omega_c$.

Soit ξ un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $0 < \xi < \omega_c$; désignons par K_ξ l'ensemble de tous les termes s_γ de (10) avec $0 \leqslant \gamma \leqslant \xi$.

Il est à démontrer que

(11) $$\overline{\overline{K_\xi}} \leqslant \aleph_0.$$

[2] C'est-à-dire que l'inégalité $\varphi < \varphi'$ entraîne toujours $p_\varphi \rho p_{\varphi'}$.

Soient t et s, $t \gg s$, deux éléments distincts de (10); désignons par (t, s) l'ensemble de tous les éléments x de (10) satisfaisant à la condition (7).

Considérons l'élément s_ξ de (10). D'après les conditions 1°-2°, il existe deux termes de (10), t' et s_{ξ_1}, tels que l'on ait $t' \gg s_\xi \gg s_{\xi_1}$ $(\xi < \xi_1)$ et que l'ensemble (t', s_{ξ_1}) soit au plus dénombrable. Lorsque $t' = s_0$ ou $t' = t_{\eta'}$ $(0 < \eta' < \omega_c)$, la formule (11) est démontrée, car on a dans tous les deux cas l'inclusion $K_\xi \subset (t', s_{\xi_1})$.

Supposons donc que l'on ait $t' = s_{\xi_2}$, $\xi_1 > \xi_2 > 0$, et $\overline{\overline{(s_{\xi_2}, s_{\xi_1})}} \leqslant \aleph_0$.

Au besoin, on reproduit le raisonnement précédent pour s_{ξ_2}, ce qui fournit l'ensemble (s_{ξ_4}, s_{ξ_3}) où l'indice ξ_4 satisfait à l'inégalité

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_4 > 0 \tag{12}$$

et $\overline{\overline{(s_{\xi_4}, s_{\xi_3})}} \leqslant \aleph_0$.

A cause de (12), ce raisonnement ne peut être répété qu'un nombre fini de fois, car, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite infinie de nombres ordinaux décroissants,

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_4 > \xi_6 > \ldots > 0,$$

ce qui est impossible. On obtient donc finalement un ensemble de la forme (t', s_{2k-1}), où l'on a soit $t' = s_{2k} = s_0$, soit $t' = t_{\eta'}$ et $\overline{\overline{(t', s_{2k-1})}} \leqslant \aleph_0$.

On a donc en tout cas

$$K_\xi \subset (s_{\xi_2}, s_{\xi_1}) + (s_{\xi_4}, s_{\xi_3}) + \ldots + (t', s_{2k-1}),$$

ce qui implique (11).

Le nombre ordinal $\xi < \omega_c$ étant choisi arbitrairement, il en résulte que $\omega_c = \omega_1$, c'est-à-dire que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Le Théorème est entièrement démontré.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Poprużenko, *Sur l'égalité* $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$, Fundamenta Mathematicae 43 (1956), p. 148-155.

[2] — *Sur la vitesse de croissance des suites infinies d'entiers positifs (I)*, ibidem (à paraître).

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

ON A PROBLEM OF W. KINNA AND K. WAGNER

BY

A. MOSTOWSKI (WARSAW)

W. Kinna and K. Wagner [1] have considered the following property of sets:

(E) *there is a function f which correlates with every subset A of a set M* $(\overline{\overline{A}} \geqslant 2)$ *a non-void proper subset of A.*

The main result of Kinna and Wagner states that a set with the property (E) can be ordered, whence it follows that the axiom

(K) *every set M has the property* (E)

implies the axiom

(O) *every set can be ordered.*

Kinna and Wagner have raised the question whether (K) and (O) are equivalent on the basis of the usual axioms of set-theory without the axiom of choice. The purpose of this note is to show that the answer to that question is negative.

In [2] I have defined a model $\mathfrak{W}^+$ of the axioms of set-theory in which (O) is true. Hence it is sufficient to show that (K) is false in this model.

From [2], 54 and 59, we easily see that the axiom (K) relativized to the model $\mathfrak{W}^+$ can be written thus: for every $x \epsilon \mathfrak{W}^+ - K$ there is a set $f \epsilon \mathfrak{W}^+$ with the following three properties:

1° f is a set of ordered pairs,

2° if $y \subset x$, $y \epsilon \mathfrak{W}^+ - K$, and if there are elements u, v such that $u \epsilon y$, $v \epsilon y$, and $u \neq v$, then there is an element z such that $\langle z, y\rangle \epsilon f$, $\Lambda_0 \neq z \subset y$, and $z \neq y$,

3° if $\langle z_1, y\rangle \epsilon f$ and $\langle z_2, y\rangle \epsilon f$, then $z_1 = z_2$.

We shall now show that for $x = K$ there is no f with the above properties which will show the fallacy of (K) in $\mathfrak{W}^+$, since $K \epsilon \mathfrak{W}^+ - K$ according to [2], 110.

Let us assume that there is in $\mathfrak{W}^+$ an element f satisfying 1°-3°. It follows from $f \epsilon \mathfrak{W}^+$ that there exists a finite set $A \subset K$ such that $f \epsilon \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^+(A)}$, i. e., $|\varphi, f| = f$ for all $\varphi \epsilon \mathfrak{G}^+(A)$; cf. [2], 39 and 83.