COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LA CONVOLUTION D'UNE INFINITÉ DE DISTRIBUTIONS DE BERNOULLI

PAR

J. P. KAHANE (MONTPELLIER) ET R. SALEM (PARIS)

I. Soit $\sum_0^\infty r_k$ une série convergente à termes positifs et soit a sa somme. Le produit infini convergent

$$\gamma(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi u r_k$$

est, à une constante multiplicative près, une fonction caractéristique

$$\gamma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} d\mu(x),$$

où $d\mu$ est une mesure positive qui s'obtient par la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli

$$B\left(\frac{x}{\pi r_0}\right) * B\left(\frac{x}{\pi r_1}\right) * \ldots * B\left(\frac{x}{\pi r_k}\right) * \ldots,$$

$B(x)$ désignant la distribution de Bernoulli concentrée aux deux points -1 et $+1$, avec masse égale à $1/2$ sur chacun d'eux.

Le support de $d\mu$ est l'ensemble E des points donnés par la formule

$$(1) \qquad \pi(\varepsilon_0 r_0 + \varepsilon_1 r_1 + \ldots + \varepsilon_k r_k + \ldots),$$

où les ε_k sont égaux à ± 1. Si l'on a, pour tout k à partir d'un certain rang

$$(2) \qquad r_k < \sum_{k+1}^{\infty} r_j,$$

le support contient des intervalles. En particulier, si (2) a lieu pour tout k, le support de $d\mu$ est tout l'intervalle $[-a\pi, a\pi]$.

D'autre part, si

$$\varliminf_{k\to\infty} 2^k (r_k + r_{k+1} + \ldots) = 0,$$

l'ensemble des points (1) est de mesure nulle et $\mu(x)$ est singulière.

Si, pour tout k,

$$r_k > \sum_{k+1}^{\infty} r_j, \tag{3}$$

le support est un ensemble parfait symétrique du type de Cantor, qui peut être de mesure positive ou nulle.

Il est commode de poser, en prenant $a = 1$,

$$r_0 = 1-\xi_0, \quad r_1 = \xi_0(1-\xi_1), \quad \ldots, \quad r_k = \xi_0\ldots\xi_{k-1}(1-\xi_k);$$

alors la condition (2) équivaut à $\xi_k > \frac{1}{2}$, et la condition (3) à $\xi_k < \frac{1}{2}$.

Si $\xi_k < \frac{1}{2}$ pour tout k, l'ensemble E est obtenu par trisections successives du type de Cantor $(\xi_k, 1-2\xi_k, \xi_k)$; il est de mesure nulle si $2^k\xi_0\ldots\xi_{k-1} \to 0$ quand $k \to \infty$. Si $\xi_k > \frac{1}{2}$ pour tout k, le support de $d\mu$ est la totalité de l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Un cas particulier intéressant est obtenu en prenant tous les ξ_k égaux à un même nombre ξ $(0 < \xi < 1)$. Si $\xi < \frac{1}{2}$, E est un ensemble parfait symétrique de Cantor à rapport constant, de mesure nulle. Si $\xi > \frac{1}{2}$, le support de $d\mu$ est l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Il résulte d'un théorème de Jessen et Wintner [1] que $\mu(x)$ est, soit absolument continue, soit purement singulière.

Ce dernier cas se présente, en particulier, si l'ensemble E est de mesure nulle, ou si $\gamma(u)$ ne tend pas vers zéro quand $u \to \infty$. Mais il paraît difficile de donner un critère général permettant de déterminer si μ est absolument continue, ou singulière; ainsi, par exemple, quand le support de $d\mu$ est tout l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (cas $\xi_k > \frac{1}{2}$ pour tout k.)

Le but de cette note est d'apporter une contribution — très partielle — à l'étude de ce problème.

II. Nous commencerons par démontrer le théorème suivant dont l'énoncé sera précisé plus loin:

THÉORÈME. *Pour „presque toutes" les suites $\{\xi_k\}$ telles que $\xi_k > \frac{1}{2}$, $\gamma(u) \in L^2$ et donc $\mu(x)$ est absolument continue.*

Démonstration. Elle s'appuie sur une méthode déjà utilisée par l'un de nous [3]. Supposons que pour tout k

$$\tfrac{1}{2} \leqslant a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k \leqslant 1$$

et que

$$\underline{\lim}\,(a_0 a_1 \ldots a_{p-1})^{1/p} = a > \tfrac{1}{2}.$$

Écrivons $\xi_k = a_k + \eta_k(b_k - a_k)$, de façon que $0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$.

Il est bien connu que l'hypercube à une infinité de dimensions $0 \leqslant \eta_k \leqslant 1$ peut être représenté (biunivoquement si on fait abstraction d'ensembles de mesure nulle) sur le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$, les fonctions $\eta_0(t), \ldots, \eta_p(t), \ldots$ étant telles que pour tout Φ mesurable

$$\int_0^1 \Phi\big(\eta_0(t), \ldots, \eta_p(t)\big)\,dt = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Phi(\eta_0, \ldots, \eta_p)\,d\eta_0\ldots d\eta_p.$$

Nous allons démontrer que, si les suites $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ ne sont pas „trop voisines" (plus exactement si $b_p - a_p \geqslant 1/\omega(p)$ avec $\log\omega(p) = o(p)$, $\omega(p)$ croissant), $\gamma(u) = \gamma_t(u)$ appartient à L^2 pour presque tout t. Nous nous servirons de la remarque suivante. On a, l étant $\geqslant 1$ et m quelconque,

$$\int_0^1 \cos^2(l\pi x + m)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l}\right). \tag{4}$$

En effet, l'intégrale s'écrit

$$\frac{1}{l\pi}\int_m^{m+l\pi} \cos^2 y\,dy < \frac{1}{l\pi}\int_m^{m+[l]\pi+\pi} \cos^2 y\,dy = \frac{[l]+1}{2l} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l}\right).$$

Nous avons maintenant

$$\gamma^2(u) = \gamma_t^2(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\pi u\xi_0\ldots\xi_{k-1}(1-\xi_k)$$

$$\leqslant \prod_{k=0}^{p} \cos^2\pi u\xi_0\ldots\xi_{k-1}(1-\xi_k) = f_{u,p}.$$

On a, les $f_{u,p}$ étant fonctions de t,

$$\int_0^1 f_{u,p}\,dt = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f_{u,p}\,d\eta_0\ldots d\eta_p$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 f_{u,p-1}\,d\eta_0\ldots d\eta_{p-1}\int_0^1 \cos^2\pi u\xi_0\ldots\xi_{p-1}(1-\xi_p)\,d\eta_p.$$

La dernière intégrale s'écrit

$$T_p = \int_0^1 \cos^2\pi u\xi_0\ldots\xi_{p-1}[1-a_p-(b_p-a_p)\eta_p]\,d\eta_p$$

et, conformément à la remarque (4), puisque $\xi_k \geqslant a_k$,

$$T_p \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$$

à condition de choisir p tel que

$$u a_0 \ldots a_{p-1} \frac{1}{\omega(p)} \geqslant p^2. \tag{5}$$

Dans ces conditions

$$\int_0^1 f_{u,p}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\int_0^1 f_{u,p-1}\, dt.$$

Mais si (5) est vraie pour l'entier p, elle est vraie a fortiori si on remplace p par $p-1$. Donc, de proche en proche,

$$\int_0^1 f_{u,p}\, dt \leqslant A/2^p,$$

A étant une constante absolue; donc aussi

$$\int_0^1 \gamma_t^2(u)\, dt \leqslant A/2^p.$$

Fixons maintenant a' tel que $\frac{1}{2} < a' < a$. Alors $a_0 \ldots a_{p-1} > a'^p$ et l'inégalité (5) sera satisfaite si l'on choisit p tel que

$$\log u + p \log a' - \log \omega(p) \geqslant 2 \log p.$$

Comme nous avons supposé $\log \omega(p) = o(p)$, il suffira de prendre

$$p < \theta \frac{\log u}{|\log a'|},$$

où θ est un nombre fixe quelconque < 1. Prenons donc pour p la partie entière de $\theta \log u / |\log a'|$. Alors

$$2^p > \frac{1}{2} \exp\left(\theta \frac{\log 2}{|\log a'|} \log u\right).$$

Puisque $|\log a'| = \log 1/a' < \log 2$, on peut choisir $\theta < 1$ tel que

$$\theta \frac{\log 2}{|\log a'|} = 1+\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Alors

$$\int_0^1 \gamma_t^2(u)\, dt < \frac{A}{2u^{1+\varepsilon}},$$

donc

$$\int_0^\infty du \int_0^1 \gamma_t^2(u)\, dt < \infty,$$

ce qui prouve que $\gamma_t(u) \in L^2$ pour presque tout t.

III. Détermination explicite de la fonction $\mu(x)$. Quoique cette détermination ne paraisse pas pouvoir être utile pour reconnaître si $\mu(x)$ est absolument continue ou purement singulière, nous croyons qu'il est intéressant de la donner ici.

THÉORÈME. *Posons*

$$x = \pi \sum_0^\infty r_k \varphi_k(y) = f(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$

où les φ_k sont les fonctions de Rademacher, et désignons par $f^*(y)$ la fonction équimesurable avec $f(y)$ et non décroissante (cf. [5]) *avec $f^*(0) = f(0)$. Alors $y = \mu(x)$ est à une constante additive près la fonction inverse de $f^*(y)$.*

Démonstration. On a, $\mu^*(x)$ désignant la fonction inverse de $f^*(y)$,

$$I = \int e^{iux} d\mu^*(x) = \int_0^1 e^{iuf^*(y)} dy = \int_0^1 e^{iuf(y)} dy,$$

puisque f et f^* sont équimesurables. Comme d'autre part

$$\int_0^1 e^{iu\pi r_k \varphi_k(y)} dy = \cos \pi r_k u,$$

on a, en vertu de l'indépendance des φ_k,

$$I = \prod_{k=0}^\infty \cos \pi r_k u = \gamma(u), \qquad \text{d'où} \qquad d\mu = d\mu^*,$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque. Si, pour tout k, $r_k > \sum_{k+1}^\infty r_j$, $f(y)$ est monotone, $f^*(y) = f(y)$, et $\mu(x)$ est la fonction de Cantor-Lebesgue construite sur l'ensemble parfait E. Mais il en est autrement si, par exemple, le support de $d\mu$ est l'intervalle entier $[-a\pi, a\pi]$.

IV. Un critère arithmétique. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit N_p le nombre de solutions de l'inéquation*

$$|(\pm r_0 \pm \ldots \pm r_{p-1}) - (\pm r_0 \pm \ldots \pm r_{p-1})| < \varrho_p = \left(\sum_p^\infty r_k^2\right)^{1/2}.$$

On a toujours

$$\lim_{p\to\infty} \frac{N_p}{4^p \varrho_p} > 0;$$

et les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\gamma(u) \in L^2$; (b) $\underline{\lim}_{p\to\infty} \frac{N_p}{4^p \varrho_p} < \infty$; (c) $\overline{\lim}_{p\to\infty} \frac{N_p}{4^p \varrho_p} < \infty$.

Démonstration. Posons provisoirement

$$\gamma_p(u) = \prod_{k=0}^{p-1} \cos \pi r_k u;$$

on a toujours $|\gamma(u)| \leqslant |\gamma_p(u)|$ et, ainsi qu'on s'en assure aisément, $|\gamma(u)| > \varepsilon |\gamma_p(u)|$ si $|u\varrho_p| < K = K(\varepsilon)$ (où $0 < \varepsilon < 1$, et l'on peut sans inconvénient supposer $0 < K < \frac{1}{2}$); on a $\gamma_p(u) = 2^{-p} \sum_j e^{ia_j u}$ avec $a_j = \pi(\pm r_0 \pm \pm \ldots \pm r_{p-1})$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^p)$. Posons $\Delta(x) = \max(0, 1-|x|)$ et $\delta(x) = 4\sin^2 \frac{1}{2}x/x^2$; on a

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \Delta(u)\, du \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \delta(u)\, du.$$

On a d'une part

$$\int_{-x}^{x} \gamma^2(u)\, du = \lim_{p\to\infty} \int_{-x}^{x} \gamma_p^2(u)\, \delta(\pi u \varrho_p)\, du,$$

$$\int_{-x}^{x} \gamma^2(u)\, du < \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_p^2(u)\, \delta(\pi u \varrho_p)\, du = \frac{2}{4^p \varrho_p} \sum_{j,k} \Delta\left(\frac{a_j - a_k}{\pi \varrho_p}\right) \leqslant 2 \frac{N_p}{4^p \varrho_p},$$

donc $\underline{\lim}_{p\to\infty} N_p / 4^p \varrho_p > 0$ en tous cas, et (b) entraîne (a). D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(u)\, du > \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(u)\, \Delta\left(\frac{u\varrho_p}{K}\right) du > \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_p^2(u)\, \Delta\left(\frac{u\varrho_p}{K}\right) du$$

$$= \frac{K\varepsilon}{4^p \varrho_p} \sum_{j,k} \delta\left(\frac{K}{\varrho_p}(a_j - a_k)\right) > K\delta(K\pi)\varepsilon^2 \frac{N_p}{4^p \varrho_p},$$

donc (a) entraîne (c). Comme (c) entraîne (b), le théorème est démontré.

V. Cas particulier où $r_k = \xi^k$ $(0 < \xi < 1)$. Nous désignerons, dans ce qui suit, par $\gamma_\xi(u)$ la fonction

$$\gamma(u) = \prod_{0}^{\infty} \cos \pi u \xi^k$$

et par $\mu_\xi(x)$ la fonction $\mu(x)$ correspondante. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, si $\xi < \frac{1}{2}$, le support de $d\mu_\xi(x)$ est un ensemble parfait de Cantor à rapport constant, donc de mesure nulle, et $\mu_\xi(x)$ est purement singulière, étant constante dans tout intervalle contigu à l'ensemble. Si $\xi > \frac{1}{2}$, le support de $d\mu_\xi(x)$ est l'intervalle $\big(-\pi/(1-\xi), \pi/(1-\xi)\big)$. Nous poserons, dans ce qui suit, $\theta = 1/\xi$.

Module de continuité de $\mu_\xi(x)$. Si $\xi < \frac{1}{2}$, il est bien connu (voir par exemple [4]) que $\mu_\xi(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $a = \log 2/\log\theta$. (Ceci est valable si $\xi = \frac{1}{2}$, $\mu_\xi(y)$ étant alors linéaire par morceaux).

Dans le cas $\xi > \frac{1}{2}$, soit q le plus petit entier tel que $\theta^q \geqslant 2$. Alors $\mu_\xi(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $a = \log 2/q\log\theta$. En effet, on a

$$\gamma_\xi(u) = \gamma_{\xi^q}(u)\cdot\gamma_{\xi^q}(\xi u)\ldots\gamma_{\xi^q}(\xi^{q-1}u)$$

et $d\mu_\xi$ est la convolution de q mesures homothétiques à $d\mu_{\xi^q}$; le module de continuité de $\mu_\xi(x)$ est majoré par celui de $\mu_{\xi^q}(x)$. Comme $\theta^q \geqslant 2$, il n'y a qu'à appliquer le résultat cité plus haut concernant le cas $\xi \leqslant \frac{1}{2}$. Il convient d'observer qu'alors que la condition de Lipschitz avec $a = \log 2/\log\theta$ pour $\xi \leqslant \frac{1}{2}$ donne le module de continuité *vrai*, nous ne savons pas si le résultat $\log 2/q\log\theta$ dans le cas $\xi > \frac{1}{2}$ ne peut être amélioré. En tous cas et quel que soit q, $\mu_\xi(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\log 2/(\log\theta + \log 2)$, car $q\log\theta = \log\theta^q \leqslant \log 2\theta$.

Si $\theta^q = 2$, c'est-à-dire $\xi = 2^{-1/q}$, q entier, $\mu_{\xi^q}(x)$ est linéaire entre -2π et 2π; donc $\mu_\xi(x)$ est absolument continue et $q-1$ fois dérivable.

Remarque I. Si $\mu_\xi(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre a, on a

$$\varphi(u) = \int_0^u \gamma^2(v)\, dv = O(u^{1-a}) \quad (u\to\infty). \tag{6}$$

Ceci n'est que la transcription d'un résultat de Wiener (cf. [4]).

Remarque II. La condition nécessaire et suffisante pour que $\gamma_\xi(u)$ ne tende pas vers zéro quand $u\to\infty$, est que θ appartienne à la classe S des entiers algébriques dont tous les conjugués (autres que θ lui-même) soient de module inférieur à l'unité (cf. [2]). Il en résulte évidemment que si $\theta \in S$, $\mu_\xi(x)$ est singulière. On sait qu'il existe des nombres θ inférieurs à 2.

VI. Une équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\mu_\xi(x)$. Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Pour tout ξ $(0 < \xi < 1)$, la fonction μ_ξ satisfait à la relation*

$$\mu(x) = \frac{1}{2}\left(\mu\left(\frac{x+\pi}{\xi}\right) + \mu\left(\frac{x-\pi}{\xi}\right)\right). \tag{R}$$

De plus, toute fonction à variation bornée satisfaisant à (R) est une fonction linéaire de μ_ξ.

Démonstration. On a

$$\mu_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \gamma_\xi(u)\frac{\sin ux}{u}\,du. \tag{7}$$

D'après la relation (6) et l'inégalité de Schwarz, appliquée à

$$\int_{2^N}^{2^{N+1}} \gamma_\xi(u)\frac{du}{u},$$

l'intégrale dans (7) est absolument convergente. Comme on a $\gamma_\xi(u) = \cos\pi u \cdot \gamma_\xi(\xi u)$, (7) donne

$$\mu_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \gamma_\xi(\xi u)\frac{\sin\big(u(x+\pi)\big) + \sin\big(u(x-\pi)\big)}{u}\,du,$$

soit (R). Inversement, si k est une fonction à variation bornée satisfaisant à (R) et si l'on pose $\int e^{iux}dK(x) = \beta(u)$, on a

$$\beta(u) = \cos\pi u \cdot \beta(\xi u) = \cos\pi u \ldots \cos\pi\xi^n u\,\beta(\xi^{n+1}u) = \gamma_\xi(u)\beta(0),$$

d'où $dK = \beta(0)d\mu_\xi$, c. q. f. d.

VII. Étude du produit $\gamma_\xi(u)\gamma_\xi(\lambda u)$. Ce produit est la transformée de Fourier-Stieltjes de la convolution de $d\mu_\xi$ et d'une mesure obtenue à partir de $d\mu_\xi$ par homothétie du support. Nous avons alors:

THÉORÈME. *Posons*

$$\gamma_\xi(u)\gamma_\xi(\lambda u) = \int e^{iux}dv(x) \qquad (0 < \xi < 1,\ \lambda > 0).$$

(a) *Pour $\xi > \frac{1}{4}$, dv est absolument continue, et $dv/dx \in L^2$ pour presque tout λ.*

(b) *Pour $\xi < \frac{1}{4}$, dv est singulière quel que soit λ, et son support est de mesure nulle.*

(c) *Pour $\xi < \frac{1}{3}$ et $\lambda = 1$, dv est singulière et son support est de mesure nulle.*

(d) *Pour $\theta = 1/\xi \in S$, dv est singulière si λ est un nombre algébrique du corps de θ, avec les seules exceptions possibles: $\theta = 2$ et $\theta = 4$.*

Démonstration. (a) Montrons que

$$\int_{\lambda=0}^{1}\int_{u=0}^{\infty} \gamma_\xi^2(u)\gamma_\xi^2(\lambda u)\,d\lambda\,du < \infty;$$

ainsi, pour presque tout λ entre 0 et 1, on aura

$$\int_0^1 \gamma_\xi^2(u)\gamma_\xi^2(\lambda u)\,du < \infty;$$

comme le changement de λ en $\lambda\theta$ revient à multiplier $\gamma_\xi(u)\gamma_\xi(\lambda u)$ par $\cos\lambda\theta u$, il en sera de même pour tout $\lambda > 0$; d'où le résultat. D'après (6) on a

$$\int_0^1 \gamma_\xi^2(\lambda u)\,d\lambda = \frac{1}{u}\varphi(u) = O(u^{-a}).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_1^\infty \gamma_\xi^2(u)u^{-a}du < \infty,$$

soit, en intégrant par parties,

$$[\varphi(u)u^{-a}]_1^\infty + a\int_1^\infty \varphi(u)u^{-a-1}du < \infty.$$

C'est le cas si $a > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, comme on l'a vu en V, si $\xi > \frac{1}{4}$.

(b) et (c). Le support E de $d\mu_\xi$ est formé des points $\pi(\pm 1 \pm \xi \ldots \pm \xi^n \ldots)$; soit E_n la réunion des segments de longueur $2\xi^n\pi/(1-\xi)$ centrés aux points $\pi(\pm 1 \pm \xi, \ldots, \pm \xi^{n-1})$. Le support de dv est contenu dans $E + \lambda E$, donc dans $E_n + \lambda E_n$. Or $E_n + \lambda E_n$ est la réunion des segments de longueur $2\xi^n(1+\lambda)\pi/(1-\xi)$ centrés aux points η de la forme $\pi(\pm 1 \pm \xi \ldots \pm \xi^{n-1} \pm \lambda \pm \lambda\xi \ldots \pm \lambda\xi^{n-1})$. Il y a au plus 4^n points η, donc la mesure de $E_n + \lambda E_n$ est $O(4^n\xi^n)$ quand $n \to \infty$; d'où (b).

Si $\lambda = 1$, il y a au plus 3^n points η, donc la mesure de $E_n + \lambda E_n$ est $O(3^n\xi^n)$; d'où (c).

(d) Le résultat est démontré (quel que soit λ) pour $\theta > 4$; supposons donc $\theta \leqslant 4$. On sait (cf. [2]) que $\theta \epsilon S$ est la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \pi\theta^n < \infty$ et aussi bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \pi\theta^n P(\theta) < \infty, \tag{8}$$

$P(\theta)$ étant un polynôme en θ à coefficients entiers rationnels. Supposons $\theta \epsilon S$ et $\lambda = P(\theta)/Q(\theta) = P/Q$. Nous allons montrer que, sauf les exceptions indiquées, on a $\overline{\lim\limits_{u\to\infty}} |\gamma_\xi(u)\gamma_\xi(\lambda u)| > 0$; il s'ensuivra que dv est singulière. Considérons

$$\gamma_\xi^2(P\theta^n) = \prod_{j=0}^{\infty} \cos^2 \pi P \xi^j \prod_{j=1}^{n} \cos^2 \pi P \theta^j;$$

d'après (8), cette expression tend vers une limite non nulle quand $n \to \infty$ à la condition nécessaire et suffisante que, *pour aucun entier* $j \gtrless 0$, *on n'ait* $P\xi^j = \frac{1}{2} (\mathrm{mod}\ 1)$ (*condition* $A(P)$). Supposons qu'on n'ait ni $A(P)$, ni $A(2^k P)$ (k entier > 0); alors il existe des entiers j, k, μ, v tels que $P\xi^j = (2\mu+1)/2$ et $2^k P \xi^k = (2v+1)/2$, donc $\theta^{k-j} = 2^k(2\mu+1)/(2v+1)$; on en conclut aisément que $k-j = 1$ et $v = 0$, donc $\theta = 2^k(2\mu+1)$; soit, compte tenu de la restriction $\theta \leqslant 4$, $\theta = 2$ ou $\theta = 4$. En dehors de ces cas, on vérifie que l'une au moins des trois circonstances suivantes est réalisée: $A(P)$ et $A(Q)$; $A(2P)$ et $A(2Q)$; $A(4P)$ et $A(4Q)$. En posant suivant les cas $u = Q\theta^n$, $u = 2Q\theta^n$ ou $u = 4Q\theta^n$, on voit que $\gamma^2(u)\gamma^2(\lambda u) \to l \neq 0$ quand $n \to \infty$. D'où (d), ce qui achève la démonstration du théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] B. Jessen et A. Wintner, *Distribution functions and the Riemann zeta function*, Transactions of the American Mathematical Society 38 (1935), p. 48-88.

[2] R. Salem, *Sets of uniqueness and sets of multiplicity*, ibidem 54 (1943), p. 218-228.

[3] — *On sets of multiplicity for trigonometrical series*, American Journal of Mathematics 64 (1942), p. 531-538.

[4] — *On singular monotonic functions of the Cantor type*, Journal of Mathematics and Physics 21 (1942), p. 69-81.

[5] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lwów 1935, chap. X.

Reçu par la Rédaction le 28. 12. 1957

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR UNE PROPOSITION ÉQUIVALENTE À L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

PAR

J. POPRUŻENKO (ŁÓDŹ)

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble composé de toutes les suites $s = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$ d'entiers positifs tendant vers l'infini:

$$\lim_{i\to\infty} n_i = \infty. \tag{1}$$

s et $t = (m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ étant deux éléments de $\mathcal{E}$, écrivons

$$s \gg t \tag{2}$$

lorsque $\lim\limits_{i\to\infty} n_i/m_i = \infty$, et dans ce cas seulement. Nous dirons alors que *la vitesse de la croissance de la suite s est plus grande que celle de t.*

La relation (2), qui est transitive et non-refléxive, établit dans $\mathcal{E}$ un ordre partiel. Démontrons qu'elle jouit de la propriété fondamentale que voici:

Lemme (comp. [2], 1). *N étant un ensemble au plus dénombrable $\subset \mathcal{E}$, il existe deux éléments de $\mathcal{E}$, s et t, tels que*

$$t \gg N \gg s\,(^1). \tag{3}$$

Démonstration. La formule $t \gg N$ étant facile à démontrer, il ne s'agit que de la formule $N \gg s$. En voici une démonstration directe, proposée par E. Marczewski.

Soient $n_1^j, n_2^j, \ldots, n_i^j, \ldots$ $(j = 1, 2, \ldots)$ toutes les suites appartenant à N.

On peut déterminer une suite d'entiers positifs:

$$1 < N_1 < N_2 < N_3 < \ldots, \tag{4}$$

telle que

$$n_i^j \geqslant m^2 \quad \text{pour} \quad i \geqslant N_m; \quad j = 1, 2, \ldots, m; m = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

---

(1) C'est-à-dire que $t \gg p \gg s$ pour tout $p \epsilon N$.